Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 0 vom 19. April 2013

Aufgabe 1 (Mengentheoretische Topologie und Homotopie)**.** Seien X und Y homotopieäquivalente topologische Räume. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Dann sind X und Y homöomorph.
2. Ist X kompakt, so ist auch Y kompakt.
3. Ist X hausdorffsch, so ist auch Y hausdorffsch.

Aufgabe 2 (Schnitte)**.** Sei C eine Kategorie, seien $X, Y \in \operatorname{Ob}(C)$ und sei $p \in \operatorname{Mor}_C(X, Y)$. Der Morphismus p *besitzt einen (Rechts-)Schnitt in* C, wenn es einen Morphismus $s \in \operatorname{Mor}_C(Y, X)$ mit $p \circ s = \mathrm{id}_Y$ gibt.

1. Charakterisieren Sie die Morphismen in der Kategorie Set der Mengen, die einen (Rechts-)Schnitt besitzen.
2. Gilt die analoge Charakterisierung auch in den Kategorien $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$, Group, Top, …? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (Kontraktible Räume?)**.**

1. Zeigen Sie: Sind X und Y homotopieäquivalent und ist X wegzusammenhängend, so ist auch Y wegzusammenhängend. (Insbesondere sind kontraktible Räume also wegzusammenhängend.)
2. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist.

   Behauptung. Alle nicht-leeren wegzusammenhängenden topologischen Räume sind kontraktibel.

   Beweis. Sei X ein nicht-leerer wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $x_0 \in X$. Wir zeigen nun, dass die Inklusion $i\colon \{x_0\} \hookrightarrow X$ und die konstante Abbildung $c\colon X \longrightarrow \{x_0\}$ zueinander inverse Homotopieäquivalenzen sind: Offensichtlich ist $c \circ i = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$, und damit $c \circ i \simeq \mathrm{id}_{\{x_0\}}$.
   Wir betrachten nun die Komposition $i \circ c$: Da X wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem $x \in X$ einen stetigen Weg $\gamma_x\colon [0,1] \longrightarrow X$ mit $\gamma_x(0) = x_0$ und $\gamma_x(1) = x$. Die Homotopie

   $$\begin{aligned} h\colon X \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto \gamma_x(t) \end{aligned}$$

   zeigt dann, dass $i \circ c = h(\,\cdot\,,0)$ und $\mathrm{id}_X = h(\,\cdot\,,1)$ homotop sind. Also ist $X \simeq \{x_0\}$, d.h. X ist kontraktibel. □

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Exponentialgesetz und Homotopie)**.** Zeigen Sie, dass für alle topologischen Räume Y und alle lokalkompakten topologischen Räume X die Abbildung

$$\begin{aligned} \operatorname{map}\bigl(X \times [0,1], Y\bigr) &\longrightarrow \operatorname{map}\bigl([0,1], \operatorname{map}(X,Y)\bigr) \\ h &\longmapsto \bigl(t \mapsto h(\,\cdot\,,t)\bigr) \end{aligned}$$

wohldefiniert und bijektiv ist, und geben Sie mithilfe dieser Bijektion eine Reinterpretation des Homotopiebegriffs zwischen Abbildungen.

Hinweis. Ein topologischer Raum X heißt *lokalkompakt*, wenn folgendes gilt: Für jeden Punkt $x \in X$ und jede offene Umgebung U von x in X gibt es eine kompakte Umgebung $K \subset X$ von x in X mit $K \subset U$. (Manchmal wird dieser Begriff auch schwächer definiert!)

Sind X und Y topologische Räume, so ist die *kompakt-offene Topologie auf* $\operatorname{map}(X,Y)$ die Topologie, die von allen Mengen der Form

$$\bigl\{f \in \operatorname{map}(X,Y) \bigm| f(K) \subset U\bigr\},$$

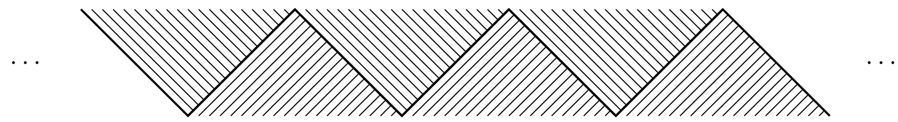
wobei $K \subset X$ kompakt und $U \subset Y$ offen ist, erzeugt wird.

Zeigen Sie nun: Sind Z und Y topologische Räume und ist Z lokalkompakt, so ist die Auswertungsabbildung

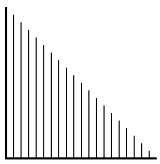
$$\begin{aligned} \operatorname{map}(Z,Y) \times Z &\longrightarrow Y \\ (f,z) &\longmapsto f(z) \end{aligned}$$

stetig. Schließen Sie daraus, dass die obige Abbildung zwischen Abbildungsräumen surjektiv ist.

Bonusaufgabe (Kontraktible Kämme)**.** Der Zick-Zack-Kamm ist die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ (mit der Teilraumtopologie):



Die einzelnen „Bausteine"



sind dabei von der Form

$$\bigl([0,1] \times \{0\}\bigr) \cup \bigcup_{x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \bigl(\{x\} \times [0, 1-x]\bigr).$$

Zeigen Sie, dass der Zick-Zack-Kamm kontraktibel ist, dass er aber bezüglich keines Basispunktes punktiert kontraktibel ist.

---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in den Übungen am 23. und 26. April 2013 besprochen