Übungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank — Blatt 9 vom 14. Juni 2012

Aufgabe 1 (bedingte Wahrscheinlichkeiten)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in S$ mit $P(B \cap C) > 0$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Dann gilt $P(A \cup B \mid C) = P(A \mid C) - P(A \cap B \cap C)/P(C) + P(B \mid C)$.
2. Dann gilt $P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)$.

Aufgabe 2 (DNA-Test)**.** An einem Tatort werden DNA-Spuren sichergestellt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein DNA-Test ergibt, dass die DNA einer zufälligen Person mit den DNA-Spuren am Tatort übereinstimmt ist $1/10^5$; umgekehrt wird der Test beim Abgleich der Spuren mit dem Täter sicher eine Übereinstimmung feststellen. Aufgrund akribischer Ermittlungsarbeit kann der Täterkreis auf 80 Millionen Personen eingeschränkt werden.

Durch einen DNA-Test wird festgestellt, dass die DNA einer gewissen Person mit den DNA-Spuren am Tatort übereinstimmt; keine weiteren Indizien sprechen dafür, dass diese Person der Täter ist.

1. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären, welcher Schritt nicht korrekt ist.

   > *Behauptung.* Die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich der Täter ist, beträgt 99.999%.
   >
   > *Beweis.* Da der DNA-Test dieser Person positiv ist, ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person unschuldig ist, nur $1/10^5$. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei dieser Person um den Täter handelt $100 \cdot (1 - 1/10^5)\% = 99.999\%$. □

2. Bestimmen Sie die korrekte Wahrscheinlichkeit, dass diese Person tatsächlich der Täter ist (und erklären Sie Ihr Modell und Ihre Modellannahmen).

Aufgabe 3 (Gesetz von Hardy-Weinberger)**.** Von einem menschlichen Gen gebe es zwei mögliche Ausprägungen, A und a. Jeder Mensch trage zwei dieser Allele (da Menschen über einen doppelten Chromosomensatz verfügen); ein konkretes Beispiel sind etwa die Allele „D“ bzw. „d“ des Rhesus-Faktors. Daher sind in diesem Fall die Genotypen $AA, Aa = aA, aa$ möglich. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von AA, Aa bzw. aa in der Anfangsgeneration betrage $p, 2 \cdot r$ bzw. q, wobei $p, r, q \in [0, 1]$ sind mit $p + 2 \cdot r + q = 1$. Bei der Vererbung werde jeweils sowohl vom Vater als auch von der Mutter zufällig (je mit Wahrscheinlichkeit 1/2) und unabhängig eines der beiden Allele ausgewählt; diese beiden neuen Allele bilden den Genotyp des entsprechenden Gens des Nachkommen. Die Allele seien geschlechtsunabhängig, haben keinen Einfluss auf die Partnerwahl oder Fruchtbarkeit und es gebe keine Mutationen etc..

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Nachkomme eines Vaters mit Genotyp aa nicht Genotyp aa hat? Erklären Sie dabei auch Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.
2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Genotypen der ersten und zweiten Nachfolgegeneration. Was fällt auf?

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Kleinste-Quadrate-Regressionsgerade)**.** Seien X und Y quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariabeln auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und es gelte $\mathrm{Var}(X) \neq 0$ und $\mathrm{Var}(Y) \neq 0$.

1. Zeigen Sie: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$E\big((Y - a \cdot X - b)^2\big) \geq \big(1 - \varrho(X,Y)^2\big) \cdot \mathrm{Var}(Y),$$

2. Zeigen Sie außerdem, dass Gleichheit genau dann eintritt, wenn

$$a = \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot \varrho(X,Y) \quad \text{und} \quad b = E(Y) - \frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)} \cdot \varrho(X,Y) \cdot E(X)$$

ist.

Hinweis. Verwenden Sie, dass der Erwartungswert die quadratische Abweichung minimiert und lösen Sie das entstehende quadratische Optimierungsproblem.

Bonusaufgabe (Erbschaften)**.** King EEu vom Planeten Eine gKu möchte die (ohnehin bereits geringe) Anzahl der weißen Schafe in seiner vorwiegend schwarzen Schafbevölkerung über die Generationen weiter senken, indem er gewisse Schafe von Eine gKu verbannt, bevor sie sich fortpflanzen können.

Die Schafe auf Eine gKu besitzen (ähnlich zum Menschen) einen doppelten Chromosomensatz und laut der Zoologen von Eine gKu wird die Farbe der Schafe durch ein Gen bestimmt, von dem es die zwei möglichen Ausprägungen F und f gibt. Dabei liefern die Genotypen FF und $Ff = fF$ die gewünschten schwarzen Schafe, der Genotyp ff jedoch die ungeliebten weißen Schafe. Außerdem zeigen die offiziellen Schafregister, dass die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von FF, Ff bzw. ff momentan jeweils 81%, 18% bzw. 1% beträgt. Bei der Fortpflanzung werde sowohl vom väterlichen als auch vom mütterlichen Schaf jeweils zufällig (je mit Wahrscheinlichkeit $1/2$) und unabhängig eines der beiden Allele ausgewählt; diese beiden Allele bilden den Genotyp des entsprechenden Gens des Nachkommen. Die Allele seien geschlechtsunabhängig, haben keinen Einfluss auf die Partnerwahl oder Fruchtbarkeit und es gebe keine Mutationen etc.. Außerdem können sich Schafe erst ab einem Alter von fünf Jahren fortpflanzen.

King EEu beschließt im Rahmen seines neuen 100-Jahre-Plans alle weißen Schafe von Eine gKu zu verbannen, bevor sie sich fortpflanzen können, um so die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten weißer Schafe in der neuesten Generation im Vergleich zur Startgeneration um den Faktor 9 zu verringern.

Commander Blorx legt zufällig auf einer Irrfahrt durch die Galaxie einen Zwischenstop auf Eine gKu ein und erfährt dabei von King EEus Plan: „Oh großer King EEu, Du solltest Deinen 100-Jahre-Plan besser in einen 1000-Jahre-Plan umbenennen!“

Können Sie die These von Blorx unterstützen?

Abgabe bis zum 21. Juni 2012, 14:00 Uhr, in die Briefkästen