Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 14 vom 19. Juli 2013

Aufgabe 1 (geometrische Dimension von Gruppen)**.** Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von G. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $\operatorname{geomdim} H < \operatorname{geomdim} G$?
2. Ist $\operatorname{geomdim} H \leq \operatorname{geomdim} G$?

Hinweis. Wie kann man auf Überlagerungen von CW-Komplexen eine CW-Struktur definieren?

Aufgabe 2 (Yoneda-Lemma)**.**

1. Wie lautet das Yoneda-Lemma?
2. Wie beweist man das Yoneda-Lemma?
3. Was hat das Yoneda-Lemma mit dem Satz von Whitehead zu tun?

Aufgabe 3 (Klassifizierende Räume (diskreter) Gruppen)**.** Sei G eine Gruppe. Konstruieren Sie einen Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(G, 1)$.
Hinweis. Gehen Sie wie im höherdimensionalen Fall vor und ersetzen Sie freie abelsche Gruppen durch freie Gruppen und die Berechnung von Homotopiegruppen von Kofasern in niedrigen Graden durch den Satz von Seifert und van Kampen.

Aufgabe 4 (Kohomologie, homotopietheoretisch)**.** Sei G eine abelsche Gruppe, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei X ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(G, n)$.

1. Zeigen Sie, dass der Funktor
$$H^n(\,\cdot\,; G) := [\,\cdot\,, X] \colon \mathsf{Top_h} \longrightarrow \mathsf{Set}$$
über den Vergissfunktor $\mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{Set}$ faktorisiert.
2. Welche Verbindung können Sie über die (unpunktierte) lange koexakte Kofasersequenz zwischen $H^{n+1}(\,\cdot\,; G)$ und $H^n(\,\cdot\,; G)$ herstellen?
Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Mannigfaltigkeiten mit vorgegebener Fundamentalgruppe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$ und sei G eine endlich präsentierte Gruppe. Zeigen Sie, dass es eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n gibt, deren Fundamentalgruppe zu G isomorph ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, wann eine Gruppe *endlich präsentiert* heißt.
2. Schlagen Sie in der Literatur nach, wie die zusammenhängende Summe „#“ von Mannigfaltigkeiten definiert ist.
3. Beginnen Sie Ihre Konstruktion dann mit
$$(S^1 \times S^{n-1}) \# \dots \# (S^1 \times S^{n-1})$$
(und verwenden Sie den Satz von Seifert und van Kampen, um die Fundamentalgruppe solcher Mannigfaltigkeiten zu berechnen).
4. Kleben Sie nun geeignete „Henkel“ ein, um die Fundamentalgruppe geeignet zu modifizieren. Warum benötigen Sie dabei, dass die Dimension mindestens 4 ist?

Bonusaufgabe (explizite Modelle)**.** Konstruieren Sie explizite Modelle für Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $K(\,\cdot\,,1)$

1. für die Gruppe $\mathbb{Z}/3$, und
2. für die *dreidimensionale Heisenberggruppe*
$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x, y, z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}).$$
Hinweis. Geben Sie eine eigentlich diskontinuierliche Operation dieser Gruppe auf $\mathbb{R}^3$ an ...

Bonusaufgabe (klassifizierende Räume diskreter Gruppen)**.** Sei G eine Gruppe und sei X ein wegzusammenhängender CW-Komplex. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

1. Der Raum X ist ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(G, 1)$.
2. Die Fundamentalgruppe von X ist isomorph zu G und die universelle Überlagerung von X ist kontraktibel.

Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass jeder wegzusammenhängende CW-Komplex eine universelle Überlagerung besitzt. Wie kann man auf der universellen Überlagerung auch eine CW-Struktur definieren?

Bonusaufgabe (klassifizierende Räume)**.** Lesen Sie .... und beantworten Sie folgende Frage: Was hat $\mathbb{C}P^\infty$ mit der Klassifikation von eindimensionalen $\mathbb{C}$-Vektorbündeln zu tun?

---

freiwillige Abgabe