Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank | Blatt 1 vom 19. April 2012

Aufgabe 1 (Abbildungen zwischen messbaren Räumen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Seien Ω, Ω' Mengen, sei $X\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ eine Abbildung, und sei S' eine σ-Algebra auf Ω'. Dann ist $\bigl\{X^{-1}(A') \bigm| A' \in S'\bigr\}$ eine σ-Algebra auf Ω.
2. Seien (X, T) und (X', T') topologische Räume. Dann ist jede stetige Abbildung $X \longrightarrow X'$ bezüglich den Borel-σ-Algebren auf X bzw. X' messbar.

Aufgabe 2 (Drei Münzen)**.** Es werden drei faire Münzen (mit den Seiten „Kopf" und „Zahl") geworfen. Es bezeichne p die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Münzen nach dem Wurf dieselbe Seite zeigen (d.h. alle drei zeigen „Kopf" oder alle drei zeigen „Zahl").

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis" nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Es ist $p = 1/2$.

   Beweis. Von den drei geworfenen Münzen müssen zwei dieselbe Seite zeigen (nach dem Schubfachprinzip). Die verbleibende Münze zeigt mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ „Zahl". Also liegt die verbleibende Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf derselben Seite wie die anderen beiden Münzen, und damit erhalten wir $p = 1/2$. □

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit p (und erklären Sie Ihr Modell).

Aufgabe 3 (Mutiple-Choice-Klausuren)**.** Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichne p_n die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger, gleichverteilter, Auswahl der Antworten „Ja" bzw. „Nein" in einer Multiple-Choice-Klausur mit n Ja/Nein-Fragen mindestens die Hälfte der Fragen korrekt beantwortet wird.

1. Modellieren Sie diese Situation durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Wie lässt sich p_n in Ihrem Modell ausdrücken?
2. Bestimmen Sie zu $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit p_n.

   Hinweis. Verwenden Sie ein geeignetes Symmetrieargument.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Eindeutigkeitssatz für Maße)**.** Sei (Ω, S) ein messbarer Raum, sei $T \subset \operatorname{Pot}(\Omega)$ ein schnitt-stabiles Erzeugendensystem der σ-Algebra S, und seien $P, Q \colon S \longrightarrow [0,1]$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf (Ω, S) mit $P|_T = Q|_T$. Zeigen Sie, dass dann $P = Q$ folgt. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, was ein *Dynkin-System* ist.
2. Zeigen Sie, dass
$$\widetilde{T} := \bigl\{A \in S \bigm| P(A) = Q(A)\bigr\} \subset \operatorname{Pot}(\Omega)$$
ein Dynkin-System auf Ω ist.
3. Zeigen Sie, dass das bezüglich Inklusion kleinste Dynkin-System auf Ω, das das schnitt-stabile System T enthält, mit der von T erzeugten σ-Algebra S auf Ω übereinstimmt.
4. Folgern Sie, dass $S \subset \widetilde{T}$ ist, und dass somit $P = Q$ gilt.

Bonusaufgabe (Das Maßproblem)**.** Commander Blorx geht neuerdings einer lukrativen Nebenbeschäftigung nach – er wurde als externer Berater der galaktischen Steuerbehörde angeheuert (Abteilung „Versicherungen, Glücksspiel und sonstige Wahrsagerei“).

Bei einer rein dienstlichen und zufälligen Visite im Casino *Il Vita* auf dem Planet Merkur stellt Blorx fest, dass das Casino mit einem fairen unendlichen Münzwurf und höchstauflösender Präzision bei der Bestimmung der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten wirbt.

Genauer ist im Kleingedruckten nachzulesen, dass das Casino ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $\bigl(\prod_{\mathbb{N}}\{0,1\}, \operatorname{Pot}(\prod_{\mathbb{N}}\{0,1\})\bigr)$ verwendet, das die folgende Eigenschaft besitzt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $A \subset \prod_{\mathbb{N}}\{0,1\}$ ist
$$P\bigl(\operatorname{flip}_n(A)\bigr) = P(A),$$
wobei
$$\begin{aligned} \operatorname{flip}_n \colon \prod_{\mathbb{N}}\{0,1\} &\longrightarrow \prod_{\mathbb{N}}\{0,1\} \\ (\omega_k)_{k\in\mathbb{N}} &\longmapsto \begin{cases} \omega_k & \text{falls } k \neq n \\ 1 - \omega_k & \text{falls } k = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Commander Blorx zückt das Auswahlaxiom, murmelt etwas von Repräsentantensystemen von Äquivalenzrelationen und stellt fest, dass es in diesem Casino nicht mit rechten Dingen zugehen kann.

Bestätigen Sie dies, indem Sie mithilfe des Auswahlaxioms zeigen, dass es ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß P tatsächlich nicht geben kann.

Abgabe bis zum 26. April 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen