Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 11 vom 28. Juni 2012

Aufgabe 1 (Konvergenz von Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge von reellwertigen Zufallsvariablen auf (Ω, S, P). Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gelte dabei $P_{X_n} = B(1, 1/n)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert stochastisch gegen eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P).
2. Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert fast sicher gegen eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P).

   Hinweis. Man kann hierfür das Lemma von Borel-Cantelli verwenden.

Aufgabe 2 (Verteilungskonvergenz)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter quadratintegrierbarer reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) mit $\operatorname{Var}(X_1) \neq 0$ und sei X eine $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariable auf (Ω, S, P).

Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt ist, und geben Sie ein Beispiel an das zeigt, dass die Behauptung nicht korrekt ist.

Behauptung. Dann gilt $-X + \frac{1}{\sqrt{n\cdot\operatorname{Var}(X_1)}} \cdot \sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} 0$.

Beweis. Da der zentrale Grenzwertsatz auf die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ anwendbar ist, erhalten wir $\frac{1}{\sqrt{n\cdot\operatorname{Var}(X_1)}} \cdot \sum_{k=1}^{n}(X_k - E(X_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} X$. Indem wir nun auf beiden Seiten X subtrahieren, folgt die Behauptung. □

Aufgabe 3 (Macht entschlossener/bestochener Minderheiten)**.** Das Volk von Corruptia bestehe aus $n \in \mathbb{N}_{>0}$ wahlberechtigten Bürgern. Bei der nächsten Präsidentenwahl stehen die Kandidaten A und B zur Wahl. Kandidat A hat in ein günstiges Wahlergebnis investiert, indem er 0.2 Prozent der Wahlberechtigten bestochen hat (die bei der Wahl für ihn stimmen werden). Die restlichen Wahlberechtigten sind unschlüssig, welcher der beiden Kandidaten das kleinere Übel ist, und treffen ihre Entscheidung daher durch den Wurf einer fairen Münze; all diese Münzwürfe sind dabei voneinander unabhängig.

1. Modellieren Sie diese Situation geeignet. Beschreiben Sie insbesondere das Ereignis „Kandidat A gewinnt die Wahl“ in Ihrem Modell.
2. Bestimmen Sie für $n \to \infty$ eine geeignete Normalapproximation für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Kandidat A unter diesen Bedingungen die Wahl gewinnt.
3. Wie lautet dieser approximative Wert für $n = 10^6$?

   Hinweis. Verwenden Sie eine geeignete Quantil-Tabelle.
4. Kann man aus Ihrem Ergebnis aus Teil 3 einen Schluss auf den exakten Wert im Fall $n = 10^6$ ziehen?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (stochastische Konvergenz vs. Verteilungskonvergenz)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P).

1. Zeigen Sie: Falls die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen X konvergiert, so konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X.

2. Zeigen Sie: Falls die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X konvergiert, so konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im allgemeinen *nicht* stochastisch gegen X.

Bonusaufgabe (normale Zahlen?)**.** Auf einem Bazar bietet der Händler El Rob reelle Zahlen feil: „Exklusives Sonderangebot – echte Seltenheit! Nur hier gibt es die ausgewogensten und perfektesten reellen Zahlen! Greifen Sie zu, solange es diese sensationellen und einzigartigen Exemplare noch gibt!“

Commander Blorx wird hellhörig und inspiziert das Angebot etwas genauer; El Rob verspricht im Kleingedruckten, dass für die Dezimalbruchentwicklung seiner Unikate $x \in [0, 1]$ folgendes gilt:

Für jedes $k \in \mathbb{N}_{>0}$ tritt jede Ziffernfolge $z \in \{0, \dots, 9\}^k$ der Länge k in der Dezimalbruchentwicklung $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 10^{-n}$ (wobei $a_1, \dots \in \{0, \dots, 9\}$) mit relativer Häufigkeit $1/10^k$ auf, d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\big\{j \in \{1, \dots, n\} \;\big|\; (x_j, \dots, x_{j+k-1}) = z\big\}}{n} = \frac{1}{10^k}.$$

Nach kurzem Überlegen (und nachdem er dieses Mal nicht wieder falsch mit Wurzeln rechnet …) kommt Blorx zu folgendem Schluss: „Pah! Was für ein schäbiger Betrüger – das sind doch stinknormale Zahlen: Zufällig gleichverteilt ausgewählte Zahlen aus $[0, 1]$ haben nämlich fast sicher diese Eigenschaft.“

Beweisen Sie die Behauptung von Blorx.

Abgabe bis zum 5. Juli 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen