Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 0 vom 16. April 2012

Aufgabe 1 (Wahrscheinlichkeitsräume)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist (Ω, S) ein messbarer Raum und ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S, so ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in S.
2. Ist (Ω, S) ein messbarer Raum und sind $A, B \in S$, so ist auch die Menge $\{x \in \Omega \mid \text{es ist entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\}$ in S.
3. Ist (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ für alle $A \in S$.
4. Ist (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S, so gilt
$$P\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Aufgabe 2 (Würfeln)**.** Es bezeichne $p \in [0, 1]$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem Wurf mit sechs fairen Würfeln mindestens eine ⚀ würfelt.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Es ist $p = 1$.

   Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem Wurf mit einem fairen Würfel eine ⚀ würfelt beträgt $1/6$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit p, dass man bei einem Wurf mit sechs fairen Würfeln mindestens eine ⚀ würfelt
   $$6 \cdot \frac{1}{6} = 1.$$ □
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

Aufgabe 3 (Poker)**.** Wir betrachten ein Kartenspiel (z.B. Poker) mit 52 Karten (je ein As, König, Dame, Bube, 10, ..., 2 von Kreuz, Pik, Herz, bzw. Karo). Ein Spieler hat fünf dieser Spielkarten erhalten, nämlich drei Asse, einen König, einen Buben.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er, wenn er zwei Karten zufällig aus den verbleibenden 47 Karten zieht, das letzte As erhält?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er, wenn er eine Karte zufällig aus den verbleibenden 47 Karten zieht, das letzte As oder einen König erhält?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (erzeugte σ-Algebren)**.**

1. Sei Ω eine Menge und sei $T \subset \mathrm{Pot}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass es eine (bezüglich Inklusion) kleinste σ-Algebra auf Ω gibt, die T enthält. Man nennt diese *die von T erzeugte σ-Algebra auf Ω* und bezeichnet sie mit $\sigma(T)$.

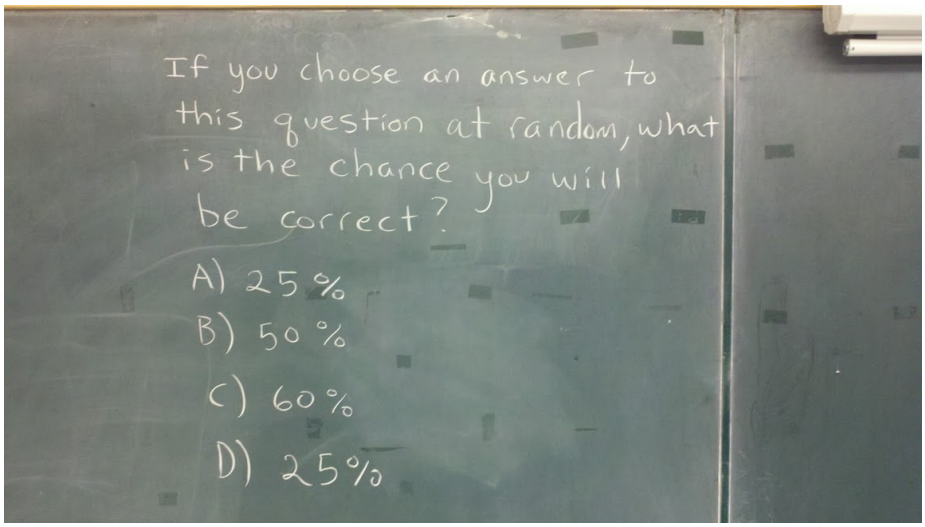
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die von

$$\big\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \;\big|\; a, b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } a_j \leq b_j \text{ für alle } j \in \{1, \ldots, n\}\big\}$$

erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ mit der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die von der Menge aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ mit der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

Bonusaufgabe (paradox?!)**.**



http://i.imgur.com/qvzU4.jpg

---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in den Übungen am 23.–27. April 2012 besprochen