Wiederholungsklausur zur Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik

Prof. Dr. C. Löh/M. Blank 8. Oktober 2012

Name: Vorname:

Matrikelnummer: ☐☐☐☐☐☐☐ Übungsleiter:

- Diese Klausur besteht aus 8 Seiten. Bitte überprüfen Sie, ob Sie alle Seiten erhalten haben.
- Bitte versehen Sie *alle* Seiten mit Ihrem Namen und Ihrer Matrikelnummer.
- Bitte schreiben Sie nicht Lösungen zu verschiedenen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- Sie haben zwei Stunden (= 120 Minuten) Zeit, um die Klausur zu bearbeiten; bitte legen Sie Ihren Studentenausweis und einen Lichtbildausweis zu Beginn der Klausur vor sich auf den Tisch und halten Sie die Ausweise bei der Abgabe bereit. Um Unruhe in den letzten Minuten zu vermeiden, geben Sie bitte entweder um 11:00 Uhr oder vor 10:40 Uhr ab.
- Die Klausur besteht aus 7 Aufgaben. Es können im Total 72 Punkte erreicht werden. Zum Bestehen genügen voraussichtlich 50% der Punkte.
- Es sind keinerlei Hilfsmittel wie Taschenrechner, Computer, Bücher, Vorlesungsmitschriften, Mobiltelephone etc. gestattet; Papier wird zur Verfügung gestellt. *Alle* Täuschungsversuche führen zum Ausschluss von der Klausur; die Klausur wird dann als nicht bestanden gewertet!

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Summe
Punkte maximal	12	12	12	10	10	10	6	72
erreichte Punkte								

Note: Unterschrift:

Aufgabe 1 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei S eine σ-Algebra auf einer Menge Ω und seien A, $B \in S$. Ist dann auch $\{x \in \Omega \mid x \in A, x \notin B\}$ in S?
2. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in S$. Gilt dann bereits $P(A \cap B) \leq \bigl|P(A) - P(B)\bigr|$?
3. Gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P) und eine $G(2)$-verteilte reellwertige Zufallsvariable X auf (Ω, S, P) mit der Eigenschaft, dass $X(\omega) \geq 2$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt?
4. Seien $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zwei λ^1-Wahrscheinlichkeitsdichten auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$. Ist dann $1/2 \cdot f + 1/2 \cdot g$ eine λ^1-Wahrscheinlichkeitsdichte auf $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$?

Lösung:

1. Ja, denn: Da S als σ-Algebra abgeschlossen ist unter Komplementen und Schnitten gilt

$$\{x \in \Omega \mid x \in A, x \notin B\} = A \cap \underbrace{(\Omega \setminus B)}_{\in S} \in S.$$

2. Nein, denn: Es gilt

$$P(\Omega \cap \Omega) = 1 \not\leq 0 = |P(\Omega) - P(\Omega)|.$$

[Man betrachte als konkretes Beispiel z.B. die Gleichverteilung auf $\{0\}$.]

3. [Eigentlich war $G(1/2)$ gemeint – dies ist leider ein Tipfehler in der Wiederholungsklausur und wir haben dies bei der Korrektur im Notenschlüssel berücksichtigt. So wie die Aufgabe gestellt war, ist natürlich (was auch viele bemerkt haben) eine gültige (und mit voller Punktzahl bewertete) Antwort, dass $G(2)$ nicht definiert ist, da der Parameter der geometrischen Verteilung im Intervall $(0, 1)$ liegen muss.]

Eine Lösung für die eigentlich intendierte Aufgabe ist zum Beispiel: Nein, denn: *Angenommen*, es gibt eine solche $G(1/2)$-verteilte Zufallsvariable X auf (Ω, S, P). Dann gilt insbesondere

$$1 = P(\Omega) = P(X \geq 2) = P_X([2, \infty)) = G(1/2)([2, \infty)) = 1 - G(1/2)([0, 1]),$$

aber $G(1/2)([0, 1]) \geq G(1/2)(\{1\}) > 0$, was nicht sein kann.

4. Ja, denn: Die Abbildung $1/2 \cdot f + 1/2 \cdot g$ ist als Linearkombination λ^1-integrierbarer Funktionen λ^1-integrierbar, und es gilt

$$\int \Big(\frac{1}{2} \cdot f + \frac{1}{2} \cdot g\Big)\, d\lambda^1 = \frac{1}{2} \cdot \int f\, d\lambda^1 + \frac{1}{2} \cdot \int g\, d\lambda^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Wegen $f \geq 0$ und $g \geq 0$ ist auch $1/2 \cdot f + 1/2 \cdot g \geq 0$.

[*Häufige Fehler*: Häufig wurde nichts zur Integrierbarkeit oder zur Nichtnegativität von $1/2 \cdot f + 1/2 \cdot g$ gesagt.]

Aufgabe 2 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B, C \in S$ mit $P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$. Ist dann die Familie (A, B, C) bezüglich P stochastisch unabhängig?

2. Seien X und Y bezüglich P stochastisch unabhängige reellwertige Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P). Gilt dann bereits
$$P(X \cdot Y = 0) = P(X = 0) + P(Y = 0)\,?$$

3. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $A \in S$ mit $P(A \mid \Omega) = 1$. Folgt dann bereits $A = \Omega$?

4. Seien X und Y quadratintegrierbare reellwertige unkorrelierte Zufallsvariablen, die auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum definiert sind. Gilt dann bereits, dass
$$\mathrm{Var}(X - Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y)\,?$$

Lösung:

1. Nein, denn: Man betrachte etwa den Laplace-Raum $(\{0,1\}, \mathrm{Pot}(\{0,1\}), P)$ und die Ereignisse $\emptyset, \{0\}, \{1\}$. Dann gilt
$$P(\emptyset \cap \{0\} \cap \{1\}) = P(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(\emptyset) \cdot P(\{0\}) \cdot P(\{1\}).$$
Aber die Familie $(\emptyset, \{0\}, \{1\})$ ist nicht unabhängig, denn
$$P(\{0\} \cap \{1\}) = 0 \neq \frac{1}{4} = P(\{0\}) \cdot P(\{1\}).$$
[Dieses Beispiel lässt sich natürlich auf viele Wahrscheinlichkeitsräume verallgemeinern.]

[*Häufige Fehler*: Viele haben die Definition stochastischer Unabhängigkeit von Familien von Ereignissen nicht richtig verstanden.]

2. Nein, denn: Man betrachte etwa die konstante Zufallsvariable

$$\begin{aligned} X\colon (\Omega, S, P) &\longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})) \\ \omega &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

   Dann gilt
$$P(X \cdot X = 0) = 1 \neq 2 = P(X = 0) + P(X = 0).$$

   Außerdem ist die Familie (X, X) stochastisch unabhängig bezüglich P (s. Vorlesung/Übungen). [Denn für alle $A, B \in B(\mathbb{R})$ gilt

$$\begin{aligned} P(\{X \in A\} \cap \{X \in B\}) &= P(\{X \in A \cap B\}) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } 0 \in A \cap B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= P(\{X \in A\}) \cdot P(\{X \in B\}). \;] \end{aligned}$$

   [*Häufige Fehler*: Einige haben Vereinigung/Durchschnitt bzw. Addition/Multiplikation verwechselt.]

3. Nein, denn: Man betrachte etwa den deterministischen Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}), \delta_0)$. Dann gilt

$$\delta_0(\{0\} \mid \mathbb{R}) = \frac{\delta_0(\{0\})}{\delta_0(\mathbb{R})} = \delta_0(\{0\}) = 1.$$

   Aber natürlich $\{0\} \neq \mathbb{R}$. [Alternativ betrachte man einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum, der ein fast sicheres Ereignis enthält, das nicht mit dem Ergebnisraum übereinstimmt.]

   [*Häufige Fehler*: Oft wurde fälschlicherweise behauptet, dass aus $P(A) = 1$ bereits $A = \Omega$ folgt.]

4. Ja, denn: Wegen der Unkorreliertheit von X und Y gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X - Y) &= \mathrm{Var}(X) + 2 \cdot \mathrm{Var}(X, -Y) + \mathrm{Var}(-Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) - 2 \cdot \mathrm{Var}(X, Y) + \mathrm{Var}(Y) \\ &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y). \end{aligned}$$

   [*Häufige Fehler*: Häufig wurde versucht, ein Gegenbeispiel zu geben, dabei jedoch nicht darauf geachtet, dass die entsprechenden Zufallsvariablen unkorreliert sein müssten.]

Aufgabe 3 (3+3+3+3 = 12 Punkte)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen; begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (ca. ein bis drei Sätze).

1. Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum, sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und sei X eine reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P) mit $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X$. Gilt dann auch $X_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X^2$?

2. Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_{>0}}$ eine stochastisch unabhängige Folge identisch verteilter reellwertiger quadratintegrierbarer Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum und es gelte $E(X_1) = 0$ und $\operatorname{Var}(X_1) = 1$. Sei X eine $N(0,1)$-verteilte reellwertige Zufallsvariable und $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Gilt dann bereits
$$\lim_{n\to\infty} E\biggl(f \circ \Bigl(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\Bigr)\biggr) = E(f \circ X)\,?$$

3. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell und sei T ein erwartungstreuer Schätzer für eine Abbildung $\tau\colon \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$. Ist dann auch T^2 ein erwartungstreuer Schätzer für τ^2 ?

4. Sei $(\Omega, S, (P_\vartheta)_{\vartheta\in\Theta})$ ein statistisches Modell. Gibt es dann eine konsistente Folge von Schätzern auf diesem Modell für $\Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto 0$?

Lösung:

1. Ja, denn: Aufgrund der Rechenregeln für Grenzwerte in $\mathbb{R}$ gilt
$$\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\} \subset \{\omega \in \Omega \mid X_n^2(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X^2(\omega)\}.$$
Also folgt insbesondere
$$1 = P(\{\omega \in \Omega \mid X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X(\omega)\}) \le P(\{\omega \in \Omega \mid X_n^2(\omega) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} X^2(\omega)\}) \le 1,$$
und damit $X_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} X^2$.
[*Häufige Fehler*: In erschreckend vielen Fällen wurde versucht, über die Monotonie der Wurzel zu argumentieren (vermutlich durch Verwechslung mit einer ähnlich erscheinenden Aufgabe aus der ersten Klausur?).]

2. Ja, denn: Nach dem zentralen Grenzwertsatz gilt

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{k=1}^{n} X_k\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathrm{d}} X.$$

Mit der Beschreibung von Verteilungskonvergenz über stetige und beschränkte Testfunktionen folgt die Aussage.

3. Nein, denn: Man betrachte etwa den Laplace-Raum $(\{-1,1\}, \mathrm{Pot}(\{-1,1\}), P_1)$ den wir als statistisches Modell bezüglich der Indexmenge $\{1\}$ auffassen. Sei weiter $T\colon \{-1,1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ die kanonische Inklusion und $\tau\colon \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto 0$. Dann ist T bezüglich P_1 quadratintegrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} E_{P_1}(T) &= \quad\; 0 = \tau(1) \\ E_{P_1}(T^2) &= 1 \neq 0 = \tau(1)^2. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: T ist ein erwartungstreuer Schätzer für τ, aber T^2 ist kein erwartungstreuer Schätzer für τ^2.

[Alternativ könnte man z.B. auch einen erwartungstreuen Schätzer angeben, der nicht quadratintegrierbar ist.]

[*Häufige Fehler*: In manchen Fällen wurde fälschlicherweise behauptet, dass Quadrieren und Integrieren miteinander vertauschen.]

4. Ja, denn: Man betrachte etwa den konstanten Schätzer

$$\begin{aligned} T\colon (\Omega, S) &\longrightarrow (\mathbb{R}, B(\mathbb{R})) \\ \omega &\longmapsto 0. \end{aligned}$$

Die Folge $(T)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann offensichtlich eine konsistente Folge von Schätzern für $\Theta \longrightarrow \mathbb{R}, \vartheta \longmapsto 0$.

[*Häufige Fehler*: Oft wurde nicht sauber über die auftretenden Variablen in der Definition von konsisten Folgen von Schätzern quantifiziert.]

Aufgabe 4 ($4 + 4 + 2 = 10$ Punkte)**.**

1. Formulieren Sie den Satz über die Markov-Ungleichung!
2. Formulieren Sie den Satz über die Tschebyschev-Ungleichung!
3. Welcher Konvergenzsatz wird mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung bewiesen und um welche Konvergenzart handelt es sich in diesem Konvergenzsatz?

Lösung:

1. *Markov-Ungleichung.* Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei X eine bezüglich P integrierbare reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P). Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$, dass
$$P(|X| \geq c) \leq \frac{1}{c} \cdot E(|X|).$$
[*Häufige Fehler*: Manchmal wurde nicht korrekt über die Variablen quantifiziert, oft wurden die Beträge vergessen.]

2. *Tschebyschev-Ungleichung.* Sei (Ω, S, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X \colon \Omega \longrightarrow R$ eine bezüglich P quadratintegrierbare reellwertige Zufallsvariable auf (Ω, S, P). Dann gilt für alle $c \in \mathbb{R}_{>0}$, dass
$$P(|X - E(X)| \geq c) \leq \frac{1}{c^2} \cdot \operatorname{Var}(X).$$
[*Häufige Fehler*: Manchmal wurde nicht korrekt über die Variablen quantifiziert, oft wurden die Beträge vergessen.]

3. Das schwache Gesetz der großen Zahlen kann mit Hilfe der Tschebyschev-Ungleichung bewiesen werden; die entsprechende Konvergenzart ist stochastische Konvergenz.

   [Alternativ: Das starke Gesetz der großen Zahlen, fast sichere Konvergenz. In diesem Fall spielt die Tschebyschev-Ungleichung jedoch keine so prominente Rolle wie im schwachen Gesetz der großen Zahlen.]

Aufgabe 5 (3 + 3 + 4 = 10 Punkte)**.** Wir betrachten einen Wurf mit zwei Würfeln. Der erste Würfel ist ein gewöhnlicher fairer Sechserwürfel. Der zweite ist ein Würfel, bei dem eine Seite mit 1, zwei Seiten mit 2 und drei Seiten mit 3 beschriftet sind. Jede der sechs Seiten des zweiten Würfels fällt mit derselben Wahrscheinlichkeit. Außerdem beeinflussen sich die beiden Würfel gegenseitig nicht.

1. Modellieren Sie diese Situation geeignet. Erklären Sie Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf mit diesen beiden Würfeln mindestens einer der beiden Würfel eine 3 zeigt.

3. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einem Wurf mit diesen beiden Würfeln, wenn bekannt ist, dass einer der beiden Würfel eine 3 zeigt (aber nicht klar ist, welcher der beiden), auch der andere Würfel eine 3 zeigt.

Lösung:

1. Wir beschreiben das Problem durch den Wahrscheinlichkeitsraum

$$\big(\{1,\dots,6\} \times \{1,2,3\}, S := \operatorname{Pot}(\{1,\dots,6\}) \otimes \operatorname{Pot}(\{1,2,3\}), P\big)$$

wobei $P = P_1 \otimes P_2$ ist und P_1 bzw. P_2 durch die folgenden Zähldichten auf $\{1,\dots,6\}$ bzw. $\{1,2,3\}$ gegeben sind:

$$\begin{aligned} \{1,\dots,6\} &\longrightarrow [0,1] \\ \omega &\longmapsto \frac{1}{6}, \\ \{1,2,3\} &\longrightarrow [0,1] \\ 1 &\longmapsto \frac{1}{6} \\ 2 &\longmapsto 2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \\ 3 &\longmapsto 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die erste Komponente entspricht dabei dem Wurf mit dem ersten (fairen, daher Gleichverteilung) Würfel, die zweite Komponente dem Wurf mit dem zweiten Würfel. Da sich die beiden Würfel nicht gegenseitig beeinflussen, modellieren wir die Kombination beider Würfe stochastisch unabhängig (d.h. durch den entsprechenden Produktraum).

[Alternativ kann man eine entsprechendes Modell auch über geeignet verteilte stochastisch unabhängige Zufallsvariablen beschreiben.]

[*Häufige Fehler*: Oft wurde die Unabhängigkeit im Modell nicht begründet oder insgesamt unsauber modelliert.]

2. Sei
$$A := \big(\{3\} \times \{1,2,3\}\big) \cup \big(\{1,\dots,6\} \times \{3\}\big).$$
Dann ist A in der σ-Algebra S enthalten und A modelliert das Ereignis „mindestens einer der beiden Würfe zeigt eine 3.“

   Mit der Inklusions-/Exklusionsformel und der stochastischen Unabhängigkeit der beiden Würfe erhalten wir für die gesuchte Wahrscheinlichkeit
$$\begin{aligned} P(A) &= P(\{3\} \times \{1,2,3\}) + P(\{1,\dots,6\} \times \{3\}) - P(\{3\} \times \{3\}) \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{12}. \end{aligned}$$
[*Häufige Fehler*: Manchmal wurde die Wahrscheinlichkeit von Vereinigungen von Ereignissen nicht korrekt berechnet.]

3. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit entspricht der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(\{3\} \times \{3\} \mid A)$ (wobei A wie im zweiten Teil definiert ist; wegen $P(A) > 0$ ist diese bedingte Wahrscheinlichkeit wohldefiniert). Nach Definition und dem zweiten Teil gilt dabei
$$P(\{3\} \times \{3\} \mid A) = \frac{P\big((\{3\} \times \{3\}) \cap A\big)}{P(A)} = \frac{P(\{3\} \times \{3\})}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{7}.$$
[*Häufige Fehler*: In den meisten Fällen wurde das entsprechende Ereignis nicht korrekt ins Modell übersetzt.]

Aufgabe 6 ($5+3+2=10$ Punkte)**.** Die Lebensdauer (in Jahren) eines Toasters wird durch die Lebensdauer zweier Komponenten A und B bestimmt – der Toaster ist genau dann kaputt, wenn mindestens eine dieser beiden Komponenten kaputt ist. Die Lebensdauer der Komponente A sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_A \in \mathbb{R}_{>0}$, die Lebensdauer der Komponente B sei exponentialverteilt zum Parameter $\lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$. Außerdem sei bekannt, dass sich die Lebensdauern der beiden Komponenten nicht gegenseitig beeinflussen.

1. Bestimmen Sie (in Abhängigkeit von λ_A und λ_B) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Toaster eine Gesamtlebensdauer von mindestens zwei Jahren hat. Erklären Sie dabei Ihr Modell und Ihre Modellannahmen.

2. Die Parameter $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$ seien nun unbekannt. Durch die Beobachtung eines Toasters soll getestet werden, ob die zu erwartende Lebensdauer des Toasters mindestens zwei Jahre beträgt oder nicht. Modellieren Sie diese Situation durch ein geeignetes Alternativtestproblem und erklären Sie Ihr Modell.

   Hinweis. Die Exponentialverteilung zum Parameter $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ hat den Erwartungswert $1/\lambda$.

3. Geben Sie für dieses statistische Modell und dieses Testproblem einen Test zum Irrtumsniveau 0.05 an (und begründen Sie Ihre Antwort).

Lösung:

1. Seien $A, B \colon (\Omega, S, P) \longrightarrow (\mathbb{R}_{\geq 0}, B(\mathbb{R}_{\geq 0}))$ zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, S, P) mit Verteilung $\operatorname{Exp}(\lambda_A)$ bzw. $\operatorname{Exp}(\lambda_B)$. Die Zufallsvariable A beschreibt die Lebensdauer der ersten Komponente, die Zufallsvariable B die Lebensdauer der zweiten Komponente. Ihrer Unabhängigkeit entspricht im Problem, dass sich die Lebensdauern der Komponenten nicht gegenseitig beeinflussen.

   Dann modelliert das Ereignis $\{A \geq 2\} \cap \{B \cap 2\} \in S$ das Ereignis, dass die beiden Komponenten eine Lebensdauer von mindestens zwei Jahren haben (was äquivalent dazu ist, dass der Toaster eine Lebensdauer von mindestens zwei Jahren hat).

Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
P(\{A \geq 2\} \cap \{B \geq 2\}) &= P(\{A \geq 2\}) \cdot P(\{B \geq 2\}) \qquad (A, B \text{ unabhängig}) \\
&= \int \chi_{(2,\infty)} \cdot \lambda_A \cdot e^{-\lambda_A \cdot x} \, d\lambda^1(x) \cdot P(\{B \geq 2\}) \\
&= \Big[-e^{-\lambda_A \cdot x}\Big]_{x=2}^{\text{„}x=\infty\text{“}} \cdot P(\{B \geq 2\}) \\
&\qquad\qquad (\text{Lebesgue-Riemann}) \\
&= e^{-2\cdot\lambda_A} \cdot P(\{B \geq 2\}) \\
&= e^{-2\cdot(\lambda_A+\lambda_B)}. \qquad (\text{Analog für } B)
\end{aligned}$$

[Alternativ kann man die Verteilung von $\min(A, B)$ berechnen (s. Teil 2).]

[*Häufige Fehler*: Die meisten Modelle waren unvollständig und nicht begründet. Oft fehlte die Begründung der Unabhänigkeit oder die genaue Zuordnung zwischen Daten des Problems und Daten des Modells. Oft wurde zwar eine Zufallsvariable, die die Lebensdauer des Toasters modelliert, erwähnt, aber keine (korrekte) mathematische Beschreibung für diese Zufallsvariable im Rahmen des gewählten Modells gegeben. Außerdem wurde in vielen Fällen der Transformationssatz für Integrale nicht korrekt eingesetzt.]

2. Zu $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$ sei P_{λ_A,λ_B} das von (A, B) induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^2_{\geq 0}, B(\mathbb{R}^2_{\geq 0}))$, wenn A und B die Verteilung $\operatorname{Exp}(\lambda_A)$ bzw. $\operatorname{Exp}(\lambda_B)$ haben. Außerdem sei $Q_{\lambda_A,\lambda_B} := (P_{\lambda_A,\lambda_B})_{\min}$, d.h. die Wahrscheinlichkeitsverteilung Q_{λ_A,λ_B} auf $(\mathbb{R}_{\geq 0}, B(\mathbb{R}_{\geq 0}))$ modelliert die Lebensdauer des Toasters.

   Wir betrachten daher das folgende statistische Modell:

$$\big(\mathbb{R}_{\geq 0}, B(\mathbb{R}_{\geq 0}), (Q_{\lambda_A,\lambda_B})_{(\lambda_A,\lambda_B)\in\mathbb{R}^2_{>0}}\big).$$

   Als Nullhypothese unseres Alternativtestproblems betrachten wir den Fall, dass die erwartete Lebensdauer des Toasters kleiner als zwei Jahre ist; dies korrespondiert zur Parametermenge

$$\Theta_0 := \{(\lambda_A, \lambda_B) \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid E(Q_{\lambda_A,\lambda_B}) < 2\},$$

   und damit erhalten wir als zugehörige Alternative

$$\Theta_1 := \{(\lambda_A, \lambda_B) \in \mathbb{R}^2_{>0} \mid E(Q_{\lambda_A,\lambda_B}) \geq 2\}.$$

   [Man kann natürlich auch Nullhypothese und Alternative genau umgekehrt wählen.]

[Man kann die entsprechenden Erwartungswerte auch berechnen und dadurch eine konkretere Beschreibung der Nullhypothese und der Alternative erhalten: Seien $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann ist $Q_{\lambda_A,\lambda_B} = \operatorname{Exp}(\lambda_A + \lambda_B)$, denn: Für alle $t \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt

$$\begin{aligned} P(\{\min(A,B) > t\}) &= P(\{A > t\} \cap \{B > t\}) \\ &= P(\{A > t\}) \cdot P(\{B > t\}) \qquad (A \text{ und } B \text{ unabhängig}) \\ &= \int \chi_{(t,\infty)} \cdot \lambda_A \cdot e^{\lambda_A \cdot x} \, d\lambda^1(x) \cdot \int \chi_{(t,\infty)} \cdot \lambda_B \cdot e^{\lambda_B \cdot x} \, d\lambda^1(x) \\ &= e^{-(\lambda_A + \lambda_B)\cdot t}, \end{aligned}$$

und für alle $t \in \mathbb{R}_{<0}$ gilt $P(\{\min(A,B) \leq t\}) = 0$.

D.h. die Verteilungsfunktion von $\min(A,B)$ ist die einer $\operatorname{Exp}(\lambda_A + \lambda_B)$-verteilten Zufallsvariablen, und damit ist $\min(A,B)$ also $\operatorname{Exp}(\lambda_A + \lambda_B)$-verteilt. Daher gilt $E(Q_{\lambda_A,\lambda_B}) = 1/(\lambda_A + \lambda_B)$ und somit für alle $\lambda_A, \lambda_B \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$E(Q_{\lambda_A,\lambda_B}) \geq 2 \iff \lambda_A + \lambda_B \leq \frac{1}{2}.$$

Alternativ kann man den Erwartungswert von Q_{λ_A,λ_B} auch direkt ausrechnen oder die Gedächtnislosigkeit von $\min(A,B)$ benutzen, um zu zeigen, dass $\min(A,B)$ exponentialverteilt ist.]

3. Es ist in diesem Modell

$$\begin{aligned} T\colon (\mathbb{R}_{>0}, B(\mathbb{R}_{>0})) &\longrightarrow ([0,1], B([0,1)) \\ \omega &\longmapsto 0 \qquad \text{(oder auch 0.05)} \end{aligned}$$

ein (nicht sehr interessanter) Test zum Irrtumsniveau 0.05, denn für alle $\vartheta \in \Theta_0$ gilt

$$E_{P_\vartheta}(T) = E_{P_\vartheta}(0) = 0 \leq 0.05.$$

Aufgabe 7 (6 Punkte)**.** Sei Ω eine abzählbare Menge, sei $S := \mathrm{Pot}(\Omega)$ und sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf (Ω, S). Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reellwertiger Zufallsvariablen auf (Ω, S, P) und es gelte $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$. Zeigen Sie, dass dann bereits $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P\text{-f.s.}} 0$ folgt.

Lösung: Wegen $S = \mathrm{Pot}(\Omega)$ ist $\{\omega\} \in S$ für alle $\omega \in \Omega$.

Sei nun $\omega \in \Omega$ mit $P(\{\omega\}) > 0$ und sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Wegen $X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{stoch}} 0$ und $P(\{\omega\}) > 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{>N}} \quad P(|X_n| \geq \varepsilon) < P(\{\omega\}).$$

Insbesondere gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{>N}$ bereits $\omega \notin \{|X_n| \geq \varepsilon\}$; mit anderen Worten

$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{>N}} \quad |X_n(\omega)| < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen 0 konvergiert.

Also konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\{\omega \in \Omega \mid P(\{\omega\}) > 0\} \in S$ punktweise gegen 0. Da Ω abzählbar und $S = \mathrm{Pot}(\Omega)$ ist, gilt aber auch

$$1 = P(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} P(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega, P(\{\omega\})>0} P(\{\omega\}) = P(\{\omega \in \Omega \mid P(\{\omega\}) > 0\}).$$

Somit konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher (bezüglich P) gegen 0.

[*Häufige Fehler*: Fast immer wurden nur die Definitionen von stochastischer bzw. fast sicherer Konvergenz angegeben oder einfach Grenzwerte von Zufallsvariablen und Wahrscheinlichkeiten miteinander vertauscht.]