Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 6 vom 24. Mai 2012

Aufgabe 1 (stochastische Unabhängigkeit)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in S$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist (A, B, C) eine stochastisch unabhängige Familie, so sind auch $A \cup B$ und C stochastisch unabhängig.
2. Sind A, B, C paarweise stochastisch unabhängig, so ist auch die Familie (A, B, C) stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2 (Bernoulli- und Binomialverteilung/geometrische Verteilung)**.**

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$, und sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine stochastisch unabhängige Familie von $B(1, p)$-verteilten reellwertigen Zufallsvariablen (auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum). Zeigen Sie, dass die Summe $X_1 + \dots + X_n$ dann $B(n, p)$-verteilt ist.
2. Sei $p \in (0, 1)$ und sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine stochastisch unabhängige Familie von $B(1, p)$-verteilten reellwertigen Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Zeigen Sie, dass

   $$Y \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$$
   $$\omega \longmapsto \begin{cases} \inf\{n \in \mathbb{N} \mid X_n(\omega) = 1\} & \text{falls es ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } X_n(\omega) = 1 \text{ gibt} \\ 0 & \text{falls es kein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } X_n(\omega) = 1 \text{ gibt} \end{cases}$$

   ebenfalls eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P) ist und zeigen Sie, dass Y dann $G(p)$-verteilt ist.

Aufgabe 3 (Produkte diskreter σ-Algebren)**.** Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist und ein Gegenbeispiel angeben, das zeigt, dass die Behauptung nicht korrekt ist.

Behauptung. Seien Ω und I nicht-leere Mengen. Dann gilt für die Produkt-σ-Algebra auf $\prod_I \Omega$ der diskreten σ-Algebra auf Ω, dass

$$\Big\{\{\alpha\} \;\Big|\; \alpha \in \prod_I \Omega\Big\} \subset \bigotimes_I \operatorname{Pot}(\Omega).$$

Beweis. Sei $\alpha \in \prod_I \Omega$, etwa $\alpha = (\omega_i)_{i \in I}$ mit $\omega_i \in \Omega$ für alle $i \in I$. Dann ist

$$\{\alpha\} = \bigcap_{i \in I} \Big(\{\omega_i\} \times \prod_{j \in I \setminus \{i\}} \Omega_j \Big)$$

als Schnitt von messbaren Zylindermengen nach Definition ein Element der Produkt-σ-Algebra $\bigotimes_I \operatorname{Pot}(\Omega)$. □

Bitte wenden

Aufgabe 4 (stochastische Unabhängigkeit und schnitt-stabile Erzeugendensysteme)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei I eine Menge und sei $(T_i)_{i\in I}$ eine stochastisch unabhängige Familie schnitt-stabiler Teilmengen von S. Zeigen Sie, dass dann auch die Familie $(\sigma(T_i))_{i\in I}$ der von den T_i erzeugten σ-Algebren auf Ω stochastisch unabhängig ist.

Hinweis. Formulieren Sie eine geeignete vollständige Induktion und gehen Sie dann ähnlich wie im Beweis des Maßeindeutigkeitssatzes (Aufgabe 4 von Blatt 1) vor (oder führen Sie obiges Problem geschickt auf den Maßeindeutigkeitssatz zurück).

Bonusaufgabe (faire vs. unfaire Münzen)**.** Commander Blorx strandet durch eine Verkettung unglücklicher Zufälle in einem Kloster auf einem abgelegenen Asteroiden. Die dort ansässige Nonne Vanum ist froh, endlich Besuch zu haben und hofft, dass Blorx dem Glücksspiel nicht so abgeneigt ist wie die anderen Ordensschwestern und spekuliert insbesondere darauf, ihm so sein Raumschiff abzuluchsen.

Sie bietet Blorx an, auf das Ergebnis eines Münzwurfs zu setzen, zückt eine polierte Münze und sagt listig: „Leider ist dies die einzige Münze in diesem Kloster. Ich setze unsere Reliquien auf *Kopf*! Als fairen Einsatz von Dir, Bruder Blorx, würde ich Dein Raumschiff akzeptieren!“. Blorx traut weder der Nonne Vanum noch ihrer Münze und schlägt folgendes vor: „Holde Schwester Vanum, wirklich aufregend ist es doch nur, wenn wir beide dieselben Chancen haben. Dazu spielen wir nach folgenden Regeln . . . “

Es ist nicht bekannt, mit welcher Wahrscheinlichkeit bei einem Wurf mit der Münze von Nonne Vanum *Kopf* fällt und mit welcher *Zahl*, aber es ist bekannt, dass diese Wahrscheinlichkeiten beide positiv sind und dass die Nonne Vanum durch äußerst ausdauerndes wiederholtes Werfen eine stochastisch unabhängige Folge solcher Münzwürfe erzeugen kann.

Wie kann Blorx mit dieser unfairen Münze und der Nonne trotzdem einen fairen Münzwurf simulieren?

Abgabe bis zum 31. Mai 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen