Probeklausur zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 19. Juli 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: | | | | | | | Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	10	10	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei S eine σ-Algebra auf einer Menge Ω. Ist dann $\{A \subset \Omega \mid A \notin S\}$ bereits eine σ-Algebra auf Ω?
2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in S$. Gilt dann bereits $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$?
3. Gibt es eine reellwertige Zufallsvariable, die $N(0, 2012)$ als induzierte Verteilung besitzt?
4. Sei X eine reellwertige Zufallsvariable. Gibt es dann eine reellwertige Zufallsvariable Y mit $F_Y = 1 - F_X$?

Lösung:

1. Nein, denn: Jede σ-Algebra auf Ω enthält Ω; daher kann $\{A \subset \Omega \mid A \notin S\}$ keine σ-Algebra sein.
2. Ja, denn: Es gilt

$$\begin{aligned} P(A \cup B) + P(A \cap B) &= P((A \cap (\Omega \setminus B)) \cup B) + P(A \cap B) \\ &= P(A \cap (\Omega \setminus B)) + P(A \cap B) + P(B) \\ &= P((A \cap (\Omega \setminus B)) \cup (A \cap B)) + P(B) \\ &= P(A) + P(B). \end{aligned}$$

   [Alternativ: Nach dem Inklusions/Exklusions-Prinzip (Blatt 3).]

3. Ja, etwa

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}} \colon (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), N(0, 2012)) \longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})).$$

4. Nein, denn: Gäbe es ein solches Y, so würde gelten

$$1 = \lim_{x \to \infty} F_Y(x) = 1 - \lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1 - 1 = 0,$$

   was nicht möglich ist.

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei (A, B, C) eine stochastisch unabhängige Familie in S. Sind dann auch A und $B \cap C$ stochastisch unabhängig?

2. Seien (Ω_1, S_1, P_1) und (Ω_2, S_2, P_2) Wahrscheinlichkeitsräume und seien X_1 und X_2 reellwertige Zufallsvariablen auf $(\Omega_1 \times \Omega_2, S_1 \otimes S_2, P_1 \otimes P_2)$. Sind dann X_1 und X_2 bezüglich $P_1 \otimes P_2$ stochastisch unabhängig?

3. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, seien $A, B \in S$ mit $P(B) > 0$. Gilt dann bereits $P(A \mid B) > P(A) \cdot P(B)$?

4. Seien X, Y, Z quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum. Gilt dann bereits

$$\mathrm{Cov}(X + Y, Z) = \mathrm{Cov}(X, Z) + \mathrm{Cov}(Y, Z)\,?$$

Lösung:

1. Ja, denn: Es gilt

$$P(A \cap (B \cap C)) = P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = P(A) \cdot P(B \cap C),$$

wobei wir zweimal die Unabhängigkeit von (A, B, C) benutzt haben.

2. Nein, im Allgemeinen nicht, denn: Man betrachte etwa den Produktraum $(\{0,1\}, \mathrm{Pot}(\{0,1\}), U^d_{\{0,1\}})^{\otimes 2}$ und die Zufallsvariablen

$$\begin{aligned} X_1 = X_2 \colon (\{0,1\}, \mathrm{Pot}(\{0,1\})) &\longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})) \\ \omega &\longmapsto \omega_1. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$P(\{X_1 = 1\} \cap \{X_2 = 1\}) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} = P(X_1 = 1) \cdot P(X_2 = 1).$$

Also sind X_1 und X_2 nicht unabhängig bzgl. $U^d_{\{0,1\}} \otimes U^d_{\{0,1\}}$.

3. Nein, denn: Es gilt etwa

$$P(\Omega \mid \Omega) = \frac{P(\Omega \cap \Omega)}{P(\Omega)} = 1 = P(\Omega) \cdot P(\Omega).$$

4. Ja, denn: Dies folgt aus der Linearität des Erwartungswertes: Es gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X+Y,Z) &= E\big((X+Y-E(X+Y)) \cdot (Z-E(Z))\big) \\ &= E\big((X-E(X)) \cdot (Z-E(Z)) + (Y-E(Y)) \cdot (Z-E(Z))\big) \\ &= E\big((X-E(X)) \cdot (Z-E(Z))\big) + E\big((Y-E(Y)) \cdot (Z-E(Z))\big) \\ &= \operatorname{Cov}(X,Z) + \operatorname{Cov}(Y,Z).\end{aligned}$$

(Und alle diese Erwartungswerte existieren.)

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und seien X, Y reellwertige Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X$ und $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} Y$. Stimmen X und Y dann bereits P-fast sicher überein?

2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter reellwertiger quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und sei X eine $N(0,1)$-verteilte reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P). Gilt dann bereits

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - E(X_k)\big) \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X\,?$$

3. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und sei T ein erwartungstreuer Schätzer für eine Abbildung $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$. Gilt dann $E_{P_\vartheta}(T) = E_{P_{\vartheta'}}(T)$ für alle $\vartheta, \vartheta' \in \Theta$?

4. Besitzt jedes statistische Standardmodell einen Maximum-Likelihood-Schätzer für die Identitätsabbildung auf der Parametermenge?

Lösung:

1. Ja, denn: Dies folgt direkt aus der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $\mathbb{R}$. Der Schnitt zweier fast sicherer Ereignisse ist ein fast sicheres Ereignis (etwa nach Aufgabe 1.2); daher gilt

   $$1 \geq P(\{X = Y\}) \geq P(\{\omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega),\ \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = Y(\omega)\}) = 1.$$

   Also stimmen X und Y bereits P-fast sicher überein.

2. Nein, denn: Die Folge $(\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \big(X_k - E(X_k)\big))_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ konvergiert nach dem starken Gesetz der großen Zahlen P-fast sicher gegen 0 und kann daher nach Teil 1 nicht P-fast sicher gegen eine $N(0,1)$-verteilte Zufallsvariable konvergieren.

3. Nein, denn: Man betrachte das statistische Modell

$$(\mathbb{N}, \mathrm{Pot}(\mathbb{N}), (U^d_{\{\vartheta\}})_{\vartheta\in\{0,1\}}),$$

die kanonische Inklusion $\tau\colon \{0,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ und den erwartungstreuen Schätzer $T := (\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R})$. Dann gilt

$$E_{P_1}(T) = 1 \neq 0 = E_{P_0}(T).$$

4. Nein, denn: Man vergleiche Blatt 13, Aufgabe 3.

Alternativ: Man betrachte das statistische Standardmodell

$$(\{0,1\}, \mathrm{Pot}(\{0,1\}), (B(1,p))_{p\in(0,1)}).$$

Die zugehörige Likelihoodfunktion hat die Form

$$\begin{aligned} L\colon \{0,1\} \times (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ (\omega, p) &\longmapsto p^\omega \cdot (1-p)^{1-\omega} \end{aligned}$$

Für $\omega = 0$ sieht man, dass

$$\begin{aligned} L(0,\cdot)\colon (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ p &\longmapsto p. \end{aligned}$$

kein Maximum in $(0,1)$ annimmt. Insbesondere kann es keinen Maximum-Likelihood-Schätzer für die Identitätsabbildung geben.

Aufgabe 4 $(5 + 4 + 1 = 10$ Punkte$)$**.**

1. Formulieren Sie den zentralen Grenzwertsatz!
2. Definieren Sie die im zentralen Grenzwertsatz auftretende Konvergenzart!
3. Auf welcher Charakterisierung dieser Konvergenzart beruht der Beweis (aus der Vorlesung) des zentralen Grenzwertsatzes?

Lösung:

1. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge von identisch verteilten, quadratintegrierbaren reellwertigen Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und es gelte $\mathrm{Var}(X_1) > 0$. Dann gilt
$$\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_k)}} \cdot (X_k - E(X_k)) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} N(0,1).$$
2. Im zentralen Grenzwertsatz tritt Verteilungskonvergenz auf. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen und sei X eine reellwertige Zufallsvariable.
   - Es *konvergiert* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in Verteilung gegen* X, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen F_X stetig ist, gilt, dass
   $$\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x).$$
   - Alternativ: Es *konvergiert* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in Verteilung gegen* X, falls für alle stetigen und beschränkten Funktionen $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt
   $$\lim_{n\to\infty} E(f \circ X_n) = E(f \circ X).$$
   - Alternativ: Es *konvergiert* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *in Verteilung gegen* X, falls für alle $f \in \widetilde{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ gilt
   $$\lim_{n\to\infty} E(f \circ X_n) = E(f \circ X).$$
3. Auf der dritten Charakterisierung von Verteilungskonvergenz über die Konvergenz von Erwartungswerten (bezüglich der Komposition mit Testfunktionen, s. oben).

Aufgabe 5 (2+4+4 = 10 Punkte)**.** Zwei Busse B_1 und B_2 treffen unabhängig und gleichverteilt zwischen 00:00 und 01:00 an einer Bushaltestelle ein.

1. Modellieren Sie diese Situation geeignet. Erklären Sie Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Bus B_1 vor Bus B_2 eintrifft.

3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass einer der Busse mindestens 6 Minuten vor dem anderen eintrifft.

Lösung:

1. Seien B_1 und B_2 zwei stochastisch unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Dabei beschreibe B_1 den ersten, B_2 den zweiten Bus und $[0,1]$ das Zeitinterval zwischen 00:00 und 01:00.

   Alternativ: Man kann insbesondere für B_1 und B_2 die kanonischen Projektionen

   $$\pi_1, \pi_2 \colon \left([0,1]^2, B([0,1]^2), \lambda^2|_{[0,1]^2}\right) \longrightarrow \left([0,1], B([0,1])\right)$$

   betrachten. Das gesuchte Ereignis lässt sich in diesem Modell beschreiben durch $\{\pi_1 < \pi_2\}$.

2. Wir erhalten damit für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned}
P(\{B_1 < B_2\}) &= \int \chi_{\{B_1<B_2\}}\, dP \\
&= \int \chi_{\{\pi_1<\pi_2\}} \circ (B_1, B_2)\, dP \\
&= \int \chi_{\{\pi_1<\pi_2\}}\, dP_{(B_1,B_2)} \\
&= \int \chi_{\{\pi_1<\pi_2\}}\, d(P_{B_1} \otimes P_{B_2}) \qquad (B_1 \text{ und } B_2 \text{ unabhängig}) \\
&= \int \chi_{\{\pi_1<\pi_2\}}\, \lambda^1|_{[0,1]} \otimes \lambda^1|_{[0,1]} \\
&\qquad\qquad (B_1,\ B_2 \text{ gleichverteilt auf } [0,1]) \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,y]} 1\, d\lambda^1(x)\, d\lambda^1(y) \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{[0,1]} y\, d\lambda^1(y) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Alternativ in der konkreten Beschreibung des Modells:

$$\begin{aligned}
\lambda^2(\{\pi_1 < \pi_2\}) &= \int_{[0,1]^2} \chi_{\{\pi_1<\pi_2\}}\, d\lambda^2 \\
&= \int_{[0,1]} \int_{[0,y]} 1\, d\lambda^1(x)\, d\lambda^1(y) \qquad \text{(Fubini)} \\
&= \int_{[0,1]} y\, d\lambda^1(y) \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

3. Das gesuchte Ereignis ist $\{|\pi_2 - \pi_1| > 0.1\}$. Wir erhalten für die gesuchte

Wahrscheinlichkeit somit

$$\begin{aligned}
\lambda^2(\{|\pi_2 - \pi_1| > 0.1\}) &= \int_{[0,1]^2} \chi_{\{|\pi_2-\pi_1|>0.1\}}\, d\lambda^2 \\
&= 2 \cdot \int_{[0,1]^2} \chi_{\{\pi_2-\pi_1>0.1\}}\, d\lambda^2 && \text{(Symmetrie)} \\
&= 2 \cdot \int_{[0.1,1]} \int_{[0,y-0.1]} 1\, d\lambda^1(x)\, d\lambda^1(y) && \text{(Fubini)} \\
&= 2 \cdot \int_{[0.1,1]} y - 0.1\, d\lambda^1(y) \\
&= 2 \cdot \left[\frac{1}{2}y^2 - 0.1 \cdot y\right]_{y=0.1}^{y=1} \\
&= \frac{81}{100}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (5 + 2 + 3 = 10 Punkte)**.** Die Lebensdauer (in Jahren) eines Toasters sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

1. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Toaster eine Gesamtlebensdauer von mehr als zwei Jahren hat, wenn er bereits mehr als ein Jahr alt ist. Erklären Sie dabei Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Der Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ sei nun unbekannt und soll durch die Beobachtung eines Toasters geschätzt werden. Modellieren Sie diese Situation durch ein geeignetes statistisches Modell und erklären Sie Ihr Modell.

3. Geben Sie einen erwartungstreuen Schätzer für die zu erwartende Lebensdauer an (und begründen Sie Ihre Antwort).

Lösung:

1. Sei $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir betrachten den Modellraum $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \mathrm{Exp}(\lambda))$. D.h. wir beschreiben die Lebensdauer des Toasters durch eine reelle Zahl und nehmen an, dass diese exponentialverteilt zum Parameter λ ist.

   Alternativ: Sei $T\colon (\Omega, S, P) \longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ eine $\mathrm{Exp}(\lambda)$-verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P), welche die Lebensdauer unseres Toasters modelliere.

   Dann lässt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit beschreiben durch

   $$P(T > 2 \mid T > 1) = P(T > 1) = e^{-\lambda}.$$

   Wobei wir die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung benutzt haben.

   Alternativ: Für alle $a \in \mathbb{R}_{>0}$ erhalten wir

   $$\begin{aligned}\mathrm{Exp}(\lambda)((a,\infty)) &= \int_{(a,\infty)} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}\, d\lambda^1(x) \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-e^{-\lambda\cdot x}\right]_{x=a}^{x=t} \\ &= \lim_{t\to\infty} -e^{-\lambda\cdot t} + e^{-\lambda\cdot a} \\ &= e^{-\lambda\cdot a}.\end{aligned}$$

   Insbesondere gilt $\mathrm{Exp}(\lambda)((1,\infty)) > 0$ und wir können die Wahrscheinlichkeit des gesuchten Ereignisses wie folgt ausdrücken und berechnen

   $$P((2,\infty) \mid (1,\infty)) = \frac{e^{-2\cdot\lambda}}{e^{-\lambda}} = e^{-\lambda}.$$

2. Wir betrachten das statistische Modell

$$(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), (\mathrm{Exp}(\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}_{>0}})).$$

Das heißt, wir beschreiben die Lebensdauer eines einzelnen Toasters durch die $\mathrm{Exp}(\lambda)$-Verteilung, für einen a priori unbekannten Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$.

3. Der Schätzer $T := \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ ist erwartungstreu bzgl. der zu erwartenden Lebensdauer, denn für alle $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ ist T bzgl. $\mathrm{Exp}(\lambda)$ integrierbar (vergleiche Vorlesung) und

$$E_{\mathrm{Exp}(\lambda)}(T) = \underbrace{E(\mathrm{Exp}(\lambda))}_{\text{erwartete Lebensdauer}} .$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ und sei F die Verteilungsfunktion zu P. Sei

$$\begin{aligned} X\colon (0,1) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \inf\{c \in \mathbb{R} \mid F(c) \geq x\} \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass X eine Zufallsvariable auf $\big((0,1), B((0,1)), \lambda^1|_{(0,1)}\big)$ ist, und zeigen Sie, dass die von X induzierte Verteilung mit P übereinstimmt.

Lösung: Für alle $x \in (0,1)$ und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt:

- Ist $x \leq F(a)$ so gilt nach Definition von X bereits $X(x) \leq a$.
- Sei umgekehrt $X(x) \leq a$. Dann existiert nach der Definition von $X(x)$ als Infimum für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F(c) \geq x$ und $a + \varepsilon \geq X(x) + \varepsilon \geq c$. Wegen der Monotonie von F gilt

  $$x \leq F(c) \leq F(a + \varepsilon).$$

  Mit der Rechtsstetigkeit von F folgt daher

  $$x \leq \lim_{\mathbb{R}_{>0} \ni \varepsilon \to 0} F(a + \varepsilon) = F(a).$$

Wie gerade gesehen gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$X^{-1}((-\infty, a]) = (-\infty, F(a)] \cap (0,1) \in B((0,1)).$$

insbesondere ist X eine Zufallsvariable (die halboffenen uneigentlichen Intervalle erzeugen die Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}$) und es gilt für alle $a \in \mathbb{R}$, dass

$$F_X(a) = \lambda^1|_{[0,1]}(\{X \leq a\}) = \lambda^1|_{[0,1]}((-\infty, F(a)] \cap (0,1)) = F(a) - 0 = F(a).$$

Also ist X nach dem Korrespondenzsatz für Verteilungsfunktionen P-verteilt.