Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 8 vom 7. Juni 2012

Aufgabe 1 (stochastisch unabhängige Familien)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_i \colon (\Omega, S) \to (\Omega_i, S_i))_{i\in\{1,2,3\}}$ eine stochastisch unabhängige Familie von Zufallsvariablen auf (Ω, S, P). Außerdem schreiben wir

$$\begin{aligned} X_{ij} \colon (\Omega, S) &\longrightarrow (\Omega_i \times \Omega_j, S_i \otimes S_j) \\ \omega &\longmapsto \big(X_i(\omega), X_j(\omega)\big). \end{aligned}$$

für $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Dann sind auch X_{12} und X_3 stochastisch unabhängig.
2. Dann sind auch X_{12} und X_{23} stochastisch unabhängig.

Aufgabe 2 (Varianz von Summen paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(X_1, \dots, X_n)$ eine Familie von paarweise unkorrelierten quadratintegrierbaren reellwertigen Zufallsvariablen auf (Ω, S, P).

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt bzw. unvollständig ist.

   Behauptung. In der obigen Situation gilt

   $$\operatorname{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Var}(X_j).$$

   Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über n. Im Fall $n \in \{0, 1\}$ ist nichts zu zeigen. Der Fall $n = 2$ folgt aus der Unkorreliertheit von X_1 und X_2 und der Tatsache, dass

   $$\operatorname{Var}(X_1 + X_2) = \operatorname{Var}(X_1) + 2 \cdot \operatorname{Cov}(X_1, X_2) + \operatorname{Var}(X_2)$$

   ist. Sei nun $n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$. Dann folgt der Induktionsschritt aus dem eben gezeigten Fall für zwei Zufallsvariablen, indem wir die Aufspaltung $\sum_{j=1}^{n} X_j = (\sum_{j=1}^{n-1} X_j) + X_n$ betrachten und auf den ersten Summanden dann die Induktionsvoraussetzung anwenden:

   $$\operatorname{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n} X_j\Big) = \operatorname{Var}\Big(\sum_{j=1}^{n-1} X_j\Big) + \operatorname{Var}(X_n) = \sum_{j=1}^{n-1} \operatorname{Var}(X_j) + \operatorname{Var}(X_n).$$

   Damit folgt die Behauptung. □

2. Geben Sie einen korrekten, vollständigen Beweis der obigen Behauptung.

Aufgabe 3 (Insekten/Eier/Larven)**.** Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und $p \in (0, 1)$. Die Anzahl der Eier, die ein bestimmtes Insekt legt, sei Poisson-verteilt zum Parameter λ. Aus diesen Eiern entwickelt sich dann unabhängig voneinander jeweils mit Wahrscheinlichkeit p eine Larve.

1. Beschreiben Sie diese Situation durch ein geeignetes wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell und erklären Sie Ihr Modell.
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Anzahl der Larven.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Summe von unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen)**.** Seien X und Y stochastisch unabhängige reellwertige normalverteilte Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass dann auch die Zufallsvariable $X+Y$ normalverteilt ist und bestimmen Sie die Parameter dieser Summenverteilung in Abhängigkeit von den Parametern der Normalverteilungen zu X bzw. Y.

Bonusaufgabe (mischende Operationen)**.** Commander Blorx möchte in den transgalaktischen Markt für Casino-Bedarf einsteigen. Besonders lukrativ ist das Geschäft mit Mischmaschinen für transfinite Kartenspiele. Transfinite Kartenspiele beruhen auf $\mathbb{Z}$-Folgen von mit 0 bzw. 1 beschrifteten Karten. Die Kartenfolgen werden zu Beginn der Spiele zufällig gezogen, basierend auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, S, P) := \bigotimes_{\mathbb{Z}}(\{0,1\}, \mathrm{Pot}(\{0,1\}), U^d_{\{0,1\}})$. D.h. 0 bzw. 1 treten für jedes Folgenglied jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf und diese Folgenglieder sind stochastisch unabhängig.

In den renommierten und betuchten Casinos werden jedoch Mischverfahren $M\colon \prod_{\mathbb{Z}}\{0,1\} \longrightarrow \prod_{\mathbb{Z}}\{0,1\}$ nur dann zugelassen, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. Das Verfahren M ist bezüglich der Produkt-σ-Algebra messbar und M ist invertierbar und auch das Inverse ist bezüglich der Produkt-σ-Algebra messbar.

2. Das Verfahren M pfuscht nicht an den Wahrscheinlichkeiten herum, d.h. für alle $A \in S$ ist $P_M(A) = P(A)$.

3. Das Verfahren M durchmischt die Kartenfolgen anständig, d.h. für alle $A, B \in S$ ist

$$\lim_{n\to\infty} P\big(M^n(A) \cap B\big) = P(A) \cdot P(B).$$

Commander Blorx möchte das Mischverfahren *Bernoulli-Shift*, das durch

$$\begin{aligned} \prod_{\mathbb{Z}}\{0,1\} &\longrightarrow \prod_{\mathbb{Z}}\{0,1\} \\ \omega &\longmapsto (\omega_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

beschrieben wird, vermarkten. Zeigen Sie, dass der Bernoulli-Shift tatsächlich die obigen Bedingungen an ein Mischverfahren erfüllt.

Abgabe bis zum 14. Juni 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen