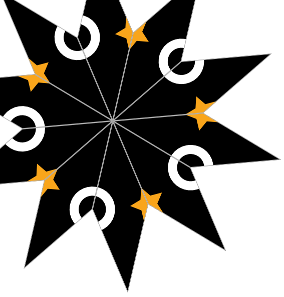
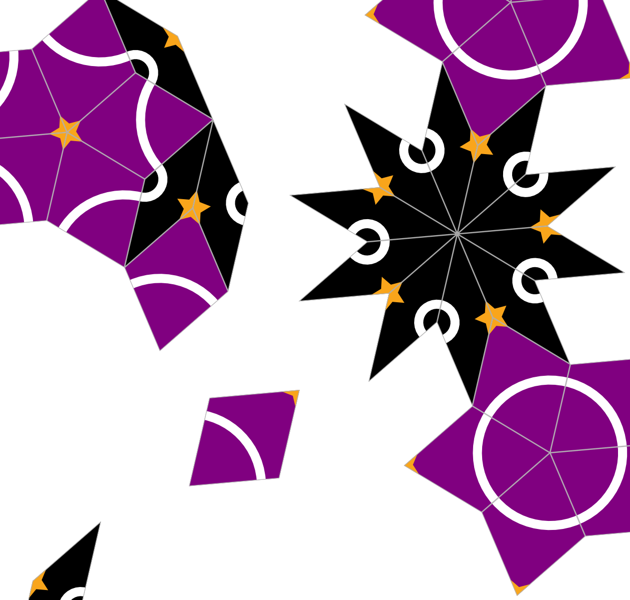
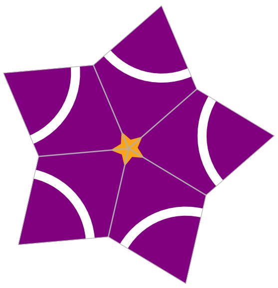




Penrose-Parkettierungen

Daniel Fauser, Clara Löh



In diesem Workshop werden wir Penrose-Parkettierungen kennenlernen: Die Penrose-Puzzleteile haben die Eigenheit, dass man mit ihnen die Ebene zwar lückenlos pflastern kann, dass alle solchen Parkettierungen aber notwendig aperiodisch sind, d.h. es gibt *keine* nicht-triviale Translation (Verschiebung), die eine solche Parkettierung in sich selbst überführt(!).

Aufgabe 1 (reguläre Parkettierungen).

1. Zeige, dass man die Ebene lückenlos mit kongruenten regulären Dreiecken (bzw. regulären Vierecken, regulären Sechsecken) pflastern kann.
2. Welche Symmetrien haben diese Parkettierungen?
3. Wo treten solche Parkettierungen in der Praxis auf?
4. Geht das auch mit anderen regulären Vielecken? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 2 (Parkettierungen durch Parallelogramme). Es sei ein Parallelogramm P gegeben. Zeige, dass man die Ebene lückenlos mit zu P kongruenten Parallelogrammen pflastern kann.
Bonusaufgabe. Zeige, dass dies sogar mit jedem Viereck funktioniert.

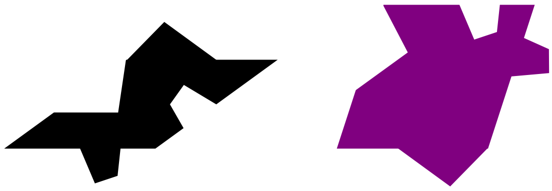
Aufgabe 3 (Penrose-Rauten). Wir betrachten Rauten mit Innenwinkeln

- $36°$, $144°$, $36°$, $144°$ (schwarz) bzw.
- $72°$, $108°$, $72°$, $108°$ (lila).

Was haben diese Winkel mit regulären Fünfecken zu tun?

clara.loeh@mathematik.uni-r.de
Schnupperstudium Mathematik, Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg
September 2016

Aufgabe 4 (Penrose-Fische und Penrose-Markierungen)**.** Wir modifizieren die obigen Rauten nun zu den folgenden „Fischen“:



Was haben diese „Fische“ mit den untenstehenden Markierungen zu tun? Was bedeutet das für Parkettierungen?

Bonusaufgabe. Entwickle weitere Penrose-Formen, die dasselbe Parkettierungsverhalten wie die Penrose-Fische haben. Gelingen Dir sogar Tierformen?

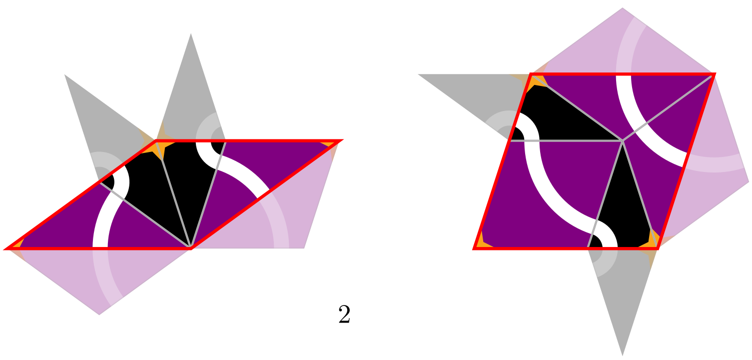
Konvention. Im folgenden betrachten wir nur Parkettierungen durch Penrose-Puzzleteile, bei denen die Markierungen der Puzzleteile zusammenpassen.

Aufgabe 5 (Penrose-Puzzle)**.**

1. Schneide die Puzzleteile der Vorlagen aus. Falte aus einem Papier eine Hülle, um die Puzzleteile aufzubewahren.
2. Experimentiere mit diesen Puzzleteilen.
3. Könnte die folgende Konstellation in einer lückenlosen Parkettierung der Ebene durch die Penrose-Puzzleteile auftreten? Begründe Deine Antwort!

Aufgabe 6 (Inflation von Penrose-Parkettierungen)**.**

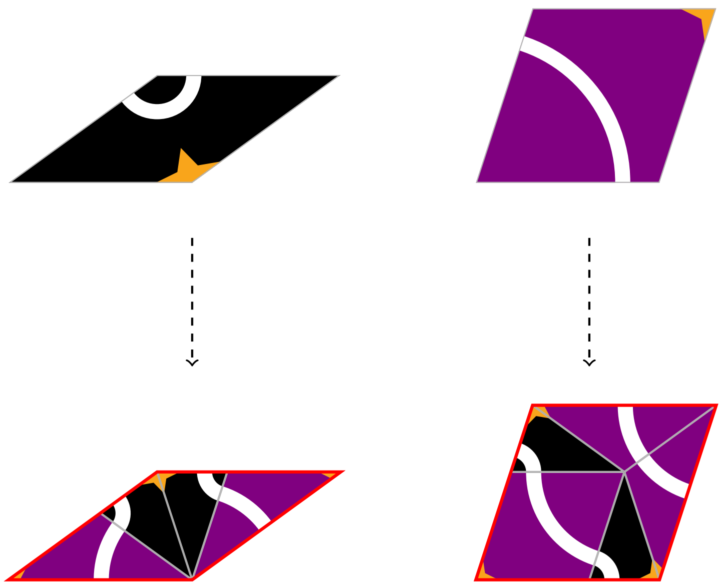
1. Es sei eine lückenlose Parkettierung der Ebene durch Penrose-Puzzleteile gegeben. Zeige, dass dann jedes halbe Puzzleteil in *genau einer* der beiden unten abgebildeten Situationen auftritt.



2. Welche Kantenlängen und Innenwinkel haben die roten Vierecke?
3. Wie verhalten sich die neuen Markierungen bezüglich Parkettierungen im Vergleich zu den ursprünglichen Markierungen der Penrose-Puzzleteile?

Satz (Aperiodizität von Penrose-Parkettierungen)**.** *Wiederholte Anwendung von Inflation zeigt: Jede lückenlose Parkettierung der Ebene durch Penrose-Puzzleteile ist* aperiodisch*, d.h. es gibt keine nicht-triviale Translation (Verschiebung), die die Parkettierung in sich selbst überführt.*

Aufgabe 7 (Deflation)**.** Zeige, dass der unten abgebildete Prozess aus einer Parkettierung mit Penrose-Puzzleteilen wieder eine Parkettierung mit entsprechend verkleinerten Penrose-Puzzleteilen liefert.



Satz (Existenz von Penrose-Parkettierungen)**.** *Wiederholte Anwendung von Deflation und Diagonalisierung zeigt: Es ist möglich, die Ebene lückenlos mit Penrose-Puzzleteilen zu pflastern.*

Weiterführendes Material

- D. Austin. Penrose Tiles Talk Across Miles, *AMS Feature Column*, August 2005, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-penrose
- D. Austin. Penrose Tilings Tied up in Ribbons, *AMS Feature Column*, Dezember 2005, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-ribbons
- C. Löh. *Geometrie (für Lehramt)*, Universität Regensburg, Vorlesungsskript, 2016. http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/geometrie_ss16/lecture_notes.pdf
- C. Löh. Penrose-Fische in OpenSCAD/STL (als Basis für 3D-Druck), 08/2016. http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/3dprints/penrose.scad http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/3dprints/penrose.stl
- R. Penrose. Pentaplexity: a class of nonperiodic tilings of the plane, *Math. Intelligencer* 2(1), S. 32–37, 1979/80.
- A.F. Ritter. *Lecture on Penrose Tilings*, Oxford Masterclass in Geometry, Vorlesungsskript, 2014.