Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 10 vom 21. Juni 2012

Aufgabe 1 (stochastische Konvergenz)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$ und ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, so folgt $a_n \cdot X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$.
2. Gilt $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$ und $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$, so folgt $X_n + Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$.

Aufgabe 2 (Approximation des Erwartungswerts)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge von $B(1,1/2)$-verteilten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$p_n := P\Bigl(\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^n X_k = \frac{1}{2}\Bigr).$$

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Es gilt $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$.

   Beweis. Das schwache Gesetz der großen Zahlen ist auf die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ anwendbar und $E(B(1,1/2)) = 1/2$. Inbesondere erhalten wir somit

   $$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\Bigl(\Bigl|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{2}\Bigr| < \frac{1}{m}\Bigr) &= 1 - \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} P\Bigl(\Bigl|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{2}\Bigr| \geq \frac{1}{m}\Bigr)\\ &= 1 - \lim_{m\to\infty} 0\\ &= 1.\end{aligned}$$

   Wegen

   $$p_n = \lim_{m\to\infty} P\Bigl(\Bigl|\frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^n X_k - \frac{1}{2}\Bigr| < \frac{1}{m}\Bigr)$$

   für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ folgt die Behauptung. □

2. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} p_n < 1$.

Aufgabe 3 (normalisierte Summen)**.** Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge von Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum, deren Wahrscheinlichkeitsverteilung jeweils die diskrete Gleichverteilung auf $\{-1,1\}$ ist. Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $S_n := 1/n \cdot \sum_{k=1}^n X_k$.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass die Verteilung von S_n durch eine Zähldichte gegeben ist und bestimmen Sie diese.

2. Skizzieren Sie diese Zähldichten von $S_1, \ldots, S_4$.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (terminale Ereignisse)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P). Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

1. Ist
$$\bigl\{\omega \in \Omega \bigm| (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert}\bigr\}$$
ein bezüglich $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terminales Ereignis?

2. Ist
$$\Bigl\{\omega \in \Omega \Bigm| (X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert und } \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = 1\Bigr\}$$
ein bezüglich $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terminales Ereignis?

Bonusaufgabe (harmonische Primzahlen)**.** Die pansolare Partei für Astro- und Numerologie kämpft für mehr Gerechtigkeit und Unabhängigkeit für natürliche Zahlen. Insbesondere verlangt sie die Einrichtung eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P auf $(\mathbb{N}, \operatorname{Pot}(\mathbb{N}))$ mit den folgenden Eigenschaften:

– Jede Primzahl soll sich gemäß ihrer persönlichen und individuellen Fähigkeiten entfalten können, d.h.
$$P(p \cdot \mathbb{N}) = \frac{1}{p}$$
für alle Primzahlen $p \in \mathbb{N}$.

– Alle Primzahlen sollen in vollkommener Freiheit agieren können, d.h. die Familie $(p \cdot \mathbb{N})_{p\in\mathbb{N}\text{ prim}}$ ist bezüglich P stochastisch unabhängig.

Commander Blorx zählt fix dies und das zusammen und zieht das folgende Fazit: „Das ist ganz entsetzlich tragisch, aber ein solches Wahrscheinlichkeitsmaß kann es bedauerlicherweise nicht geben.“

Wie kann Commander Blorx dies beweisen?
