Proseminar: Graphentheorie

C. Löh/M. Wasmeier Januar 2025

Graphen sind elementare mathematische Strukturen, die vielfach in Erscheinung treten – sowohl in der Modellierung (z.B. Netzwerke aller Art) als auch in der theoretischen Mathematik (z.B. Cayleygraphen, Kombinatorik). Diese thematische Vielfalt spiegelt sich auch in den verwendeten Methoden wider.

In diesem Proseminar werden wir verschiedene Aspekte der Graphentheorie und ihrer Anwendungen kennenlernen. Insbesondere werden wir Techniken aus der linearen Algebra verwenden, um Graphen zu untersuchen.

Literatur. Das Seminar baut auf mehreren Quellen auf; diese sind für die jeweiligen Vorträge jeweils explizit angegeben. Sie können und sollen aber auch weitere Quellen suchen und lesen.

Voraussetzungen. Lineare Algebra I.

Formalitäten und Vorbereitung. Bitte beachten Sie die allgemeinen Hinweise zu (Pro)Seminaren:
https://loeh.app.uni-regensburg.de/teaching/proseminar_preparation.pdf

Organisatoren.
Prof. Dr. Clara Löh (clara.loeh@ur.de),
Malena Wasmeier (malena.wasmeier@ur.de)

Grundlagen der Graphentheorie und erste Anwendungen

Vortrag 1 (Grundbegriffe und Eulertouren)**.**
Mögliche Quellen: [Die17, Kapitel 1.1–1.4, 1.8] [HHM08, Kapitel 1.4.1–1.4.2]
Das Gebiet der Graphentheorie hat seinen Ursprung in einem historischen Problem: dem Königsberger Brückenproblem. Dieser Vortrag dient dazu, neben einer Einführung der Grundbegriffe, dieses Problem zu diskutieren.

- Führen Sie die folgenden Grundbegriffe ein und erklären Sie sie anhand von Beispielen: Graph, zusammenhängend, Weg (path), Kreis (cycle), Grad eines Knoten (degree), vollständig (complete), regulär
- Beschreiben Sie das Königsberger Brückenproblem.
- Führen Sie Eulerkreise ein.
- Beweisen Sie, dass ein zusammenhängender Graph genau dann einen Eulerkreis besitzt, wenn jeder seiner Knoten geraden Grad hat, und nutzen Sie dieses Ergebnis, um das Königsberger Brückenproblem zu lösen.

Vortrag 2 (Flüsse und Schnitte in Netzwerken)**.**
Mögliche Quellen: [Die17, Kapitel 1.10, 6.1 und 6.2] [Jun13, Kapitel 6.1]
Graphen können dazu verwendet werden, Flüsse durch Netzwerke zu modellieren, z.B. den Fluss von Wasser durch ein Rohrsystem oder den Fluss von Autos auf einem Straßennetz. Dabei stellt sich die Frage, welchen maximalen Fluss ein solches Netzwerk mit vorgegebenen Kapazitäten zulässt. In diesem Vortrag sollen Probleme dieser Art formalisiert werden.

- Führen Sie gerichtete Graphen und Netzwerke ein und diskutieren Sie einige Beispiele.
- Definieren Sie den Fluss in einem Netzwerk und führen Sie augmentierende Wege ein.
- Beweisen Sie Satz über augmentierende Wege ([Jun13, Satz 6.1.3]).
- Führen Sie Schnitte in Netzwerken ein und beweisen Sie das Max-Flow-Min-Cut-Theorem von Ford und Fulkerson.

Vortrag 3 (Cayley-Graphen)**.**
Mögliche Quellen: [Löh17, Kapitel 3.2, 5.1 und 5.2]
Graphen finden in vielen Gebieten der reinen Mathematik Anwendung, unter anderem in der geometrischen Gruppentheorie. In diesem Gebiet dienen Graphen als Hilfsmittel, um Gruppen als geometrische Objekte aufzufassen.

- Definieren Sie für eine endlich erzeugte Gruppe G mit endlichem Erzeugendensystem S den Cayley-Graphen $\mathrm{Cay}(G, S)$.
- Führen Sie als Beispiele Cayley-Graphen der Gruppen $\mathbb{Z}, \mathbb{Z}^2, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und S_3 mit ausgewählten Erzeugendedensystemen vor.
- Führen Sie den Begriff der Quasi-Isometrie metrischer Räume ein und erläutern Sie ihn an einem Beispiel.
- Erklären Sie, wie man einen Cayley-Graphen als metrischen Raum auffassen kann.
- Beweisen Sie, dass für zwei endliche Erzeugendensysteme S und S' einer Gruppe G die Cayley-Graphen $\mathrm{Cay}(G, S)$ und $\mathrm{Cay}(G, S')$ quasi-isometrisch sind.

Die Adjazenzmatrix eines Graphen

Vortrag 4 (Adjazenzmatrizen und ihre Anwendungen)**.**
Mögliche Quellen: [HHM08, Chapter 1.2.2] [Mat10, Miniature 10]
Einem endlichen Graphen kann man eine quadratische Matrix zuordnen, die codiert, welche Knoten des Graphen zueinander benachbart sind. Diese Matrix nennt man Adjazenzmatrix. Potenzen der Adjazenzmatrix können genutzt werden, um die Anzahl von Wegen bestimmter Länge zwischen zwei Knoten zu bestimmen.

- Führen Sie die Adjazenzmatrix ein und diskutieren Sie einige Beispiele.
- Erklären Sie den Algorithmus zum Zählen von Dreiecken in einem Graphen. Gehen Sie dabei auch kurz auf seine Laufzeit ein.
- Wiederholen Sie den Begriff eines Weges (walk).
- Beweisen Sie, dass der Eintrag der k-ten Potenz der Adjazenzmatrix an der Stelle (i, j) genau der Anzahl an Wegen der Länge k von Knoten i zu Knoten j entspricht.

Vortrag 5 (Der Petersen-Graph und Moore-Graphen).
Mögliche Quellen: [Mat10, Miniatures 13 and 14]
In diesem Vortrag sollen zwei Beweise vorgeführt werden, in denen die Eigenwerte von Adjazenzmatrizen zum Einsatz kommen.

- Führen Sie den Petersen-Graph ein.
- Beweisen Sie mithilfe der Eigenwerte der Adjazenzmatrizen, dass der vollständige Graph K_{10} nicht von drei Petersen-Graphen überdeckt werden kann.
- Führen Sie Moore-Graphen ein und diskutieren Sie grundlegende Eigenschaften. Betrachten Sie insbesondere den Petersen-Graph als Beispiel.
- Beweisen Sie, dass Moore-Graphen mit Taillenweite (girth) 5 und Grad mindestens 3 bereits Grad $3, 7$ oder 57 haben.

Die Laplace-Matrix eines Graphen

Vortrag 6 (Die Laplace-Matrix und ihre Eigenwerte).
Mögliche Quellen: [GR01, Kapitel 13.1] [Bap14, Kapitel 2.1, 4.1 und 4.4]
Neben der Adjazenzmatrix kann man einem endlichen Graphen auch die sogenannte Laplace-Matrix zuordnen. Diese codiert nicht nur, ob bestimmte Knoten miteinander benachbart sind, sondern auch den Grad jedes einzelnen Knoten.

- Definieren Sie die Inzidenz-Matrix und die Laplace-Matrix, diskutieren Sie einige Beispiele und zeigen Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Matrizen auf.
- Berechnen Sie die Eigenwerte der Laplace-Matrix des vollständigen Graphen K_n.
- Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Laplace-Matrix reell und nicht negativ sind und dass der kleinste Eigenwert immer 0 ist.
- Zeigen Sie, dass der Rang der Laplace-Matrix gleich $n - k$ ist, wobei n die Anzahl der Knoten und k die Anzahl der Zusammenhangskomponenten des Graphen ist.
- Leiten Sie eine obere Schranke für den größten Eigenwert der Laplace-Matrix her [Bap14, Satz 4.13 und Korollar 4.14].

Vortrag 7 (Spektrale Partitionierung).
Mögliche Quellen: [Mat10, Miniature 31]
Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Zerlegungen von Graphen, die auf gewisse Art und Weise günstig sind. Es soll ein Algorithmus besprochen werden, der mithilfe der Eigenwerte der Laplace-Matrix solche günstigen Zerlegungen findet.

- Beschreiben Sie das Problem des dünnsten Schnittes (sparsest cut problem) und geben Sie eine Anwendung dieses Problems an.
- Wiederholen Sie die Definition der Laplace-Matrix.

- Beweisen Sie, dass der zweitkleinste Eigenwert der Laplace-Matrix eines Graphen höchstens so groß ist wie die kleinstmögliche Dichte eines Schnitts in diesem Grapen.
- Erklären Sie den Algorithmus zur spektralen Partitionierung.
- Zeigen Sie, dass der Algorithmus zur spektralen Zerlegung immer einen Schnitt findet, dessen Dichte höchstens $\sqrt{d_{\max}\mu_2}$ beträgt, wobei $d_{\max}$ der höchste Knotengrad und μ_2 der zweitkleinste Eigenwert der Laplace-Matrix ist.

Vortrag 8 (Spannbäume zählen mit Determinanten).
Mögliche Quellen: [Die17, Kapitel 1.5] [Mat10, Miniature 21] [GR01, Kapitel 13.2]
Dieser Vortrag zeigt eine Methode, wie man mithilfe der Laplace-Matrix und der Determinantenfunktion die Anzahl der Spannbäume eines endlichen Graphen bestimmen kann.

- Definieren Sie Bäume und Spannbäume und erklären Sie diese Begriffe anhand von Beispielen.
- Wiederholen Sie die Definition der Laplace-Matrix.
- Formulieren Sie den Matrix-Baum-Satz und beweisen Sie diesen.
- Bestimmen Sie die Anzahl der Spannbäume des vollständigen Graphen K_n

Matchings

Vortrag 9 (Matchings in bipartiten Graphen).
Mögliche Quellen: [Die17, Kapitel 1.6 und 2.1] [HHM08, Kapitel 1.7.1 und 1.7.2]
Ein Matching in einem Graphen ist eine Menge an Kanten, bei der keine zwei Kanten einen gemeinsamen Knoten haben. Matchings bieten also die Möglichkeit, Knoten so zu paaren, dass jeder Knoten in höchstens einem Paar vorkommt. Eine mögliche Anwendung für Matchings in (bipartiten) Graphen wäre die Zuordnung von Tanzpartnern in einer Gruppe an Tanzschülern. Ziel dieses Vortrags ist es, den Heiratssatz von Hall für endliche bipartite Graphen zu beweisen.

- Führen sie bipartite Graphen ein und diskutieren Sie einige Beispiele.
- Definieren Sie Matchings und gehen Sie darauf ein, in welchen Alltagssituationen dieses Konzept Anwendung findet.
- Führen Sie augmentierende Wege ein und zeigen Sie den Satz von Berge.
- Formulieren und beweisen Sie den Heiratssatz (Satz von Hall) für endliche Graphen.

Vortrag 10 (Unendliche Matchings).
Mögliche Quellen: [HHM08, Kapitel 1.7.2, 3.1, 3.8.1] [CSM10, Kapitel A.5, H.3]
In diesem Vortrag soll untersucht werden, inwieweit sich der Heiratssatz von Hall auf unendliche Graphen verallgemeinern lässt.

- Wiederholen Sie den Heiratssatz für endliche Graphen.
- Formulieren Sie eine Version des Heiratssatzes für allgemeine Graphen (mit möglicherweise überabzählbar vielen Knoten).
- Erklären Sie die Aussage des Satzes von Tychonoff und den Zusammenhang mit dem Auswahlaxiom/Lemma von Zorn.
- Nutzen Sie den Heiratssatz für endliche Graphen und den Satz von Tychonoff, um den allgemeinen Heiratssatz zu beweisen.
- Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Voraussetzung der lokalen Endlichkeit im allgemeinen Heiratssatz nicht weggelassen werden kann.

Vortrag 11 (Perfekte Matchings).
Mögliche Quellen: [HHM08, Kapitel 1.7.4] [Die17, Kapitel 2.1 und 2.2] [Mat10, Miniature 24]
In vielen Situationen wünscht man sich Matchings, die alle Knoten eines Graphen mit einschließen. Solche Matchings nennt man perfekte Matchings.

- Definieren Sie perfekte Matchings und erklären Sie den Begriff anhand eines Beispiels.
- Zeigen Sie, dass ein bipartiter, regulärer Graph von Grad $k \geq 1$ ein perfektes Matching besitzt.
- Erklären Sie, wie man algorithmisch mithilfe der Determinantenfunktion entscheiden kann, ob ein Graph ein perfektes Matching besitzt, und gehen Sie kurz auf die Grenzen dieses Verfahrens ein.
- Formulieren und beweisen Sie den Satz von Tutte.

Zusatzvorträge

Vortrag 12 (Der Strassen-Algorithmus).
Mögliche Quellen: [CLRS09, Kapitel 4.2, 4,5 4.6] [BRV14, Kapitel 2.1, 2.2]
In vielen Anwendungen ist es nötig, große Matrizen miteinander zu multiplizieren (z.B. Adjazenzmatrizen von Graphen). Die intuitive Weise, ein solches Matrixprodukt auszurechnen, hat allerdings für große Matrizen hohe Laufzeit. Der Strassen-Algorithmus liefert eine Möglichkeit, Matrixprodukte schneller auszurechnen.

- Beschreiben Sie den Strassen-Algorithmus für Matrixmultiplikation.
- Erklären Sie kurz die Landau-Notation für Laufzeiten von Algorithmen.
- Formulieren Sie das Master Theorem und skizzieren Sie den Beweis.
- Nutzen Sie das Master Theorem um die Laufzeit des Strassen-Algorithmus zu bestimmen.

Vortrag 13 (Das PageRank-Verfahren).
Mögliche Quellen: [Aus13] [BL06]
Das Internet kann als (gerichteter) Graph modelliert werden, wobei die Knoten Webseiten und die Kanten Verlinkungen zwischen diesen darstellen. Wenn man in einer Suchmaschine nach bestimmten Begriffen sucht, wird einem eine geordnete Liste an relevanten Webseiten ausgegeben. Das PageRank-Verfahren liefert eine Möglichkeit, zu ermitteln, welche Webseiten „wichtig“ (und damit weiter oben in der Liste) und welche Webseiten „weniger wichtig“ (und somit weiter unten) sind.

- Beschreiben Sie das PageRank-Verfahren als Eigenwertproblem und führen Sie Beispiele vor.
- Gehen Sie auf Modifikationen des PageRank-Verfahrens ein und erklären Sie, warum diese durchgeführt werden.
- Formulieren Sie den Satz von Perron–Frobenius und erklären Sie den Zusammenhang zum PageRank-Verfahren.

Vortrag 14 (Ramsey-Zahlen).
Mögliche Quellen: [HHM08, Kapitel 1.8] [Bol98, Kapitel VI.1] [Die17, Kapitel 9.2]
Wieviele Gäste müssen auf eine Party eingeladen werden, damit gewährleistet ist, dass es unter den Gästen mindestens p viele gibt, die sich alle gegenseitig kennen, oder mindestens q viele, die sich alle gegenseitig nicht kennen? Die Antwort auf diese Frage ist durch die Ramsey-Zahl $R(p, q)$ gegeben, welche in diesem Vortrag näher untersucht werden soll.

- Definieren Sie für positive ganze Zahlen p und q die Ramsey-Zahl $R(p, q)$ und diskutieren Sie die Fälle $p = 1$ bzw. $p = 2$.
- Zeigen Sie $R(3, 3) = 6$ und $R(3, 4) = 9$. Geben Sie Beispiele für weitere bekannte Ramsey-Zahlen an.
- Beweisen Sie $R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$ und folgern Sie, dass Ramsey-Zahlen endlich sind.
- Führen Sie für endliche Graphen G und H die Ramsey-Zahl $R(G, H)$ ein und skizzieren Sie den Beweis dafür, dass für einen Baum T_m mit m Knoten und den vollständigen Graphen K_n bereits

  $$R(T_m, K_n) = (m-1) \cdot (n-1) + 1$$

  gilt.

Literatur

[Aus13] David Austin. How google finds your needle in the web's haystack. https://www.dam.brown.edu/people/mchb/la/GooglePageRank.pdf, 2013.

[Bap14] Ravindra B. Bapat. *Graphs and Matrices.* Universitext. Springer-Verlag London, 2 edition, 2014.

[BL06] Kurt Bryan and Tanya Leise. The $25,000,000,000 eigenvector. the linear algebra behind google. https://www.rose-hulman.edu/~bryan/googleFinalVersionFixed.pdf, 2006.

[Bol98] Béla Bollobás. *Modern Graph Theory*, volume 184 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, NY, 1 edition, 1998.

[BRV14] Anne Benoit, Yves Robert, and Frédéric Vivien. *A guide to algorithm design*. Applied Algorithms and Data Structures Series. CRC Press, Taylor & Francis Group, 1 edition, 2014.

[CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 3 edition, 2009.

[CSM10] Tullio Ceccherini-Silberstein and Coornaert Michel. *Cellular Automata and Groups*. Monographs in Mathematics. Springer Berlin, Heidelberg, 1 edition, 2010.

[Die17] Reinhard Diestel. *Graph Theory*, volume 173 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Berlin, Heidelberg, 5 edition, 2017.

[GR01] Chris Godsil and Gordon Royle. *Algebraic Graph Theory*, volume 207 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer New York, NY, 1 edition, 2001.

[HHM08] John M. Harris, Jeffry L. Hirst, and Michael J. Mossinghoff. *Combinatorics and Graph Theory*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, NY, 2 edition, 2008.

[Jun13] Dieter Jungnickel. *Graphs, Networks and Algorithms*, volume 5 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer Berlin, Heidelberg, 4 edition, 2013.

[Löh17] Clara Löh. *Geometric Group Theory*. Universitext. Springer Cham, 1 edition, 2017.

[Mat10] Jiří Matoušek. *Thirty-Three Miniatures*, volume 53 of *Student Mathematical Library*. American Mathematical Society, 1 edition, 2010.