Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 3 vom 3. Mai 2013

Aufgabe 1 (Pushouts und Isomorphismen)**.** Sei C eine Kategorie und sei

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "i_2"'] & X_1 \arrow[d, "j_1"] \\ X_2 \arrow[r, "j_2"'] & X \end{tikzcd}$$

ein Pushout-Diagramm in C. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist j_1 ein Isomorphismus in C, so ist auch i_2 ein Isomorphismus in C.
2. Ist i_2 ein Isomorphismus in C, so ist auch j_1 ein Isomorphismus in C.

Aufgabe 2 (Koprodukt von Gruppen)**.** Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie sowohl erklären welcher Schritt nicht korrekt ist, als auch zeigen, dass die Behauptung falsch ist.

> *Behauptung.* Sind G_1 und G_2 Gruppen, so ist $G_1 \times G_2$ (mit komponentenweiser Verknüpfung) zusammen mit den beiden kanonischen Inklusionen $i_1 \colon G_1 \longrightarrow G_1 \times \{e\} \longrightarrow G_1 \times G_2$ und $i_2 \colon G_2 \longrightarrow \{e\} \times G_2 \longrightarrow G_1 \times G_2$ das Koprodukt von G_1 und G_2 in der Kategorie Group.
>
> *Beweis.* Sei H eine Gruppe und seien $\varphi_1 \colon G_1 \longrightarrow H$ und $\varphi_2 \colon G_2 \longrightarrow H$ Gruppenhomomorphismen. Dann ist
>
> $$\begin{aligned} \varphi \colon G_1 \times G_2 &\longrightarrow H \\ (g_1, g_2) &\longmapsto \varphi_1(g_1) \cdot \varphi_2(g_2) \end{aligned}$$
>
> ein Gruppenhomomorphismus und es gilt $\varphi \circ i_1 = \varphi_1$ und $\varphi \circ i_2 = \varphi_2$. Da Gruppenhomomorphismen auf $G_1 \times G_2$ durch die Werte auf den einzelnen Faktoren $G_1 \times \{e\}$ und $\{e\} \times G_2$ eindeutig bestimmt sind, ist φ auch der einzige Homomorphismus mit dieser Eigenschaft. Also ist $G_1 \times G_2$ zusammen mit i_1, i_2 das Koprodukt von G_1 und G_2 in Group. $\square$

Aufgabe 3 ((Ko)Produkte in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$)**.** Seien (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume. Seien $\pi_X \colon X \times Y \longrightarrow X$ bzw. $\pi_Y \colon X \times Y \longrightarrow Y$ die kanonischen Projektionen des kartesischen Produkts und seien $i_X \colon (X, x_0) \longrightarrow (X, x_0) \vee (Y, y_0)$ und $i_Y \colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0) \vee (Y, y_0)$ die kanonischen Inklusionen in die Einpunktvereinigung .

1. Zeigen Sie, dass $(X \times Y, (x_0, y_0))$ zusammen mit den punktierten Homotopieklassen $[\pi_X]_*$ und $[\pi_Y]_*$ das Produkt von (X, x_0) und (Y, y_0) in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ ist.
2. Zeigen Sie, dass $(X, x_0) \vee (Y, y_0)$ zusammen mit den punktierten Homotopieklassen $[i_X]_*$ und $[i_Y]_*$ das Koprodukt von (X, x_0) und (Y, y_0) in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ ist.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Monoide, Komonoidobjekte, und der Zusammenhang)**.** Sei Mon die Kategorie der Monoide und Monoidhomomorphismen (und Komposition von Abbildungen); ein *Monoid* ist dabei ein Tripel (M, m, e) bestehend aus einer Menge M, einer Abbildung $m \colon M \times M \longrightarrow M$ und einem Element $e \in M$ mit folgender Eigenschaft: für alle $x \in M$ gilt $m(x, e) = x = m(e, x)$. Ein *Monoidhomomorphismus* zwischen Monoiden (M, m, e) und (M', m', e') ist eine Abbildung $\varphi \colon M \longrightarrow M'$, so dass $\varphi(e) = e'$ und außerdem für alle $x, y \in M$ die Beziehung $\varphi(m(x, y)) = m'(\varphi(x), \varphi(y))$ gilt.

Sei C eine Kategorie, die ein Objekt $*$ enthält, das sowohl initial als auch terminal ist. Ein *Komonoidobjekt in C* ist ein Paar (S, c) bestehend aus einem Objekt S, für das das Koprodukt $S \sqcup S$ in C existiert, und einem Morphismus $c \in \operatorname{Mor}_C(S, S \sqcup S)$ mit

$$p_1 \circ c = \operatorname{id}_S \qquad \text{und} \qquad p_2 \circ c = \operatorname{id}_S;$$

dabei schreiben wir $p_1 \in \operatorname{Mor}_C(S \sqcup S, S)$ für den Morphismus, der von id_S auf dem ersten Summanden und vom eindeutigen Morphismus $* \colon S \longrightarrow * \longrightarrow S$ in C auf dem zweiten Summanden induziert ist, und analog $p_2 \in \operatorname{Mor}_C(S \sqcup S, S)$ für den Morphismus, der vom $*$ auf dem ersten Summanden und von id_S auf dem zweiten Summanden induziert ist.

1. Geben Sie eine anschauliche Beschreibung des Funktors
$$\pi_0 := \bigl[(S^0, 1), \;\cdot\;\bigr]_* \colon \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}\,.$$
Hinweis. Dafür müssen Sie den obigen Text nicht lesen ...

2. Erklären Sie die Beziehung zwischen der Definition von Monoiden und der Definition von Komonoidobjekten.

3. Sei $S \in \operatorname{Ob}(C)$ ein Objekt, für das das Koprodukt $S \sqcup S$ existiert. Zeigen Sie, dass S ein Komonoidobjekt in C ist, wenn der Morphismenfunktor $\operatorname{Mor}_C(S, \;\cdot\;) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ über Mon faktorisiert, d.h., falls es einen Funktor $M \colon C \longrightarrow \mathsf{Mon}$ mit
$$V \circ M = \operatorname{Mor}_C(S, \;\cdot\;)$$
gibt, wobei $V \colon \mathsf{Mon} \longrightarrow \mathsf{Set}$ den Vergissfunktor bezeichnet.
Hinweis. Die Umkehrung gilt natürlich auch, müssen Sie aber nicht zeigen.

4. Zeigen Sie, dass S^0 *kein* Komonoidobjekt in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ ist und schließen Sie daraus, dass der Funktor $\pi_0 \colon \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *nicht* über Mon faktorisiert.
Hinweis. Eine konkrete Beschreibung des Koprodukts in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ finden Sie in Aufgabe 3.

Bonusaufgabe (Adjungierte Funktoren und (Ko)Limiten)**.** Schlagen Sie in der Literatur den Begriff der adjungierten Funktoren nach und geben Sie Beispiele für adjungierte Funktoren. Was passiert mit (Ko)Limiten unter adjungierten Funktoren? Können Sie einen Bezug zu Aufgabe 2 und Aufgabe 3 herstellen?

Abgabe bis zum 10. Mai 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen