Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 2 vom 26. April 2012

Aufgabe 1 (Simulation von Verteilungen durch Zufallsvariablen)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Mit einem fairen Würfelwurf kann man zwei faire Münzwürfe simulieren.
2. Mit zwei fairen Würfelwürfen kann man einen Wurf mit einem fairen Viererwürfel (Tetraeder) simulieren.

Aufgabe 2 (Summen von Zufallsvariablen)**.**

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien X und Y reelle Zufallsvariablen auf (Ω, S, P). Zeigen Sie, dass dann auch

$$\begin{aligned} X + Y \colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto X(\omega) + Y(\omega) \end{aligned}$$

   eine reelle Zufallsvariable auf (Ω, S, P) ist.

   Hinweis. Zerlegen Sie $X+Y$ in eine Komposition geeigneter Abbildungen $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und zeigen Sie dann mithilfe von Aufgabe 1 von Blatt 1 und Aufgabe 4 von Blatt 0, dass diese beiden Abbildungen messbar sind.

2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien X_1, X_2, und Y reelle Zufallsvariablen auf (Ω, S, P), wobei X_1 und X_2 identisch verteilt seien. Zeigen Sie, dass X_1+Y und X_2+Y im allgemeinen *nicht* identisch verteilt sind.

Aufgabe 3 (Verteilungsfunktionen von diskreten Verteilungen)**.** Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist und ein Gegenbeispiel angeben, das zeigt, dass die Behauptung nicht korrekt ist.

Behauptung. Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ und sei

$$U := \big\{x \in \mathbb{R} \;\big|\; P(\{x\}) \neq 0\big\}.$$

Dann ist U nicht dicht in $\mathbb{R}$.

Beweis. Die Verteilungsfunktion $F_P \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ von P ist monoton wachsend und nach den Eigenschaften von Verteilungsfunktionen ist

$$U = \{x \in \mathbb{R} \mid F_P \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\};$$

da F_P monoton ist, kann aber die rechte Menge nicht dicht in $\mathbb{R}$ liegen. Also ist auch U nicht dicht in $\mathbb{R}$. □

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Mehr Söhne?)**.** In Monarchia bekommen Eltern so lange Kinder, bis sie einen Sohn (als würdigen Erben!) zur Welt bringen. Es ist außerdem bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kind männlich oder weiblich wird gleich groß ist, dass es keine Mehrlingsgeburten gibt, und dass Elternpaare nach N Töchtern aufgeben (wobei $N \in \mathbb{N}_{>0}$ durch die aktuellen Steuergesetze in Monarchia bestimmt wird).

1. Modellieren Sie diese Situation mithilfe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraumes (Ω_N, S_N, P_N) und zweier reellwertiger Zufallsvariablen X_N bzw. Y_N auf (Ω_N, S_N, P_N), die die Anzahl der Töchter bzw. Söhne von Familien in Monarchia repräsentieren.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Familie in Monarchia mindestens so viele Söhne wie Töchter hat.

3. Was ist $\sum_{k=-1}^{N} k \cdot P_N\big(\{X_N - Y_N = k\}\big)$? Interpretieren Sie dieses Ergebnis!

   Hinweis. Verwenden Sie analytische Methoden (Differentiattion ...), um die auftretenden Summen zu berechnen.

Bonusaufgabe (Zufälliges Durcheinander)**.** Der Mäzen Mr. Anti-Toupe lädt wie jedes Jahr seine 2012 besten Freunde (jeweils samt ihrer bezaubernden Gattin) aus Politik und Wirtschaft zu seiner berüchtigten Geburtstagsfeier ein. Commander Blorx wurde – nicht nur mangels adäquater weiblicher Begleitung – erneut nicht in diesen erlauchten Kreis aufgenommen. Um der Feier trotz seiner eigentlich vorgesehenen Abwesenheit dennoch einen Hauch von Leben einzuhauchen, beschließt Blorx, sich inkognito, als Ober verkleidet, um die alkoholische Versorgung der Gäste zu kümmern.

Zum Ende der Feier sind alle Gäste so stark alkoholisiert, dass die Herren ihre Damen nicht mehr erkennen können und umgekehrt. Damit keiner der Herren alleine nach Hause muss, schlägt Anti-Toupe vor, die Damen einfach mit einer zufälligen Permutation auf die Herren zu verteilen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass keiner der 2012 Gäste seine eigene Frau mit nach Hause nimmt?

Abgabe bis zum 3. Mai 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen