Übungen zur Algebraischen Topologie I

Prof. Dr. C. Löh Blatt 8 vom 7. Juni 2013

Aufgabe 1 (Überlagerungen von Tori)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Der Kreis S^1 besitzt eine unendlich-blättrige wegzusammenhängende Überlagerung, die nicht einfach zusammenhängend ist.
2. Der Torus $S^1 \times S^1$ besitzt eine unendlich-blättrige wegzusammenhängende Überlagerung, die nicht einfach zusammenhängend ist.

Aufgabe 2 (Der Satz von Borsuk-Ulam in Dimension 2)**.** Wir nennen eine Abbildung $f \colon S^2 \longrightarrow S^1$ *antipodenerhaltend*, wenn $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in S^2$ gilt.

1. Zeigen Sie, dass es keine stetige antipodenerhaltende Abbildung $S^2 \longrightarrow S^1$ gibt.

   Hinweis. Bringen Sie $\mathbb{R}P^2$ ins Spiel und betrachten Sie in S^2 einen Weg von e_1^2 nach $-e_1^2$.
2. Beweisen Sie den *Satz von Borsuk-Ulam in Dimension* 2: Ist $f \colon S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, so gibt es ein $x \in S^2$ mit $f(x) = f(-x)$.
3. *Bonusaufgabe.* Folgern Sie: Es gibt keine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die (bezüglich der Teilraumtopologie) zu S^2 homöomorph ist.
4. *Bonusaufgabe.* Geben Sie eine anschauliche Interpretation des Satzes, indem Sie S^2 zum Beispiel als Erdoberfläche oder Fußball auffassen.

Aufgabe 3 (Residuell endliche Gruppen)**.** Eine Gruppe G heißt *residuell endlich*, wenn folgendes gilt: Für jedes $g \in G \setminus \{e\}$ gibt es eine endliche Gruppe F und einen Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon G \longrightarrow F$ mit $\varphi(g) \neq e$.

1. Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Geben Sie mithilfe von Überlagerungen und Wegen eine äquivalente Charakterisierung dafür, dass $\pi_1(X, x_0)$ residuell endlich ist.
2. Illustrieren Sie dies anhand von $(S^1, 1)$.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Klassifikation der Überlagerungen)**.**

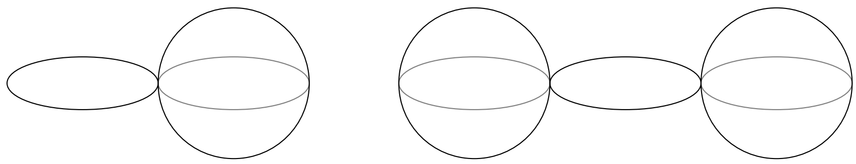
1. Zeigen Sie: Ist $\varphi\colon C \longrightarrow D$ eine natürliche Äquivalenz von Kategorien und sind $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ mit $\varphi(X) \cong_D \varphi(Y)$, so folgt $X \cong_C Y$.

2. Zeigen Sie, dass der nachfolgende „Beweis“ nicht korrekt ist, indem Sie erklären welcher Schritt nicht korrekt ist:

   Es sei (X, x_0) ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender punktierter topologischer Raum und seien $q\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $q'\colon (Y', y_0') \longrightarrow (X, x_0)$ punktierte Überlagerungen mit wegzusammenhängenden Totalräumen. Außerdem sei vorausgesetzt, dass die Gruppen $\pi_1(q)(\pi_1(Y, y_0))$ und $\pi_1(q')(\pi_1(Y', y_0'))$ isomorph sind.

   > *Behauptung.* Dann sind die Totalräume Y und Y' homöomorph.
   >
   > *Beweis.* Wir wenden Teil 1 auf die Klassifikation der Überlagerungen von (X, x_0) an und erhalten somit, dass q und q' in $\mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)}$ isomorph sind. Insbesondere sind dann auch die Totalräume Y und Y' homöomorph. $\square$

3. *Bonusaufgabe.* Zeigen Sie, dass die nachfolgenden Räume (die aus Kreisen und zweidimensionalen Sphären zusammengesetzt sind) *nicht* homöomorph sind:

4. *Bonusaufgabe.* Folgern Sie, dass die Behauptung aus Teil 2 nicht korrekt ist.

Bonusaufgabe (klassifizierende Räume torsionsfreier Gruppen)**.** Sei G eine Gruppe. Ist $S \subset G$ endlich, so schreiben wir

$$\Delta_G(S) := \Bigl\{ f\colon G \longrightarrow [0,1] \Bigm| f|_{G\setminus S} = 0 \text{ und } \sum_{g \in S} f(g) = 1 \Bigr\}.$$

Wir definieren $\Delta(G) := \bigcup_{S \subset G, |S| < \infty} \Delta_G(S)$, versehen $\Delta(G)$ mit der Kolimestopologie und betrachten die Linksoperation

$$\begin{aligned} G \times \Delta(G) &\longrightarrow \Delta(G) \\ (g, f) &\longmapsto \bigl(h \mapsto f(g^{-1} \cdot h)\bigr) \end{aligned}$$

in Top von G auf $\Delta(G)$.

1. Zeigen Sie, dass $\Delta(G)$ (bezüglich allen Basispunkten) punktiert kontraktibel ist.

2. Bestimmen Sie die Fundamentalgruppe des Quotienten $G \backslash \Delta(G)$ (bezüglich allen Basispunkten), falls G torsionsfrei ist.

Abgabe bis zum 14. Juni 2013, 08:00 Uhr, in die Briefkästen