Proseminar
„Ausgewählte Themen der Analysis“

Prof. Dr. C. Löh (clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de) Juli 2011

Dieses Seminar ergänzt die Vorlesungen Analysis I/II aus dem Sommersemester 2011 bzw. Wintersemester 2011/12. Wir werden uns mit verschiedenen Aspekten der Analysis beschäftigen, zum Beispiel mit

- klassischen Funktionen und irrationalen/transzendenten Zahlen,
- Topologie, und
- prominenten Ungleichungen in der Analysis.

Dabei werden wir viele Techniken und einige kuriose Anwendungen kennenlernen (zum Beispiel: Was hat Topologie mit der Anzahl der Primzahlen zu tun?).

Themen

Mehr zur geometrischen Reihe

Vortrag 1 (Conways Dame-Armee)**.** Beschreibung des Puzzles von Conway, Lösung über Invarianten und Reihen, weitere Auftreten des goldenen Schnitts.
Literatur: [7, Kapitel 6], [3]

Vortrag 2 (Der Löwe und der Christ)**.** Beschreibung des Problems „The lion and the christian“ (auch: „Lion and Man“), Lösung des Problems, allgemeine Spiele/Probleme dieser Art.

Literatur: [4, Problem 1], [6, Kapitel 7.1]

Vortrag 3 (Die Cantormenge)**.** Definition der Cantormenge, „Länge“ der Cantormenge, Überabzählbarkeit der Cantormenge, Selbstähnlichkeit der Cantormenge (evtl. etwas zur Hausdorffdimension und zu weiteren fraktalen Objekten wie z.B. der Kochschen Schneeflocke).

Literatur: [10, Kapitel 1.11], [8, Kapitel 1]

Klassische Ungleichungen in der Analysis

Vortrag 4 (Arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel)**.** Definition des arithmetischen, geometrischen und des harmonischen Mittels, Beweis(e) der Ungleichung zwischen arithmetischem, geometrischem und harmonischem Mittel, Anwendungen.
Literatur: [1, Kapitel 18], [5, Kapitel 7]

Vortrag 5 (Konvexität und die Jensensche Ungleichung)**.** Definition konvexer Funktionen, Beispiele konvexer Funktionen, Stetigkeit konvexer Funktionen, Charakterisierung (hinreichend differenzierbarer) konvexer Funktionen über die erste/zweite Ableitung, die Jensensche Ungleichung, die Jensensche Ungleichung für Integrale.

Literatur: [15, Kapitel 11.C.17–C.11.19]

Vortrag 6 (Die Höldersche Ungleichung)**.** Verallgemeinerte Mittel, die Höldersche Ungleichung für Summen/Reihen/Integrale, die Minkowskische Ungleichung, die ℓ^p-Norm.

Literatur: [15, Kapitel C.11.21–C.11.24], [16, Beispiel I.1.(g)]

Topologie

Vortrag 7 (Grundlagen der Topologie)**.** Wiederholung der topologischen Grundbegriffe (Topologie, Stetigkeit, etc.), Definition von Primzahlen, Beweis der Existenz unendlich vieler Primzahlen (Beweis von Euklid und Beweis via Topologie).
Literatur: [9, Kapitel 1], [1, Kapitel 1], [12, Kapitel 1.2]

Vortrag 8 (Die Quotiententopologie)**.** Definition der Quotiententopologie, Beispiele (z.B. Torus, Kleinsche Flasche), universelle Eigenschaft der Quotiententopologie (Charakterisierung stetiger Abbildungen aus einem Quotienten heraus), Vergleich mit der universellen Eigenschaft von Quotientenvektorräumen.

Literatur: [9, Kapitel 3]

Vortrag 9 (Abzählbarkeitseigenschaften topologischer Räume)**.** Definition der Abzählbarkeitseigenschaften topologischer Räume, Zusammenhang mit Folgenstetigkeit bzw. Folgenkompaktheit, Separabilität.

Literatur: [9, Kapitel 6]

Vortrag 10 (Konstruktion stetiger Funktionen)**.** Das Lemma von Urysohn, der Satz von Tietze, Ausblick auf Anwendungen (Partition der Eins).

Literatur: [9, Kapitel 8]

Vortrag 11 (Der Satz von Tychonoff, I: Topologische Vektorräume)**.** Formulierung des Satzes von Tychonoff, Definition topologischer Vektorräume, Beispiele topologischer Vektorräume, der topologische Dualraum, schwache und schwach-$*$-Topologie auf dem topologischen Dualraum, Anwendung des Satzes von Tychonoff auf die Einheitskugel im Dualraum.

Literatur: [9, Kapitel 2, 10.1, 10.2]

Vortrag 12 (Der Satz von Tychonoff, II: Beweis)**.** Das Lemma von Zorn (und Beziehung zum Auswahlaxiom), Ultrafilter, Beweis des Satzes von Tychonoff.

Literatur: [9, Kapitel 10.1, 10.3, 11]

Klassische Funktionen und irrationale/transzendente Zahlen

Vortrag 13 (Irrationalität von e und π)**.** Wiederholung Definition von e und π, Wiederholung der grundlegenden Eigenschaften von Sinus bzw. Cosinus, Beweis der Irrationalität von e und π.
Literatur: [1, Kapitel 7]

Vortrag 14 (Die Gammafunktion und Transzendenz von e)**.** Definition algebraischer/transzendenter Zahlen (über $\mathbf{Q}$), Definition der Gammafunktion über das Integral, Funktionalgleichung der Gammafunktion, Beweis der Transzendenz von e.

Literatur: [13, Kapitel 21], [15, Kapitel C.12.8]

Ablauf des Seminars

Notwendig für den Scheinerwerb sind:

- Ein 80-minütiger Vortrag; die verbleibenden 10 Minuten der Sitzung werden wir für die Diskussion verwenden.
- Regelmäßige Anwesenheit und aktive Teilnahme im Seminar (stellen Sie Fragen während der Vorträge, wenn Sie etwas nicht verstehen!).
- Ein Handout von ein bis zwei Seiten zu Ihrem Vortrag, das die wichtigsten Aspekte des Vortrags und ein paar kleine Übungsaufgaben für die anderen Teilnehmer enthält; diese Aufgaben sollen dazu anregen, sich nochmal mit den Inhalten des Vortrags zu beschäftigen.
- Eine schriftliche Ausarbeitung des Vortrags; diese muß bis spätestens eine Woche vor dem Vortrag abgegeben werden.
- Bitte kommen Sie spätestens zwei Wochen vor Ihrem Vortrag vorbei, um etwaige Fragen zu klären und den Vortrag durchzusprechen.
- Die Seminarleistungen werden wie in den entsprechenden Prüfungsordnungen benotet und angerechnet.

Hinweise zur Vorbereitung

- Beginnen Sie frühzeitig mit der Vorbereitung (am besten vor Beginn des Semesters) und nutzen Sie Sprechstunden und sonstige Betreuungsangebote.
- Grundvoraussetzung für einen Seminarvortrag ist das mathematische Verständnis des Stoffes. Dabei sollten Sie mehr über das Thema wissen als Sie im Vortrag erwähnen werden.
- Geben Sie zu Beginn einen kurzen Überblick über Ihren Vortrag. Stellen Sie die Hauptaussagen Ihres Vortrags soweit wie möglich an den Anfang; damit vermeiden Sie es, diese am Ende des Vortrags unter Zeitdruck erläutern zu müssen.
- Unterscheiden Sie für das Publikum klar erkennbar zwischen Wichtigem und weniger Wichtigem. Überfordern Sie die Zuhörer nicht durch zuviele technische Details (Sie sollten diese aber selbstverständlich verstanden haben). Erklären Sie lieber die wesentlichen Ideen/Beweisschritte.
- Strukturieren Sie Ihren Vortrag; Überschriften für einzelne Abschnitte können dabei helfen. Je logischer und natürlicher Ihr Vortrag aufgebaut ist, desto leichter hält sich der Vortrag und desto verständlicher ist er.
- Machen Sie sich im Aufbau des Vortrags unabhängig von der Literatur. Ein Aufbau, der für einen Text sinnvoll ist, kann für einen Vortrag ungeeignet sein.

– Seien Sie der Literatur gegenüber kritisch. Sie sollten auch versuchen, selbst geeignete ergänzende Literatur zu finden. Geeignete Ausgangspunkte sind zum Beispiel:

http://books.google.com
http://www.ams.org/mathscinet
http://www.springerlink.com

– Planen Sie den zeitlichen Ablauf des Vortrags. Überlegen Sie sich schon vor dem Vortrag, welche Teile Sie bei Zeitnot kürzen können und welche Sie, wenn es die Zeit erlaubt, ausführlicher behandeln wollen. Ein Probevortrag kann helfen den zeitlichen Ablauf des Vortrags abzuschätzen.

– Berücksichtigen Sie bei der Vorbereitung, was in den Vorträgen vor bzw. nach Ihrem eigenen Vortrag vorgesehen ist – im Zweifel sollten Sie sich mit den anderen Votragenden absprechen, damit es nicht zu Lücken, Inkonsistenzen oder Überschneidungen kommt. Überlegen Sie, welche Begriffe/Aussagen aus den vorherigen Vorträgen Sie nochmal kurz wiederholen sollten.

– Sie können die Ausarbeitung und das Handout handschriftlich abgeben. Andererseits bieten die Ausarbeitung und das Handout aber auch eine gute Gelegenheit, das Textsatzsystem LaTeX besser kennenzulernen [11]; dafür werden auch LaTeX-Vorlagen zur Verfügung gestellt:
http://www.mathematik.uni-regensburg.de/loeh/lifesem_ws1112/

– Achten Sie darauf, in der Ausarbeitung alle verwendeten Quellen vollständig und korrekt zu zitieren.

Hinweise zum Halten des Vortrags

– Schreiben Sie lesbar und lassen Sie Ihren Zuhörern genug Zeit zum Lesen. Vermeiden Sie es unbedingt, das gerade Geschriebene sofort wieder hinter einer anderen Tafel verschwinden zu lassen, wegzuwischen, oder zu schnell auf die nächste Folie umzuschalten. Planen Sie Ihr Tafelbild bzw. Ihre Folien.

– Schreiben Sie alle Definitionen an. Machen Sie bei allen Sätzen klar, was die genauen Voraussetzungen sind.

– Versuchen Sie, Definitionen und Sätze anschaulich bzw. durch Anwendungsbeispiele zu motivieren. Oft können im Vortrag auch komplizierte Rechnungen durch geeignete geometrische Argumente ersetzt werden.

– Alle eingeführten Begriffe sollten durch Beispiele illustriert werden.

– Sprechen Sie laut und deutlich.

– Versuchen Sie, Ihre Zuhörer für Ihren Vortrag zu interessieren und beziehen Sie Ihr Publikum mit ein. Eine Frage an das Publikum gibt diesem Zeit nachzudenken, selbst wenn niemand die Antwort weiß.

– Versetzen Sie sich in Ihr Publikum hinein. Könnten Sie Ihrem Vortrag folgen, auch wenn Sie sich nicht vorher ausführlich mit dem Thema beschäftigt hätten?

– Haben Sie keine Angst vor Fragen des Publikums – freuen Sie sich lieber über das Interesse! Zwischenfragen der Zuhörer helfen Ihnen auch einzuschätzen, wie gut das Publikum folgen kann und welche Dinge Sie etwas genauer erklären sollten.

Literatur

[1] M. Aigner, G. Ziegler. *Proofs from the BOOK*, vierte Auflage, Springer, 2009.

[2] A. Beutelspacher. *Das ist o.B.d.A. trivial!*, neunte Auflage, Vieweg+Teubner, 2009.

Ein nettes Büchlein, das dabei hilft, mathematisch sauber und verständlich zu formulieren.

[3] A. Beutelspacher, B. Petri. *Der Goldene Schnitt*, zweite Auflage, Spektrum Akademischer Verlag, 1995.

[4] B. Bollobás. *The Art of Mathematics, Coffee Time in Memphis*, Cambridge University Press, 2006.

[5] A. Engel. *Problem Solving Strategies*, Problem Books in Mathematics, Springer, 1998.

[6] H.-D. Gronau, H.-H. Langmann, D. Schleicher (Hrsg.). *50th IMO – 50 Years of International Mathematical Olympiads*, Springer, 2011.

[7] J. Havil. *Verblüfft?!: Mathematische Beweise unglaublicher Ideen*, Springer, 2009.

[8] G. Helmberg. *Getting Acquainted with Fractals*, de Gruyter, 2007.

[9] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2005.

[10] S.G. Krantz. *A Guide to Topology*, The Mathematical Association of America, 2009.

[11] F. Mittelbach, M. Goossens, J. Braams, D. Carlisle, C. Rowley. *The LaTeX Companion*, zweite Auflage, Addison-Wesley, 2004.

Eines der Standardwerke zur Benutzung von LaTeX; weitere Unterstützung finden Sie unter http://www.ctan.org/starter.html

[12] A. Schmidt. *Einführung in die algebraische Zahlentheorie*, Springer, 2007.

[13] M. Spivak. *Calculus*, Cambridge University Press, dritte Auflage, 2006.

[14] T. Tantau. *The* TikZ *and* PGF *Packages*, http://www.ctan.org/tex-archive/graphics/pgf/base/doc/generic/pgf/pgfmanual.pdf

Dokumentation des TikZ-Pakets für LaTeX, das es erlaubt, auf einfache Weise Graphiken in LaTeX zu erstellen.

[15] W. Walter. *Analysis 1*, siebte Auflage, Springer, 2004.

[16] D. Werner. *Funktionalanalysis*, sechste Auflage, Springer, 2007.