Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 0 vom 16. April 2012

Aufgabe 1 (Wahrscheinlichkeitsräume)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist (Ω, S) ein messbarer Raum und ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S, so ist auch $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ in S.
2. Ist (Ω, S) ein messbarer Raum und sind $A, B \in S$, so ist auch die Menge $\{x \in \Omega \mid \text{es ist entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\}$ in S.
3. Ist (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, so gilt $P(\Omega \setminus A) = 1 - P(A)$ für alle $A \in S$.
4. Ist (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in S, so gilt
$$P\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = \sup_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Lösungshinweise.

1. Ja, denn: Als σ-Algebra ist S abgeschlossen unter Bildung von abzählbaren Vereinigungen und Komplementen, daher folgt die Behauptung aus
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \setminus A_n) \in S.$$
2. Ja, denn:
$$\begin{aligned} &\{x \in \Omega \mid \text{es ist entweder } x \in A \text{ oder } x \in B\}\\ =&\bigl(A \cap (\Omega \setminus B)\bigr) \cup \bigl(B \cap (\Omega \setminus A)\bigr) \in S. \end{aligned}$$
Dabei benutzen wir, dass S unter endlichen Vereinigungen und endlichen Schnitten abgeschlossen ist (mit Teilaufgabe 1.1 und $\{\emptyset, \Omega\} \subset S$).
3. Ja, denn: Das Wahrscheinlichkeitsmaß P ist σ-additiv und damit insbesondere auch endlich additiv (indem man die endliche Folge mit $\emptyset, \emptyset, \dots$ ergänzt). Da A und $\Omega \setminus A$ disjunkt sind, folgt somit
$$1 = P(\Omega) = P(A \cup (\Omega \setminus A)) = P(A) + P(\Omega \setminus A).$$
4. Nein, denn: Man betrachte etwa den Wahrscheinlichkeitsraum
$$\bigl(\{0,1\}, \operatorname{Pot}(\{0,1\}), P\bigr) \qquad \text{mit } P(\{0\}) = \frac{1}{2} = P(\{1\})$$
und setze $A_0 = \{0\}$ und $A_n = \{1\}$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist
$$P\Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Bigr) = 1 \neq \frac{1}{2} = \sup_{n\in\mathbb{N}} P(A_n).$$

Aufgabe 2 (Würfeln)**.** Es bezeichne $p \in [0,1]$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man bei einem Wurf mit sechs fairen Würfeln mindestens eine ⚀ würfelt.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Es ist $p = 1$.

   Beweis. Die Wahrscheinlichkeit, dass man bei einem Wurf mit einem fairen Würfel eine ⚀ würfelt beträgt $1/6$. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit p, dass man bei einem Wurf mit sechs fairen Würfeln mindestens eine ⚀ würfelt

   $$6 \cdot \frac{1}{6} = 1. \qquad \square$$

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p.

Lösungshinweise.

1. Der Fehler liegt darin, die Wahrscheinlichkeiten für die sechs Ereignisse „der j-te Würfel zeigt ⚀ “ mit $j \in \{1, \dots, 6\}$ einfach aufzusummieren, obwohl diese Ereignisse nicht paarweise disjunkt sind (z.B. kann es sein, dass bei einem Wurf mit sechs Würfeln sowohl der erste als auch der zweite Würfel ⚀ ergeben ...).

2. Als Wahrscheinlichkeitsraum wählen wir $(\{1,\dots,6\}^6, \operatorname{Pot}(\{1,\dots,6\}^6), P)$ mit

   $$\begin{aligned} P\colon \operatorname{Pot}\bigl(\{1,\dots,6\}^6\bigr) &\longrightarrow [0,1] \\ A &\longmapsto \frac{|A|}{|\{1,\dots,6\}^6|} = \frac{|A|}{6^6}; \end{aligned}$$

   dabei steht $(\omega_1, \dots, \omega_6) \in \{1,\dots,6\}^6$ für das Ergebnis eines Wurfes mit sechs Würfeln, bei dem der erste Würfel ω_1 ergibt, der zweite Würfel ω_2, etc. Da wir annehmen, dass die Würfel fair sind (und sich nicht gegenseitig beeinflussen), wählen wir als Wahrscheinlichkeitsmaß die zugehörige Gleichverteilung.

   Das Ereignis „bei einem Wurf mit sechs fairen Würfeln fällt mindestens eine ⚀ “ entspricht in diesem Modell also der Menge

   $$A := \{\omega \in \{1,\dots,6\}^6 \mid \exists_{j \in \{1,\dots,6\}} \quad \omega_j = 1\}.$$

   Daher erhalten wir

   $$\begin{aligned} p &= P(A) \\ &= 1 - P\bigl(\{1,\dots,6\}^6 \setminus A\bigr) \\ &= 1 - P\bigl(\{\omega \in \{1,\dots,6\}^6 \mid \forall_{j \in \{1,\dots,6\}} \quad \omega_j \neq 1\}\bigr) \\ &= 1 - \frac{|\{2,\dots,6\}^6|}{|\{1,\dots,6\}^6|} \\ &= 1 - \frac{5^6}{6^6} \\ &\approx 0.665. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (Poker)**.** Wir betrachten ein Kartenspiel (z.B. Poker) mit 52 Karten (je ein As, König, Dame, Bube, 10, ..., 2 von Kreuz, Pik, Herz, bzw. Karo). Ein Spieler hat fünf dieser Spielkarten erhalten, nämlich drei Asse, einen König, einen Buben.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er, wenn er zwei Karten zufällig aus den verbleibenden 47 Karten zieht, das letzte As erhält?

2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er, wenn er eine Karte zufällig aus den verbleibenden 47 Karten zieht, das letzte As oder einen König erhält?

Lösungshinweise. Sei etwa

$$\Omega_1 := \{A_\clubsuit, A_\spadesuit, A_\heartsuit, A_\diamondsuit, \cdots, 2_\diamondsuit\} \setminus \{A_\clubsuit, A_\heartsuit, A_\diamondsuit, K_\spadesuit, B_\heartsuit\}$$

die Menge der verbliebenen Karten (die genauen Farben der Asse, des Königs und des Buben auf der Hand des Spielers spielen dabei natürlich keine Rolle).

1. Wir betrachten als Modell den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \operatorname{Pot}(\Omega), P)$ mit

   $$\Omega := \bigl\{\{x, y\} \subset \Omega_1 \bigm| x \neq y\bigr\}$$

   (d.h. Ω ist die Menge der zweielementigen Teilmengen von Ω_1) und der Gleichverteilung P auf Ω: Für alle $A \subset \Omega$ sei also

   $$P(A) := \frac{A}{|\Omega|} = |A| \cdot \frac{2}{47 \cdot 46};$$

   wir nehmen also an, dass alle zweielementigen Teilmengen von Ω_1 mit derselben Wahrscheinlichkeit gezogen werden.

   Dann ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit als

   $$\begin{aligned} P\bigl(\{\omega \in \Omega \mid A_\spadesuit \in \omega\}\bigr) &= \frac{\bigl|\{\omega \in \Omega \mid A_\spadesuit \in \omega\}\bigr|}{|\Omega|} \\ &= \frac{\bigl|\bigl\{\{A_\spadesuit, y\} \bigm| y \in \Omega_1 \setminus \{A_\spadesuit\}\bigr\}\bigr|}{|\Omega|} \\ &= \frac{2}{47}. \end{aligned}$$

2. Wir betrachten als Modell den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \operatorname{Pot}(\Omega_1), P)$ mit der Gleichverteilung

   $$\forall_{A \subset \Omega_1} \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega_1|} = \frac{|A|}{47}.$$

   Dann gilt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

   $$\begin{aligned} P(\{A_\spadesuit, K_\clubsuit, K_\heartsuit, K_\diamondsuit\}) &= \frac{|\{A_\spadesuit, K_\clubsuit, K_\heartsuit, K_\diamondsuit\}|}{|\Omega_1|} \\ &= \frac{4}{47}. \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (erzeugte σ-Algebren)**.**

1. Sei Ω eine Menge und sei $T \subset \operatorname{Pot}(\Omega)$. Zeigen Sie, dass es eine (bezüglich Inklusion) kleinste σ-Algebra auf Ω gibt, die T enthält. Man nennt diese *die von T erzeugte σ-Algebra auf* Ω und bezeichnet sie mit $\sigma(T)$.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die von

   $T := \big\{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \bigm| a, b \in \mathbb{R}^n \text{ mit } a_j \leq b_j \text{ für alle } j \in \{1, \dots, n\}\big\}$

   erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ mit der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die von der Menge aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ mit der Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ übereinstimmt.

Lösungshinweise.

1. Wir zeigen zunächst, dass Schnitte von σ-Algebren wieder σ-Algebren sind:

   Sei I eine Menge und $\{A_i \mid i \in I\}$ eine Menge von σ-Algebren auf Ω, dann ist auch $A := \bigcap_{i \in I} A_i$ eine σ-Algebra auf Ω, denn:

   (a) Da Ω in jedem A_i enthalten ist, ist es auch in A enthalten.

   (b) Ist $W \in A$, so gilt auch $W \in A_i$ für alle $i \in I$. Damit folgt $\Omega \setminus W \in A_i$ für alle $i \in I$ und daher $\Omega \setminus W \in A$. Analog schließt man, dass A unter abzählbaren Vereinigungen abgeschlossen ist.

   Da $\operatorname{Pot}(\Omega)$ eine σ-Algbra ist, die T enthält, ist nach dem gerade gezeigten

   $$\sigma(T) := \bigcap \big\{A \bigm| A \text{ ist eine } \sigma\text{-Algebra auf } \Omega \text{ mit } T \subset A\big\}$$

   eine σ-Algebra auf Ω, die T enthält. Aus der Definition von $\sigma(T)$ folgt für alle σ-Algebren B auf Ω, die T enthalten, bereits $\sigma(T) \subset B$, also die gesuchte Minimalität.

2. – Die Elemente von T sind abgeschlossen, liegen als Komplemente von offenen Mengen also in $B(\mathbb{R}^n)$. Damit folgt $\sigma(T) \subset B(\mathbb{R}^n)$.

   – Es gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$ mit $a_i \leq b_i$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$, dass

   $$\begin{aligned} &(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n) \\ &= \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{>0}} \Big[a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2 \cdot m}, b_1 - \frac{b_1 - a_1}{2 \cdot m}\Big] \times \cdots \times \Big[a_n + \frac{b_n - a_n}{2 \cdot m}, b_n - \frac{b_n - a_n}{2 \cdot m}\Big]. \end{aligned}$$

   – Nach Definition der Produkttopologie gibt es für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}^n$ eine Funktion $\varepsilon \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

   $$U = \bigcup_{x \in U} \big(x_1 - \varepsilon_1(x), x_1 + \varepsilon_1(x)\big) \times \cdots \times \big(x_n - \varepsilon_n(x), x_n + \varepsilon_n(x)\big).$$

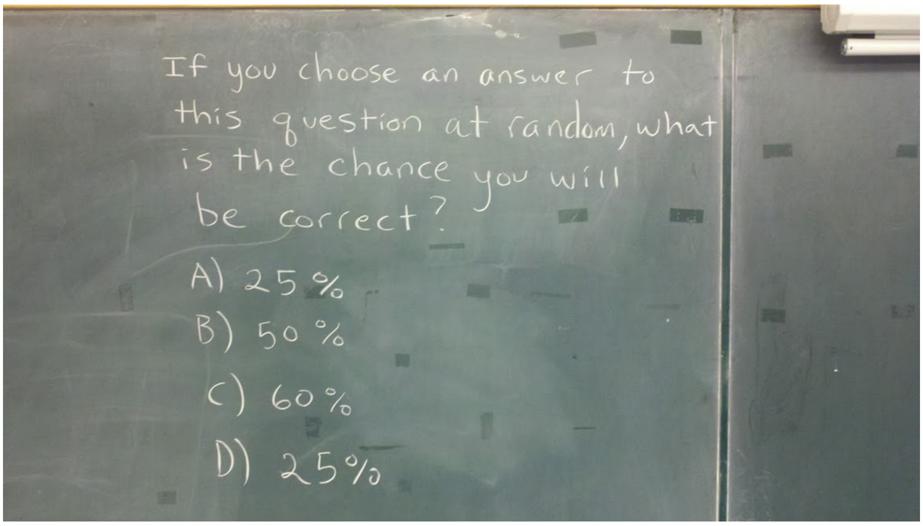
   – Da $\mathbb{Q}^n$ dicht in $\mathbb{R}^n$ ist, gilt sogar

   $$U = \bigcup_{x \in U \cap \mathbb{Q}^n} \big(x_1 - \varepsilon_1(x), x_1 + \varepsilon_1(x)\big) \times \cdots \times \big(x_n - \varepsilon_n(x), x_n + \varepsilon_n(x)\big).$$

– Jede offene Teilmenge in $\mathbb{R}^n$ lässt sich also als abzählbare Vereinigung von Elementen aus T schreiben und ist daher Element von $\sigma(T)$. Damit folgt $B(\mathbb{R}^n) \subset \sigma(T)$.

3. Da jede kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen ist, haben wir wegen der Minimalitätseigenschaft, dass die von den kompakten Teilmengen erzeugte σ-Algebra in der Borel-σ-Algebra enthalten ist. Da die Quadermengen aus Teil 2 kompakt sind, erhält man mit der Minimalität der Borel-σ-Algebra die umgekehrte Inklusion aus Teil 2.

Bonusaufgabe (paradox?!).



http://i.imgur.com/qvzU4.jpg

Lösungshinweise. Das Problem bei dieser Frage ist, dass sie nicht präzise gestellt ist – sie lässt sich auf verschiedene Arten und Weisen verstehen. Das Hauptproblem hierbei ist, was unter „choose at random“ genau zu verstehen ist.

Eine Möglichkeit, dies zu deuten ist, anzunehmen, dass die Gleichverteilung gemeint ist, d.h. dass jede der Antwortmöglichkeiten A), B), C) und D) mit Wahrscheinlichkeit 1/4 gewählt werden soll [1/3 wenn man die Antworten A) und D) für die Ziehung nicht trennt]. In diesem Fall kann keine der gegebenen Antworten richtig sein, denn die Antworten 60% bzw. 50%, werden mit Wahrscheinlichkeit 1/4 gezogen, die Antwort 25% mit Wahrscheinlichkeit 1/2. Also besitzt die Frage eine richtige Antwort, nähmlich 0, diese ist aber nicht unter den gegebenen Antwortmöglichkeiten. [Man vergleiche dies etwa mit der Frage: Was ist 1+1 ? A) 5 B) 7].

Eine andere Möglichkeit ist es, eine beliebige Wahrscheinlichkeitsverteilung zuzulassen. Man könnte etwa mit Wahrscheinlichkeit 3/5 Antwort C) wählen und die anderen jeweils mit Wahrscheinlichkeit 2/15, dann wäre C) die richtige Antwort. Analog kann man für die anderen Antwortmöglichkeiten vorgehen. Zum Beispiel: Was passiert, wenn man die Antworten A) und D) mit Wahrscheinlichkeit 1/8, B) mit 1/2 und C) mit 1/4 zieht?

Es ist wichtig zu betonen, dass am Anfang einer konkreten, stochastischen Problemstellung stets die Frage zu klären ist, was in der gegebenen Situation unter Zufall zu verstehen ist, d.h. ein Modell zu bilden. Die Antwort, die man mathematisch auf dieser Basis berechnen kann, ist nur so legitim wie das Modell, das man gewählt hat.

---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in den Übungen am 23.–27. April 2012 besprochen