Wiederholungsklausur zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 8. Oktober 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	10	10	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei S eine σ-Algebra auf einer Menge Ω und seien A, $B \in S$. Ist dann auch $\{x \in \Omega \mid x \in A, x \notin B\}$ in S?

2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in S$. Gilt dann bereits $P(A \cap B) \leq \big|P(A) - P(B)\big|$?

3. Gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P) und eine $G(2)$-verteilte reellwertige Zufallsvariable X auf (Ω, S, P) mit der Eigenschaft, dass $X(\omega) \geq 2$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt?

4. Seien $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei λ^1-Wahrscheinlichkeitsdichten auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Ist dann $1/2 \cdot f + 1/2 \cdot g$ eine λ^1-Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$?

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in S$ mit $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Ist dann die Familie (A, B, C) bezüglich P stochastisch unabhängig?

2. Seien X und Y bezüglich P stochastisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Gilt dann bereits
$$P(X \cdot Y = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0)\,?$$

3. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $A \in S$ mit $P(A \mid \Omega) = 1$. Folgt dann bereits $A = \Omega$?

4. Seien X und Y quadratintegrierbare reellwertige unkorrelierte Zufallsvariablen, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Gilt dann bereits, dass
$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\,?$$

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P) mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X$. Gilt dann auch $X_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X^2$?

2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter reellwertiger quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und es gelte $E(X_1) = 0$ und $\mathrm{Var}(X_1) = 1$. Sei X eine $N(0,1)$-verteilte reellwertige Zufallsvariable und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Gilt dann bereits

$$\lim_{n\to\infty} E\left(f \circ \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right) = E(f \circ X)\,?$$

3. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und sei T ein erwartungstreuer Schätzer für eine Abbildung $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist dann auch T^2 ein erwartungstreuer Schätzer für τ^2 ?

4. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell. Gibt es dann eine konsistente Folge von Schätzern auf diesem Modell für $\Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto 0$?

Aufgabe 4 $(4 + 4 + 2 = 10$ Punkte$)$**.**

1. Formulieren Sie den Satz über die Markov-Ungleichung!

2. Formulieren Sie den Satz über die Tschebyschev-Ungleichung!

3. Welcher Konvergenzsatz wird mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung bewiesen und um welche Konvergenzart handelt es sich in diesem Konvergenzsatz?

Aufgabe 5 $(3 + 3 + 4 = 10$ Punkte$)$**.** Wir betrachten einen Wurf mit zwei Würfeln. Der erste Würfel ist ein gewöhnlicher fairer Sechserwürfel. Der zweite ist ein Würfel, bei dem eine Seite mit 1, zwei Seiten mit 2 und drei Seiten mit 3 beschriftet sind. Jede der sechs Seiten des zweiten Würfels fällt mit derselben Wahrscheinlichkeit. Außerdem beeinflussen sich die beiden Würfel gegenseitig nicht.

1. Modellieren Sie diese Situation geeignet. Erklären Sie Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf mit diesen beiden Würfeln mindestens einer der beiden Würfel eine 3 zeigt.

3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf mit diesen beiden Würfeln, wenn bekannt ist, dass einer der beiden Würfel eine 3 zeigt (aber nicht klar ist, welcher der beiden), auch der andere Würfel eine 3 zeigt.

Aufgabe 6 $(5 + 3 + 2 = 10$ Punkte$)$**.** Die Lebensdauer (in Jahren) eines Toasters wird durch die Lebensdauer zweier Komponenten A und B bestimmt – der Toaster ist genau dann kaputt, wenn mindestens eine dieser beiden Komponenten kaputt ist. Die Lebensdauer der Komponente A sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_A \in \mathbb{R}_{>0}$, die Lebensdauer der Komponente B sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$. Außerdem sei bekannt, dass sich die Lebensdauern der beiden Komponenten nicht gegenseitig beeinflussen.

1. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ_A und λ_B) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Toaster eine Gesamtlebensdauer von mindestens zwei Jahren hat. Erklären Sie dabei Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Die Parameter $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$ seien nun unbekannt. Durch die Beobachtung eines Toasters soll getestet werden, ob die zu erwartende Lebensdauer des Toasters mindestens zwei Jahre beträgt oder nicht. Modellieren Sie diese Situation durch ein geeignetes Alternativtestproblem und erklären Sie Ihr Modell.

   Hinweis. Die Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ hat den Erwartungswert $1/\lambda$.

3. Geben Sie für dieses statistische Modell und dieses Testproblem einen Test zum Irrtumsniveau 0.05 an (und begründen Sie Ihre Antwort).

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei Ω eine abzählbare Menge, sei $S := \mathrm{Pot}(\Omega)$ und sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, S). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und es gelte $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} 0$ folgt.