Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 13 vom 12. Juli 2012

Aufgabe 1 (Exponentialfamilien)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $\big(\mathbb{N}, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}), (\mathrm{Poi}(\vartheta))_{\vartheta\in\mathbb{R}_{>0}}\big)$ eine Exponentialfamilie?
2. Sei $a \in \mathbb{R}$. Ist $\big(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), (N(a, \vartheta^2))_{\vartheta\in\mathbb{R}_{>0}}\big)$ eine Exponentialfamilie?

Aufgabe 2 (Eindeutigkeit gleichmäßig bester Schätzer)**.** Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und seien $T, \widetilde{T}\colon (\Omega, S) \longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ gleichmäßig beste erwartungstreue Schätzer für eine Abbildung $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Für alle $\vartheta \in \Theta$ gilt dann $P_\vartheta(T = \widetilde{T}) = 1$.

Aufgabe 3 (Maximum-Likelihood-Schätzer for Poisson-Verteilungen)**.** Wir betrachten das statistische Modell $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$, wobei $\Omega := \mathbb{N}$, $S := \mathrm{Pot}(\Omega)$, $\Theta := \mathbb{R}_{>0}$ und $P_\vartheta := \mathrm{Poi}(\vartheta)$ für $\vartheta \in \Theta$ ist.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt ist und erklären, warum die Behauptung nicht korrekt ist.

   Behauptung. Dann ist

   $$\begin{aligned} T\colon \Omega &\longrightarrow \Theta \\ \omega &\longmapsto \omega \end{aligned}$$

   ein Maximum-Likelihood-Schätzer für id_Θ (bezüglich der offensichtlichen Zähldichten und der Borel-σ-Algebra auf $\Theta = \mathbb{R}_{>0}$).

   Beweis. Offensichtlich ist T bezüglich S und $B(\mathbb{R})$ messbar. Es bleibt also zu zeigen, dass T das entsprechende Maximierungsproblem löst: Die entsprechende Likelihoodfunktion ist

   $$\begin{aligned} L\colon \Omega \times \Theta &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (\omega, \vartheta) &\longmapsto e^{-\vartheta} \cdot \frac{\vartheta^\omega}{\omega!}. \end{aligned}$$

   Sei $\omega \in \Omega$. Indem man $\ln \circ L(\omega, \cdot\,)$ differenziert und die Methoden der reellen Analysis zur Lösung von Extremwertproblemen anwendet, sieht man, dass die einzige Maximalstelle von $\ln \circ L(\omega, \cdot\,)$ bzw. $L(\omega, \cdot\,)$ an der Stelle $\vartheta = \omega$ liegt. Damit folgt die Behauptung. □

2. Wie kann man die obige Situation so modifizieren, dass die der in der Behauptung angegebenen entsprechende Abbildung ein Maximum-Likelihood-Schätzer für die Identitätsabbildung ist?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (German Tank Problem)**.** Wir betrachten das statistische Modell $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ für das German Tank Problem, das wie folgt gegeben ist: Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ (die beobachtete Anzahl der Seriennummern), sei

$$\Omega := \binom{\mathbb{N}_{>0}}{n}, \qquad S := \mathrm{Pot}(\Omega), \qquad \Theta := \mathbb{N}_{\geq n},$$

und für alle $\vartheta \in \Theta$ bezeichne P_ϑ die Gleichverteilung auf $\binom{\{1,\dots,\vartheta\}}{n}$. Hierbei schreiben für eine Menge A kurz $\binom{A}{n} := \left\{B \subset A \;\middle|\; |B| = n\right\}$ für die Menge der n-elementigen Teilmengen von A.

1. Zeigen Sie, dass es für das Modell $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ einen Maximum-Likelihood-Schätzer (bezüglich der offensichtlichen Zähldichten und der σ-Algebra $\mathrm{Pot}(\Theta)$ auf Θ) gibt und bestimmen Sie einen solchen.

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{N}_{\geq r}$ gilt

$$\sum_{m=r}^{s} m \cdot \frac{\binom{m-1}{r-1}}{\binom{s}{r}} = \frac{r\cdot(s+1)}{r+1}.$$

3. Ist Ihr Maximum-Likelihood-Schätzer aus dem ersten Aufgabenteil ein erwartungstreuer Schätzer für die Inklusion $\Theta \hookrightarrow \mathbb{R}$?

4. Bestimmen Sie einen (weiteren) erwartungstreuen Schätzer für die Inklusion $\Theta \hookrightarrow \mathbb{R}$.

Bonusaufgabe (Modellbau)**.** Da Commander Blorx nicht jünger wird und demnächst in Rente geht, möchte er sich ein bizarres Hobby für seinen Ruhestand zulegen. Seine Wahl fällt dabei auf Modellbau. Helfen Sie Commander Blorx bei der Modellierung der folgenden Probleme!

1. Commander Blorx möchte sich mit einem Freund aus der Studienzeit treffen. Beide nehmen es mit der Pünktlichkeit nicht so genau und werden daher (jeweils unabhängig voneinander, gleichverteilt) innerhalb von einer Stunde nach der verabredeten Zeit am vereinbarten Treffpunkt eintrudeln. Da beide etwas ungeduldig sind, werden sie aber nicht länger als 10 Minuten auf den jeweils anderen warten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie sich tatsächlich treffen?

2. Was ist eine vernünftige Approximation für die Anzahl der Tipfehler pro Seite in der Encyclopedia Blorxica?

3. Ein von Commander Blorx ausgesetzter Schachkönig steht auf einem unendlich breiten und unendlich langen (ansonsten leeren) Schachbrett. In jedem Zug bewegt er sich zufällig gleichverteilt ein Feld in eine der zulässigen acht Richtungen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kehrt er nach einer endlichen Anzahl von Zügen zu seinem Ausgangsfeld zurück?

4. Wie kann Commander Blorx abschätzen, ob der „garantiert faire“ Würfel, den er von einem dubiosen Casinobetreiber erhalten hat, tatsächlich fair ist?

Hinweis. Es genügt, die jeweiligen wahrscheinlichkeitstheoretischen bzw. statistischen Modelle anzugeben und kurz zu begründen; es geht *nicht* darum, die entsprechenden Probleme tatsächlich zu lösen.

---

keine Abgabe; Lösungshinweise werden zu Beginn der vorlesungsfreien Zeit zur Verfügung gestellt