Klausur zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 27. Juli 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	10	10	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Seien S_1 und S_2 zwei σ-Algebren auf einer Menge Ω. Ist dann auch $S_1 \cap S_2$ eine σ-Algebra auf Ω?

2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in S$. Gilt dann bereits $P(A \cup B) \geq P(A) + P(B)$?

3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ und sei X eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte reellwertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Was ist $P(X \leq 1)$?

4. Ist

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \cdot \chi_{[0, \sqrt[3]{3}]}(x) \end{aligned}$$

   eine λ^1-Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$?

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge in S. Ist dann auch $(A_{2\cdot n})_{n\in\mathbb{N}}$ bezüglich P stochastisch unabhängig?

2. Seien X und Y reellwertige stochastisch unabhängige Zufallsvariablen, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P) definiert sind. Gilt dann bereits
$$P(X^2 + Y^2 = 0) = P(X = 0) \cdot P(Y = 0)\,?$$

3. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $A \in S$. Gilt dann bereits $P(A \mid \Omega) = 1\,?$

4. Seien X und Y quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariablen, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Gilt dann bereits, dass
$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}(X + Y)\,?$$

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P) mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} X$. Konvergiert dann auch die Folge $((X_n - X)^2)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 0 ?

2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter reellwertiger quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) mit $\operatorname{Var}(X_1) > 0$. Gilt dann bereits
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - E(X_k)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{d}} N\big(0, \operatorname{Var}(X_1)\big) \,?$$

3. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und seien T und $\widetilde{T}$ erwartungstreue Schätzer für eine Abbildung $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist dann auch $1/3 \cdot T + 2/3 \cdot \widetilde{T}$ ein erwartungstreuer Schätzer für τ ?

4. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell. Ist $\Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \omega \longmapsto 0$ ein gleichmäßig bester erwartungstreuer Schätzer für $\Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto 0$ auf diesem Modell?

Aufgabe 4 $(5 + 4 + 1 = 10$ Punkte$)$**.**

1. Formulieren Sie das starke Gesetz der großen Zahlen!

2. Definieren Sie die im starken Gesetz der großen Zahlen auftretende Konvergenzart!

3. Auf welchem Satz beruht der Beweis (aus der Vorlesung) des starken Gesetzes der großen Zahlen?

Aufgabe 5 $(2 + 4 + 4 = 10$ Punkte$)$**.** Wir betrachten eine unendliche Folge von Würfen derselben Münze; dabei sei angenommen, dass sich die Münzwürfe nicht gegenseitig beeinflussen und dass bei der Münze mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ „Kopf“ fällt.

1. Modellieren Sie diese Situation geeignet. Erklären Sie Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von p) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in den ersten beiden Würfen genau einmal „Kopf“ fällt.

3. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von p) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in allen Würfen „Kopf“ fällt.

Aufgabe 6 $(5+2+3=10$ Punkte**).** Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. In einer Kiste befinden sich n Toaster, von denen eine gewisse Anzahl $d \in \{0, \ldots, n\}$ defekt sei. Aus dieser Kiste wird zufällig (gleichverteilt) eine Teilmenge von genau zwei Toastern ausgewählt.

1. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von d) die Wahrscheinlichkeitsverteilung P_d der Anzahl der defekten Toaster unter den beiden zufällig ausgewählten Toastern. Erklären Sie dabei Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Die Anzahl der defekten Toaster in dieser Kiste sei unbekannt und soll mit Hilfe einer zufällig (gleichverteilt) ausgewählten Teilmenge von genau zwei Toastern geschätzt werden. Modellieren Sie diese Situation durch ein geeignetes statistisches Modell und erklären Sie Ihr Modell.

3. Geben Sie für dieses statistische Modell einen erwartungstreuen Schätzer für die Anzahl der defekten Toaster an (und begründen Sie Ihre Antwort).

   Hinweis. Betrachten Sie ein geeignetes skalares Vielfaches der Anzahl der defekten Toaster unter den zwei ausgewählten Toastern ...

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{N}$ eine $(\mathbb{N}, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}))$-wertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P), für die $P(X = n) > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Außerdem gelte für alle $n, k \in \mathbb{N}$, dass

$$P(X \geq k + n \mid X \geq n) = P(X \geq k).$$

Zeigen Sie, dass P_X eine geometrische Verteilung ist.