Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh Blatt 7 vom 31. Mai 2013

Hinweis. Sie dürfen auf diesem Übungsblatt verwenden, dass

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ n &\longmapsto \bigl[\mathbb{C} \supset S^1 \ni z \mapsto z^n \in S^1 \subset \mathbb{C}\bigr] \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus ist.

Aufgabe 1 (2 aus 3?)**.** Seien X, Y, Z wegzusammenhängende und lokal wegzusammenhängende topologische Räume, sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung und seien $q\colon Z \longrightarrow X$, $r\colon Y \longrightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $q \circ r = p$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist r eine Überlagerung, so ist auch q eine Überlagerung.
2. Ist q eine Überlagerung, so ist auch r eine Überlagerung.

Aufgabe 2 (Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern einer Überlagerung)**.** Sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung und sei $x_0 \in X$.

1. Zeigen Sie: Dann ist

$$\begin{aligned} p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ (y, [\gamma]_*) &\longmapsto \widetilde{\gamma}(1) \\ &\qquad \text{wobei } \widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow Y \text{ der } p\text{-Lift} \\ &\qquad \text{von } [0,1] \longrightarrow X, t \mapsto \gamma([t]) \text{ mit } \widetilde{\gamma}(0) = y \text{ ist} \end{aligned}$$

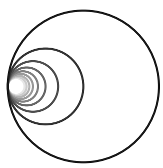
   eine wohldefinierte Rechtsoperation von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$.

2. Sei $y \in p^{-1}(x_0)$. Zeigen Sie, dass $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ die Standgruppe von y bezüglich dieser Operation ist.
3. Zeigen Sie, dass diese Operation genau dann transitiv ist, wenn die Faser $p^{-1}(x_0)$ in einer Wegzusammenhangskomponente von Y enthalten ist, d.h., wenn je zwei Punkte aus der Faser $p^{-1}(x_0)$ durch einen Weg in Y verbunden werden können.

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen.

Aufgabe 3 (universelle Überlagerungen – Beispiele)**.**

1. Skizzieren Sie eine einfach zusammenhängende Überlagerung der Einpunktvereinigung $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ und skizzieren Sie die Operation der Fundamentalgruppe von $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ auf der Faser des Basispunktes. Bestimmen Sie außerdem $\pi_{2013}((S^1, 1) \vee (S^1, 1))$.
2. Besitzt der Hawaiianische Ohrring (s. Bonusaufgabe von Blatt 5) eine einfach zusammenhängende Überlagerung?



Bitte wenden

Aufgabe 4 (universelle Überlagerung – Konstruktion)**.** Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender, semi-lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum und sei $x_0 \in X$. Sei

$$\widetilde{X} := \operatorname{map}_*\bigl(([0,1],0),(X,x_0)\bigr)/\sim,$$

wobei zwei punktierte Wege $\gamma, \eta \in \operatorname{map}_*(([0,1],0),(X,x_0))$ genau dann $\gamma \sim \eta$ erfüllen, wenn

$$\begin{aligned} S^1 = [0,1]/\{0,1\} &\longrightarrow X \\ [t] &\longmapsto \begin{cases} \gamma(t) & \text{falls } t \in [0,1/2] \\ \eta(2-2\cdot t) & \text{falls } t \in [1/2,1] \end{cases} \end{aligned}$$

das neutrale Element in $\pi_1(X,x_0)$ ist. Wir versehen $\widetilde{X}$ mit der Quotiententopologie der Teilraumtopologie der kompakt-offenen Topologie (s. Aufgabe 4 von Blatt 0) auf $\operatorname{map}([0,1],X)$.

1. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend ist.
2. Zeigen Sie, dass

   $$\begin{aligned} p\colon \widetilde{X} &\longrightarrow X \\ [\gamma]_\sim &\longmapsto \gamma(1). \end{aligned}$$

   eine Überlagerung ist.

   Hinweis. Sie können dies „zu Fuß" zeigen oder eine geeignete eigentlich diskontinuierliche Operation von $\pi_1(X,x_0)$ auf $\widetilde{X}$ konstruieren ...
3. Zeigen Sie, dass $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist.

   Hinweis. Sie können dies „zu Fuß" zeigen oder ein geeignetes Argument aus der Überlagerungstheorie verwenden.

Hinweis. Ein topologischer Raum X heißt *semi-lokal einfach zusammenhängend*, wenn jeder Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung $U \subset X$ mit folgender Eigenschaft besitzt: Der von der Inklusion $U \hookrightarrow X$ induzierte Homomorphismus $\pi_1(U,x) \longrightarrow \pi_1(X,x)$ ist trivial.

Bonusaufgabe (Überlagerungen eindimensionaler Komplexe)**.** Zeigen Sie: Ist (X, X_0) ein eindimensionaler Komplex (s. Bonusaufgabe von Blatt 6) und ist $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung, so ist $(Y, p^{-1}(X_0))$ ein eindimensionaler Komplex.

Abgabe bis zum 7. Juni 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen