Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank Blatt 7 vom 31. Mai 2012

Aufgabe 1 (Produktmaß)**.** Seien (Ω_1, S_1, P_1) und (Ω_2, S_2, P_2) Wahrscheinlichkeitsräume. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für alle $A \in S_1 \otimes S_2$ ist $(P_1 \otimes P_2)(A) = P_1(\pi_1(A)) \cdot P_2(\pi_2(A))$, wobei π_1 und π_2 die entsprechenden Projektionen sind.
2. Für alle $A_1, A_2 \in S_1 \otimes S_2$ ist
$$(P_1 \otimes P_2)(A_1 \cap A_2) = (P_1 \otimes P_2)(A_1) \cdot (P_1 \otimes P_2)(A_2).$$

Aufgabe 2 (Produkte und Dichten)**.**

1. Zeigen Sie, dass $B(\mathbb{R}) \otimes B(\mathbb{R}) = B(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ ist.
2. Seien $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ Wahrscheinlichkeitsdichten bezüglich des Lebesguemaßes auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann
$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x &\longmapsto f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \end{aligned}$$
eine λ^2-Wahrscheinlichkeitsdichte von $(f_1 \odot \lambda^1) \otimes (f_2 \odot \lambda^1)$ ist.

Aufgabe 3 (Mittlere Augenzahl)**.** Wir betrachten eine stochastisch unabhängige Folge von fairen Würfelwürfen und werfen so lange, bis das erste Mal eine 6 fällt; wir addieren dann die Augenzahlen der Würfe vor der ersten 6.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Die erwartete Summe dieser Augenzahlen ist 15.

   Beweis. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable, die die Summe dieser Augenzahlen modelliert. Dann ist
$$E(X) = \frac{E(X)+1}{6} + \frac{E(X)+2}{6} + \frac{E(X)+3}{6} + \frac{E(X)+4}{6} + \frac{E(X)+5}{6},$$
   da der erste Wurf mit Wahrscheinlichkeit $1/6$ eine $1, \dots, 5$ bzw. 6 ist und in diesen Fällen jeweils $1, \dots, 5$ bzw. 0 zur Gesamtaugenzahl hinzuaddiert wird. Lösen wir die obige Gleichung nach $E(X)$ auf, so erhalten wir $E(X) = 15$. $\square$

2. Geben Sie einen korrekten Beweis dieser Behauptung (und erklären Sie Ihre Modellierung).

Bitte wenden

Aufgabe 4 (universelle Eigenschaft der Produkt-σ-Algebra). Sei I eine (nichtleere) Menge und sei $((\Omega_i, S_i))_{i\in I}$ eine Familie messbarer Räume. Sei

$$(\Omega, S) := \Bigl(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} S_i\Bigr)$$

der zugehörige Produktraum und $(\pi_i\colon \Omega \to \Omega_i)_{i\in I}$ die entsprechende Familie der Projektionen.

1. Zeigen Sie: Dann besitzt das Paar $\bigl((\Omega, S), (\pi_i)_{i\in I}\bigr)$ die folgenden Eigenschaften:

   (a) Für alle $i \in I$ ist $\pi_i\colon \Omega \longrightarrow \Omega_i$ bezüglich S und S_i messbar.

   (b) Ist (Ω', S') ein messbarer Raum und ist $\bigl(f_i\colon (\Omega', S') \to (\Omega_i, S_i)\bigr)_{i\in I}$ eine Familie messbarer Abbildungen, so gibt es genau eine bezüglich S' und S messbare Abbildung $f\colon \Omega' \longrightarrow \Omega$ mit der Eigenschaft, dass für alle $i \in I$ gilt, dass

   $$\pi_i \circ f = f_i$$

   ist.

2. Zeigen Sie außerdem: Ist $\bigl((\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}), (\widetilde{\pi}_i\colon \widetilde{\Omega} \to \Omega_i)_{i\in I}\bigr)$ ein Paar, das auch die obigen Eigenschaften (1a) und (1b) besitzt, so gibt es genau einen messbaren Isomorphismus $(\Omega, S) \longrightarrow (\widetilde{\Omega}, \widetilde{S})$, der mit den jeweiligen Projektionen verträglich ist.

Bonusaufgabe (Eulers Formel). Nach einer Überdosis Casino baut Commander Blorx eine Zeitmaschine und reist damit in die Vergangenheit um mit Euler über sein φ zu diskutieren. Euler schwärmt von der von ihm entdeckten Identität

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{p\in P_n} \Bigl(1 - \frac{1}{p}\Bigr)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$, wobei P_n die Menge aller Primteiler in $\mathbb{N}$ von n bezeichnet, und ist überzeugt, dass Commander Blorx darüber die Stochastik für einen Augenblick vergessen kann.

Commander Blorx, der sich eigentlich auf etwas ungetrübte Algebra gefreut hatte, ist jedoch etwas enttäuscht: „Wenn ich weiter Wahrscheinlichkeitstheorie hätte machen wollen, hätte ich genausogut auch im Casino bleiben können.“

Zeigen Sie, dass es tatsächlich einen wahrscheinlichkeitstheoretischen Beweis der obigen Identität gibt, indem Sie zu jedem Primteiler $p \in \mathbb{N}$ von $n \in \mathbb{N}_{>0}$ das Ereignis $\{p, 2\cdot p, 3\cdot p, \dots, n\}$ in einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum betrachten …

Hinweis. Die *Eulersche φ-Funktion* $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ ist wie folgt definiert: Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\varphi(n)$ die Anzahl der Zahlen in $\{1, \dots, n\}$, deren größter gemeinsamer Teiler mit n gleich 1 ist.

Abgabe bis zum *Freitag, den 8. Juni 2012, 10:00 Uhr*, in die Briefkästen