Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 3 vom 3. Mai 2012

Aufgabe 1 (Erwartungswert und Median)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ reellwertige integrierbare Zufallsvariablen auf (Ω, S, P). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $E(X) = E(Y)$, so haben X und Y denselben Median.
2. Ist $E(X) = E(Y)$ und haben X und Y denselben Median, so sind X und Y identisch verteilt.

Aufgabe 2 (Mutationen)**.** Bei einem mikrobiologischen Experiment wird gezählt wieviele Mutationen der DNA pro Zelle auftreten; durch eine geeignete statistische Auswertung wird dabei festgestellt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt keine Mutation in einer Zelle auftritt, gleich 0.1 ist.

Sie können annehmen, dass die Anzahl der Mutationen der DNA pro Zelle einer Poisson-Verteilung entspricht.

1. Bestimmen Sie aus den obigen Daten den Parameter dieser Poisson-Verteilung und den Erwartungswert dieser Poisson-Verteilung.
2. Zeigen Sie mithilfe der Markov-Ungleichung, dass die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Zelle mindestens 10 Mutationen auftreten, kleiner als 1/4 ist. Ist dies eine gute Abschätzung?

Hinweis. Wir werden später begründen, warum es gerechtfertigt ist, diese Situation durch eine Poisson-Verteilung zu modellieren.

Aufgabe 3 (Inklusion/Exklusion)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und seien $A_1, \dots, A_n \in S$.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist und ein Gegenbeispiel angeben, das zeigt, dass die Behauptung nicht korrekt ist.

   Behauptung. In obiger Situation gilt

   $$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - \prod_{j \in \{1,\dots,n\}} \bigl(1 - P(A_j)\bigr).$$

   Beweis. Mit den Eigenschaften des Erwartungswerts erhalten wir (da die betrachteten Funktionen offensichtlich bezüglich P integrierbar sind)

   $$\begin{aligned} P(A_1 \cup \dots \cup A_n) &= E(\chi_{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = E\Bigl(1 - \prod_{j \in \{1,\dots,n\}} (1 - \chi_{A_j})\Bigr) \\ &= E(1) - \prod_{j \in \{1,\dots,n\}} E(1 - \chi_{A_j}) \\ &= 1 - \prod_{j \in \{1,\dots,n\}} \bigl(1 - P(A_j)\bigr). \end{aligned}$$ ☐

2. Wie kann man $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$ durch $\bigl(P(\bigcap_{j \in J} A_j)\bigr)_{J \subset \{1,\dots,n\}}$ ausdrücken?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Integration auf Wahrscheinlichkeitsräumen)**.** Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P).

1. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei
$$T_n := \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n - 1} \frac{k}{2^n} \cdot \chi_{|X|^{-1}([k/2^n,(k+1)/2^n))} \cdot \chi_{|X|^{-1}([0,n))} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie, dass die Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton wachsend ist und punktweise gegen $|X|$ konvergiert.

2. Zeigen Sie mithilfe der Definition von Integrierbarkeit und dem ersten Teil: Ist X beschränkt, so ist X bezüglich P integrierbar.

3. Sei X bezüglich P integrierbar. Ist dann X bereits P-fast überall beschränkt, d.h. gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $P(\{|X| > c\}) = 0$?

4. Zeigen Sie: Ist X^2 bezüglich P integrierbar, so ist auch X bezüglich P integrierbar.

Bonusaufgabe (Höhere Momente)**.** Salbo Schleck behauptet, dass er eine reellwertige Zufallsvariable X auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum mit einer völlig neuartigen Wahrscheinlichkeitsverteilung entdeckt hat. Unter anderem ist er davon überzeugt, dass er damit die zukünftigen Lotto-Zahlen, die Bewegung der Aktienmärkte und das Wetter in Lampukistan präzise vorhersagen kann, und beantragt daher ein Patent auf diese Verteilung.

Die galaktische Steuerbehörde hat jedoch Zweifel an Schlecks Behauptung, dass es sich dabei wirklich um eine bisher unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung handelt, und schickt daher Commander Blorx ins Rennen.

Blorx möchte Schleck auf den Zahn fühlen und verlangt, mehr über diese Wahrscheinlichkeitsverteilung zu erfahren. Da Schleck seine eierlegende Wollmilchverteilung nicht im Detail preisgeben möchte, verrät er Blorx nur die Folge $(E(X^k))_{k\in\mathbb{N}}$.

„Moment mal!“ sagt Blorx und zückt eine altbekannte reellwertige Zufallsvariable Y auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum, mit der Eigenschaft, dass $E(Y^k) = E(X^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt. „Ergo“, fährt er fort, „sind X und Y identisch verteilt, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X somit ein alter Hut!“

Zeigen Sie, dass X und Y unter diesen Voraussetzungen tatsächlich identisch verteilt sind.

Hinweis. Wenn Sie möchten können Sie annehmen, dass die beiden Zufallsvariablen nur positive Werte annehmen. Betrachten Sie dann geeignete Quotienten von $E(X^k)$ für $k \to \infty$ (und analog für Y) ...

Abgabe bis zum 10. Mai 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen