Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 14 vom 19. Juli 2012

Es ist soweit – Commander Blorx geht in den Ruhestand. Ob das für das Universum als solches wirklich ein Grund zum Aufatmen ist, sei dahingestellt; die Vorstellung, dass Blorx nun noch mehr Freizeit hat, mag nicht nur beruhigend erscheinen. Da Blorx nicht einsieht, dass er mehr als nötig arbeitet und lieber pünktlich zum von ihm nicht ganz unmanipulierten vorzeitigen Renteneintrittsalter jegliche Stifte fallen lässt, hinterlässt er die folgenden Aufgaben für seinen potentiellen Nachfolger:

Bonusaufgabe (χ^2-Verteilungen und t-Verteilungen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \chi_{(0,\infty)}(x) \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2}) \cdot 2^{n/2}} \cdot x^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto \frac{1}{\sqrt{n} \cdot B(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \cdot \Bigl(1 + \frac{x^2}{n}\Bigr)^{-\frac{n+1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \Bigl(1 + \frac{x^2}{n}\Bigr)^{-\frac{n+1}{2}} \end{aligned}$$

wirklich λ^1-Wahrscheinlichkeitsdichten auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ sind und schlagen Sie in der Literatur die vielfältigen Beziehungen (samt Beweisen) zu den Normalverteilungen nach.

Bonusaufgabe (Konfidenzbereiche vs. Alternativtests)**.** Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta \in \Theta})$ ein statistisches Modell, sei $\vartheta_0 \in \Theta$, sei $\Theta_0 := \{\vartheta_0\}$, sei $\Theta_1 := \Theta \setminus \{\vartheta_0\}$ und sei $\alpha \in (0, 1)$.

1. Sei $C \colon \Omega \longrightarrow \operatorname{Pot}(\Theta)$ ein Konfidenzbereich für id_Θ zum Irrtumsniveau α. Zeigen Sie, dass es dann einen Test $T \colon \Omega \longrightarrow [0, 1]$ von Θ_0 gegen Θ_1 zum Irrtumsniveau α mit $T^{-1}(\{1\}) = \{\omega \in \Omega \mid \vartheta_0 \notin C(\omega)\}$ gibt.

2. Zeigen Sie: Aus jedem nicht-randomisierten Test von Θ_0 gegen Θ_1 zum Irrtumsniveau α lässt sich ein Konfidenzbereich für id_Θ zum Irrtumsniveau α konstruieren.

Bonusaufgabe (Realitätscheck, Stufe 1)**.** Lösen Sie alle (Anwendungs-)Aufgaben zu Alternativtestproblemen und zu Konfidenzbereichen in einem Statistikbuch Ihrer Wahl!

Bonusaufgabe (Realitätscheck, Stufe 2)**.** Lesen Sie eine Tageszeitung Ihrer Wahl und machen Sie sich klar, an welchen Stellen und wie Wahrscheinlichkeitstheorie bzw. Statistik eingeht und ob die Methoden dort sinnvoll eingesetzt und interpretiert wurden.

Keine Abgabe. Wir wünschen Ihnen schöne Semester„ferien“!