Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik im SS2012 – Kurzskript, Ergänzung

Prof. Dr. C. Löh Sommersemester 2012

Illustration des zentralen Grenzwertsatzes

Betrachtet man eine stochastisch unabhängige Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ von $B(1,1/2)$-verteilten Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und die zugehörigen Histogramme (d.h. flächentreue Darstellungen der entsprechenden Zähldichten) der Folge

$$(S_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}} := \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_k)}} \cdot \big(X_k - E(X_k)\big)\Big)_{n\in\mathbb{N}_{>0}},$$

so stellt man fest, dass sich diese Histogramme der λ^1-Dichte $f_{N(0,1)}$ der Standardnormalverteilung $N(0,1)$ annähern. Da Histogramme flächentreu sind, entspricht dies einer Aussage über Verteilungskonvergenz.

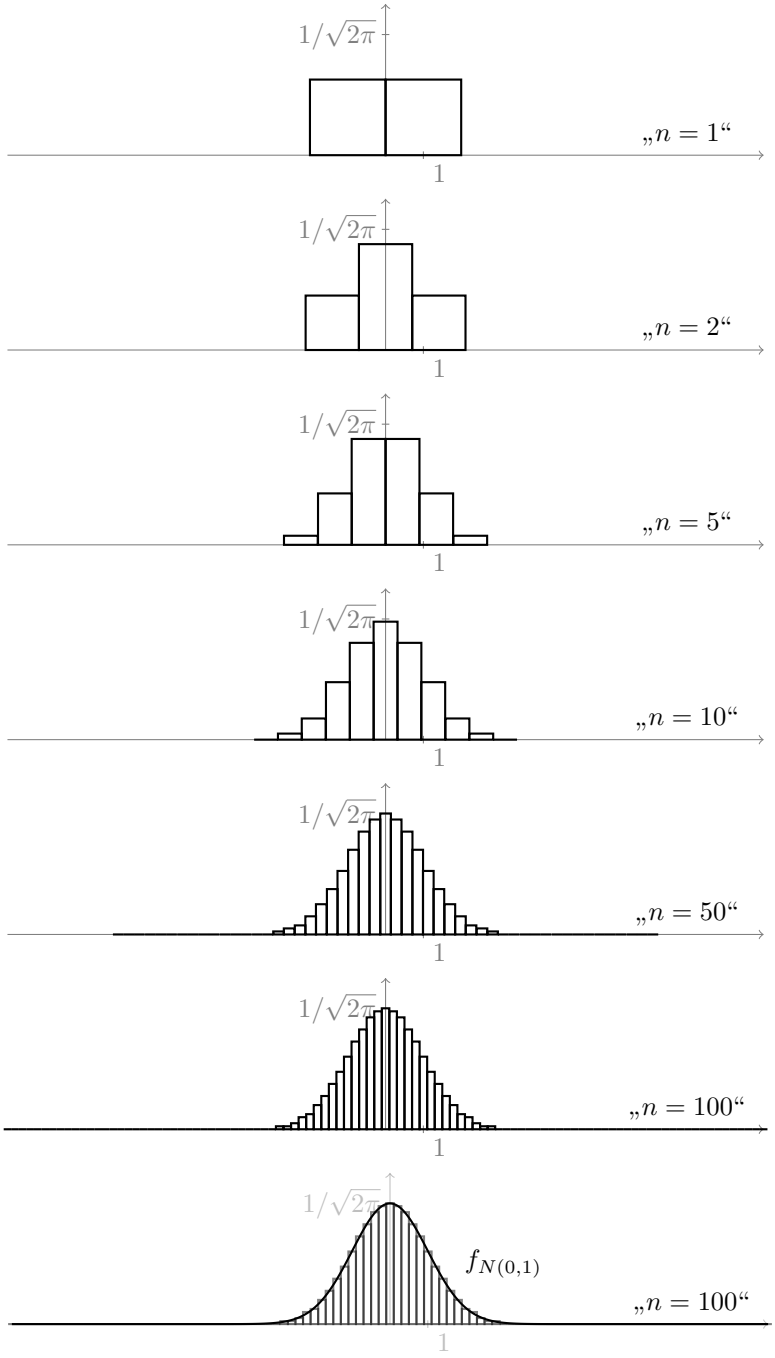
In den untenstehenden Graphiken sind jeweils die Histogramme für S_n für den gegebenen Wert von $n \in \mathbb{N}_{>0}$ dargestellt. „Flächentreue“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Flächen der Rechtecke mit den Werten der Zähldichte von S_n am Mittelpunkt der unteren horizontalen Kante übereinstimmen. Da aufeinanderfolgende Elemente des Trägers der Zähldichte von S_n den Abstand $1/\sqrt{n \cdot \operatorname{Var}(X_1)}$ haben, haben die Rechtecke die Breite $1/\sqrt{n \cdot \operatorname{Var}(X_1)}$. Um die Flächentreue zu erreichen, muss also die entsprechende Darstellung der zugehörigen Zähldichte von S_n vertikal um den Faktor $\sqrt{n \cdot \operatorname{Var}(X_1)}$ gestreckt werden.

Dieses Beispiel ist eine Instanz eines ganz allgemeinen und für die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik zentralen Phänomens:

Satz (Zentraler Grenzwertsatz)**.** *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge von identisch verteilten quadratintegrierbaren reellwertigen Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und es gelte $\operatorname{Var}(X_1) > 0$. Dann gilt*

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_k)}} \cdot \big(X_k - E(X_k)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0,1).$$

Histogramme von $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$



Version vom 29. Juni 2012
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg