

Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank

Blatt 5 vom 17. Mai 2012

Aufgabe 1 (klassische Verteilungen). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, die $\text{Poi}(2012)$ -verteilt ist. Dann ist $1/2 \cdot X$ eine $\text{Poi}(1006)$ -verteilte reellwertige Zufallsvariable.
2. Es gibt eine reellwertige Zufallsvariable auf $([0, 1], B([0, 1]), \lambda^1|_{[0,1]})$, deren induzierte Verteilung die Standardnormalverteilung $N(0, 1)$ ist.

Aufgabe 2 (Poisson-Approximation der Binomialverteilung). Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[0, 1]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot p_n = \lambda$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, p_n)(\{k\}) = \text{Poi}(\lambda)(\{k\})$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (Kombinatorik – Urnenmodelle). Schlagen Sie in der Literatur die vier Standardurnenmodelle (mit/ohne Zurücklegen bzw. mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge) nach, erklären Sie diese kurz und übersichtlich und geben Sie jeweils ein passendes Beispiel.

Aufgabe 4 (Kombinatorik – Lochkarten). Eine Firma stellt Lochkarten her. Die Lochkarten sind 4×4 -Lochkarten mit genau zwei Löchern – zum Beispiel:



Dabei können die Vorder- und Rückseiten der Karten nicht unterschieden werden und auch die vier Ecken der Karten können nicht unterschieden werden. Sei N die Anzahl der verschiedenen solchen Lochkartenmuster.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist.

Behauptung. Es ist $N = 15$.

Beweis. Es gibt genau $16 \cdot 15/2 = 120$ Möglichkeiten aus 16 Feldern zwei auszuwählen. Da die Symmetriegruppe des Quadrats genau acht Elemente enthält (sie ist nämlich von der Rotation um $\pi/2$ und der Spiegelung an einer der Diagonalen erzeugt), erhalten wir also insgesamt genau

$$N = \frac{120}{8} = 15$$

verschiedene solche Lochkartenmuster. □

2. Bestimmen Sie die korrekte Anzahl N solcher Lochkartenmuster.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Dichten von induzierten Verteilungen). Commander Blorx reist in die zweidimensionale Welt Flatland und beschließt aus Langeweile, die Stadt Yahuc zu erobern. Yahuc wird auf einer Seite durch eine unendlich lange geradlinige Stadtmauer vor dem Rest von Flatland geschützt.

Blorx hat als Eroberungswerkzeug seiner Wahl ein Katapult mitgebracht und dieses im Abstand von 2012 Flatland-Ellen vor der Stadtmauer aufgebaut. Um keine klare Strategie erkennen zu lassen, feuert er seine Geschosse geradlinig in einem zufälligen (gleichverteilten) Winkel zwischen $-\pi/2$ und $\pi/2$ ab (wobei der Winkel jeweils relativ zum Lot vom Katapult auf die Stadtmauer gemessen wird).

Der oberste Befehlshaber von Yahuc erfährt durch seine Späher vom Vorhaben von Blorx und möchte sich optimal auf den bevorstehenden Angriff vorbereiten. Insbesondere möchte er die Verteilung der Koordinaten, an denen die Geschosse von Blorx die Stadtmauer touchieren werden, bestimmen. Außerdem beschließt er, besonders viele Truppen an der Koordinate zu positionieren, die dem Erwartungswert dieser Verteilung entspricht.

Bestimmen Sie diese Verteilung der Koordinaten, indem Sie zeigen, dass sie eine λ^1 -Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt und diese Dichte angeben. Erklären Sie außerdem, warum sich Commander Blorx keine Gedanken über die Erwartungswertstrategie des obersten Befehlshabers machen muss.