Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 12 vom 5. Juli 2012

Aufgabe 1 (statistische Modelle)**.** Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und sei $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt einen erwartungstreuen Schätzer von τ auf $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$.
2. Sind $T, T'\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ erwartungstreue Schätzer von τ und ist $\vartheta \in \Theta$, so folgt $(P_\vartheta)_T = (P_\vartheta)_{T'}$.

Aufgabe 2 (Messfehler)**.** Bei einem physikalischen Experiment werde eine reellwertige Größe gemessen. Die Messergebnisse seien normalverteilt mit bekannter Varianz $c \in \mathbb{R}_{>0}$ (diese entspricht der Messungenauigkeit) und es sei möglich, das Experiment eine gewünschte Anzahl von Wiederholungen unabhängig erneut durchzuführen.

1. Geben Sie ein passendes statistisches Modell für diese Situation an!
2. Welche Größe in Ihrem Modell entspricht dem gesuchten tatsächlichen Wert der reellwertigen Größe?

Aufgabe 3 (Stichprobenmittel)**.** Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell, wobei P_ϑ für alle $\vartheta \in \Theta$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ mit existierender Varianz sei.

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass das *Stichprobenmittel*
$$\begin{aligned} S_n\colon \Omega^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \omega_k \end{aligned}$$
ein erwartungstreuer Schätzer auf dem Produktmodell $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})^{\otimes\mathbb{N}}$ für den Erwartungswert $\Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto E(P_\vartheta)$ ist.
2. Sei $\vartheta \in \Theta$. Konvergiert $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ dann $P_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}$-fast sicher?

Aufgabe 4 (Stichprobenvarianz)**.** Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell, wobei P_ϑ für alle $\vartheta \in \Theta$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ mit existierender Varianz sei. Sei $V\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto \operatorname{Var}(P_\vartheta)$ und zu $n \in \mathbb{N}_{>1}$ sei

$$\begin{aligned} V_n\colon \Omega^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \bigl(\omega_k - S_n(\omega)\bigr)^2, \end{aligned}$$

wobei S_n das in Aufgabe 3 definierte Stichprobenmittel ist.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Dann ist V_n ein erwartungstreuer Schätzer für V auf dem Produktmodell $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})^{\otimes\mathbb{N}}$.

   Beweis. Sei $\vartheta \in \Theta$. Offensichtlich ist V_n bezüglich $S^{\otimes\mathbb{N}}$ und $B(\mathbb{R})$ messbar und bezüglich $P_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}$ integrierbar (da die Varianz von P_ϑ existiert). Ist $k \in \{1, \dots, n\}$, so erhalten wir aus Aufgabe 3, dass $E_{P_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}} S_n = E(P_\vartheta) = E_{P_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}}(\pi_k)$, und damit

   $$E_{P_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}}\bigl((\pi_k - S_n)^2\bigr) = \operatorname{Var}_{P_\vartheta^{\otimes\mathbb{N}}}(\pi_k) = \operatorname{Var}(P_\vartheta)$$

   (wobei $\pi_k\colon \Omega^n \longrightarrow \Omega$ die Projektion auf die k-Komponente ist). Mit der Linearität des Erwartungswerts folgt somit die Behauptung. □

2. Geben Sie (unter geeigneten Integrierbarkeitsbedingungen) eine konsistente Folge erwartungstreuer Schätzer für V auf $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})^{\otimes\mathbb{N}}$ an.

Bonusaufgabe (zentraler Grenzwertsatz via Fouriertransformation)**.** Commander Blorx ist die Taylorapproximation im Beweis des zentralen Grenzwertsatzes reichlich suspekt. Statt zu Differenzieren würde er lieber Integrieren und sucht daher nach einem alternativen Beweis des zentralen Grenzwertsatzes mithilfe von Fouriertransformation.

Suchen Sie in der Literatur einen Beweis des zentralen Grenzwertsatzes mithilfe von Fouriertransformation, geben Sie die exakte Definition dieser Fouriertransformation und skizzieren Sie kurz die groben Schritte des Beweises des zentralen Grenzwertsatz mithilfe von Fouriertransformation!

Abgabe bis zum 12. Juli 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen