Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank | Blatt 4 vom 10. Mai 2012

Aufgabe 1 (Varianz)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind X und Y quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum mit $X \leq Y$, so ist $\operatorname{Var}(X) \leq \operatorname{Var}(Y)$.
2. Sind X und Y zwei quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariablen mit $E(X) = E(Y)$ und sind X^2 und Y^2 identisch verteilt, so folgt bereits $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(Y)$.

Aufgabe 2 (Auswertung von Klausurergebnissen)**.** Die (der Einfachheit halber gerundeten) Klausurergebnisse zur Klausur Analysis I im Sommersemester 2011 waren:

Note	1	2	3	4	5
Anzahl	7	8	18	21	81

1. Modellieren Sie diese Verteilung durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum bzw. eine geeignete Zufallsvariable.
2. Bestimmen Sie den Median dieser Verteilung.
3. Bestimmen Sie den Erwartungswert dieser Verteilung.
4. Bestimmen Sie die Standardabweichung dieser Verteilung.

Aufgabe 3 (Varianz und Skalierung)**.** Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist und ein Gegenbeispiel angeben, das zeigt, dass die Behauptung nicht korrekt ist.

Behauptung. Sei X eine quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariable und sei $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann ist

$$\operatorname{Var}\Big(\frac{a-1}{a} \cdot X\Big) = \Big(1 + \frac{1}{a^2}\Big) \cdot \operatorname{Var}(X).$$

Beweis. Mit den grundlegenden Eigenschaften der Varianz folgt

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\Big(\frac{a-1}{a} \cdot X\Big) &= \operatorname{Var}\Big(\Big(1 - \frac{1}{a}\Big) \cdot X\Big) \\ &= \operatorname{Var}\Big(X - \frac{1}{a} \cdot X\Big) \\ &= \operatorname{Var}(X) + \frac{1}{a^2} \cdot \operatorname{Var}(X) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{a^2}\Big) \cdot \operatorname{Var}(X),\end{aligned}$$

wie behauptet. $\square$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Exponentialverteilung)**.** Zu $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} f_\lambda \colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot \chi_{\mathbb{R}_{\geq 0}}(x). \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass f_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda^1)$ ist (s.u.); die von f_λ induzierte Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ heißt *Exponentialverteilung zum Parameter* λ (und wird häufig zur Modellierung von Wartezeiten verwendet).

1. Zeigen Sie, dass f_λ eine Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \lambda^1)$ ist.
2. Bestimmen Sie den Erwartungswert der Exponentialverteilung zum Parameter λ.
3. Bestimmen Sie die Varianz der Exponentialverteilung zum Parameter λ.
4. Zeigen Sie allgemeiner: Ist X eine reellwertige Zufallsvariable, die exponentialverteilt ist (mit Parameter λ), so ist X^k für jedes $k \in \mathbb{N}$ integrierbar, und bestimmen Sie $E(X^k)$ in Abhängigkeit von λ.

Bonusaufgabe (Wartezeiten)**.** Commander Blorx ist auf dem intergalaktischen Highway unterwegs. Als Verkehrsberuhigungsmaßnahme wurden auf diesem Highway an ausgewählten Stellen Ampeln errichtet. Trotz deutlich überhöhter Geschwindigkeit von Blorx ist ein passionierter Lichthuper hinter Blorx dicht aufgerückt. Als Blorx und sein Verfolger zu einer der besagten Ampeln gelangen, haben sich auf den beiden verfügbaren Spuren bereits ansehnliche Warteschlangen gebildet.

Der ungeduldige Verfolger wählt nicht dieselbe Spur wie Blorx und morst mit seinen Scheinwerfern „Hähä, hier geht es garantiert viel schneller und dann bin ich Dich Schleichschnecke endgültig los!“. Blorx winkt freundlich lächelnd zurück und morst „Ich kann nur empfehlen, den Erwartungswert des Quotienten der Wartezeiten für die beiden Warteschlangen zu untersuchen.“

Nachdem der Bordcomputer des Verfolgers selbigem mit einer freundlichen Frauenstimme das Ergebnis der entsprechenden Berechnung vorgesäuselt hat, platzt der Verfolger vor Wut.

Untersuchen Sie die Erwartungswerte der beiden Quotienten der Wartezeiten für die Warteschlangen!

Hinweis. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Sei $\Omega := (\mathbb{R}_{>0})^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Betrachten Sie die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} \Omega = (\mathbb{R}_{>0})^2 &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (x, y) &\longmapsto f_\lambda(x) \cdot f_\lambda(y) \end{aligned}$$

auf $(\Omega, B(\Omega), \lambda^2|_\Omega)$, wobei f_λ wie in Aufgabe 4 definiert sei. Modellieren Sie dann die Wartezeiten in den beiden Schlangen durch die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} X \colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} & \qquad Y \colon \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x, & (x, y) &\longmapsto y \end{aligned}$$

und untersuchen Sie, ob X/Y bzw. Y/X einen (endlichen) Erwartungswert besitzen ... Interpretieren Sie das Ergebnis!

Abgabe bis zum *Freitag, den 18. Mai 2012, 10:00 Uhr*, in die Briefkästen