Algebraische Topologie I
im WS 2015/16 – Kurzskript

Prof. Dr. C. Löh Wintersemester 2015/16

Inhaltsverzeichnis

-1. Literaturhinweise 1

0. Einführung 3

1. Was ist algebraische Topologie? 4
   1.1. Topologische Bausteine . . . 4
   1.2. Kategorien und Funktoren . . . 10
   1.3. Homotopie . . . 18
   1.4. Homotopieinvarianz – Was ist algebraische Topologie? . . . 22

2. Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie 28
   2.1. Die Fundamentalgruppe – eine Gruppenstruktur auf π_1 . . . 28
   2.2. Die Fundamentalgruppe – divide et impera . . . 32
   2.3. Überlagerungen – Grundbegriffe . . . 40
   2.4. Überlagerungen – Liftungseigenschaften . . . 45
   2.5. Überlagerungen – Klassifikation . . . 49
   2.6. Anwendungen . . . 58

3. Axiomatische Homologie 60
   3.1. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome . . . 60
   3.2. Fingerübungen . . . 61
   3.3. Homologie von Sphären und Einhängungen . . . 65
   3.4. Verkleben von Räumen – die Mayer-Vietoris-Sequenz . . . 73
   3.5. Ausblick: Existenz und Eindeutigkeit von Homologietheorien . . . 78

4. Singuläre Homologie 80
   4.1. Anschauliche Skizze der Konstruktion . . . 80
   4.2. Konstruktion singulärer Homologie . . . 80
   4.3. Homotopieinvarianz von singulärer Homologie . . . 87
   4.4. Ausschneidung in singulärer Homologie . . . 90
   4.5. Singuläre Homologie als gewöhnliche Homologietheorie . . . 96
   4.6. Singuläre Homologie und Homotopiegruppen . . . 103

5. Zelluläre Homologie 108
   5.1. CW-Komplexe . . . 108
   5.2. Zelluläre Homologie . . . 113
   5.3. Vergleich von Homologietheorien auf CW-Komplexen . . . 120
   5.4. Die Euler-Charakteristik . . . 124

Version vom 4. Februar 2016
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

A. Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie A.1
A.1. Topologische Räume A.1
A.2. Stetige Abbildungen A.3
A.3. (Weg-)Zusammenhang A.4
A.4. Hausdorffräume A.5
A.5. Kompaktheit A.6

B. Kogruppenobjekte und induzierte Gruppenstrukturen B.1

C. Freie (amalgamierte) Produkte von Gruppen C.1
C.1. Freie (amalgamierte) Produkte C.1
C.2. Freie Gruppen C.2

D. Gruppenoperationen D.1

E. Homologische Algebra E.1
E.1. Exakte Sequenzen E.1
E.2. Kettenkomplexe und Homologie E.5
E.3. Kettenhomotopie E.9

W. Wörterbuch W.1

-1. Literaturhinweise

Die folgenden Listen enthalten eine kleine Auswahl an Literatur zur algebraischen Topologie und verwandten Gebieten.

Algebraische Topologie

[1] M. Aguilar, S. Gitler, C. Prieto. *Algebraic Topology from a Homotopical Viewpoint*, Springer, 2002.

[2] W.F. Basener. *Topology and Its Applications*, Wiley, 2006.

[3] J.F. Davis, P. Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*, AMS, 2001.

[4] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.

[5] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
http://www.math.cornell.edu/∼hatcher/AT/ATpage.html

[6] W. Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005.

[7] W.S. Massey. *Algebraic Topology: an Introduction*, siebte Auflage, Springer, 1989.

[8] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, dritte Auflage, Springer, 1997.
Hinweis. In diesem Buch wird singuläre (Ko)Homologie mithilfe von Würfeln statt Simplizes definiert.

[9] P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1999.

[10] J. Strom. *Modern Classical Homotopy Theory*, American Mathematical Society, 2012.

[11] T. tom Dieck. *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2008.

Mengentheoretische Topologie

[12] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2008.

[13] J.L. Kelley. *General Topology*, Springer, 1975.

[14] A.T. Lundell, S. Weingram. *Topology of CW-complexes*. Van Nostrand, New York, 1969.

[15] J.R. Munkres. *Topology*, zweite Auflage, Pearson, 2003.

[16] L.A. Steen. *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

Homologische Algebra

[17] C. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 2008.

Kategorientheorie

[18] . Brandenburg. *Einfhrung in die Kategorientheorie: Mit ausfhrlichen Erklrungen und zahlreichen Beispielen*, Springer-Spektrum, 2015.

[19] H. Herrlich, G.E. Strecker. *Category Theory*, dritte Auflage, Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann, 2007.

[20] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998.

[21] B. Richter. *Kategorientheorie mit Anwendungen in Topologie*, Vorlesungsskript, WS 2010/11, Universität Hamburg,
http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/cats.pdf

... und viele weitere Bücher; je nach eigenen Vorlieben werden Ihnen manche Bücher besser gefallen als andere.

0. Einführung

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in die algebraische Topologie, genauer gesagt in die Theorie der Fundamentalgruppe sowie singuläre und zelluläre (Ko)Homologie.

Die Kernidee der algebraischen Topologie ist es, topologische Probleme in algebraische Probleme zu übersetzen; dabei werden topologische Räume in algebraische Objekte (z.B. Vektorräume) und stetige Abbildungen in entsprechende Homomorphismen (z.B. lineare Abbildungen) übersetzt. Die dafür geeignete Abstraktionsebene ist die Sprache der Kategorien und Funktoren.

Die algebraische Topologie beschäftigt sich mit der Klassifikation topologischer Räume bzw. stetiger Abbildungen bis auf „stetige Deformationen," sogenannten Homotopien. Dazu versucht man, homotopieinvariante Funktoren zu konstruieren und zu studieren. Die Kunst dabei ist, dass solche Funktoren genug interessante Information über topologische Räume enthalten sollen, dabei aber trotzdem noch hinreichend gut berechenbar sein sollten.

Ein klassisches Beispiel homotopieinvarianter Funktoren sind (Ko)Homologietheorien wie singuläre oder zelluläre (Ko)Homologie, deren grundlegenden Eigenschaften und Aspekte wir in diesem Semester kennenlernen werden. Eine erste intuitive Beschreibung von diesen (Ko)Homologietheorien ist, dass sie in einem gewissen Sinne beschreiben, „welche und wieviele Löcher" ein topologischer Raum hat.

Weitere Beispiele sind etwa Homotopiegruppen (s. Algebraische Topologie I).

Die algebraische Topologie hat eine Vielzahl von Anwendungen, sowohl in der theoretischen als auch in der angewandten Mathematik, zum Beispiel:

- *Topologie*
  - Fixpunktsätze
  - (Nicht)Einbettbarkeitsresultate
  - Studium von Geometrie und Topologie von Mannigfaltigkeiten
  - ...
- *Andere Gebiete der theoretischen Mathematik*
  - Fundamentalsatz der Algebra
  - (Nicht)Existenz gewisser Divisionsalgebren
  - Freiheits- und Endlichkeitsaussagen in der Gruppentheorie
  - Vorbildfunktion für Teile der algebraischen Geometrie
  - ...
- *Angewandte Mathematik*
  - Existenz von Nash-Gleichgewichten in der Spieltheorie
  - Konfigurationsprobleme in der Robotik
  - Untere Komplexitätsschranken für verteilte Algorithmen
  - Höhere Statistik
  - Knotentheorie
  - ...

1. Was ist algebraische Topologie?

Wir erklären im folgenden, wie man den Übersetzungsprozess von der Topologie in die Algebra mit Hilfe der Sprache der Kategorientheorie formalisieren kann. Dazu führen wir grundlegende Begriffe der Sprache der Kategorientheorie ein, illustrieren diese am Beispiel topologischer Räume und algebraischer Strukturen, und erklären an einem Beispiel das Grundprinzip der algebraischen Topologie.

1.1. Topologische Bausteine

Wir beginnen zum Einstieg mit grundlegenden Beispielen und Konstruktionen topologischer Räume – um später einen hinreichend großen Fundus an Beispielen zur Verfügung zu haben.

Konstruktionsprinzip: Teilräume

Eine erste Möglichkeit aus topologischen Räumen neue topologische Räume zu konstruieren, ist mithilfe der Teilraumtopologie (Bemerkung A.6).

Die wichtigsten Bausteine in der algebraischen Topologie sind Bälle und Sphären, sowie Simplizes (Abbildung (1.2)):

Definition 1.1 (Ball, Sphäre, Standardsimplex)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Der *n-dimensionale Ball* ist definiert als

$$D^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\|_2 \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

  (versehen mit der Teilraumtopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$).
- Die *n-dimensionale Sphäre* ist definiert als

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\|_2 = 1 \right\} = \partial D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

  (versehen mit der Teilraumtopologie).
- Das *n-dimensionale Standardsimplex* ist definiert als

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1 \geq 0, \ldots, x_{n+1} \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

  (versehen mit der Teilraumtopologie). Mit anderen Worten: Das Standardsimplex Δ^n ist die konvexe Hülle von den Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung 1.3 (Bälle vs. Simplizes)**.** Ist $n \in \mathbb{N}$, so sind D^n und Δ^n homöomorph. Im Kontext der singulären (Ko)Homologie ist das Standardsimplex aufgrund seiner offensichtlichen kombinatorischen Struktur jedoch dem Ball vorzuziehen.

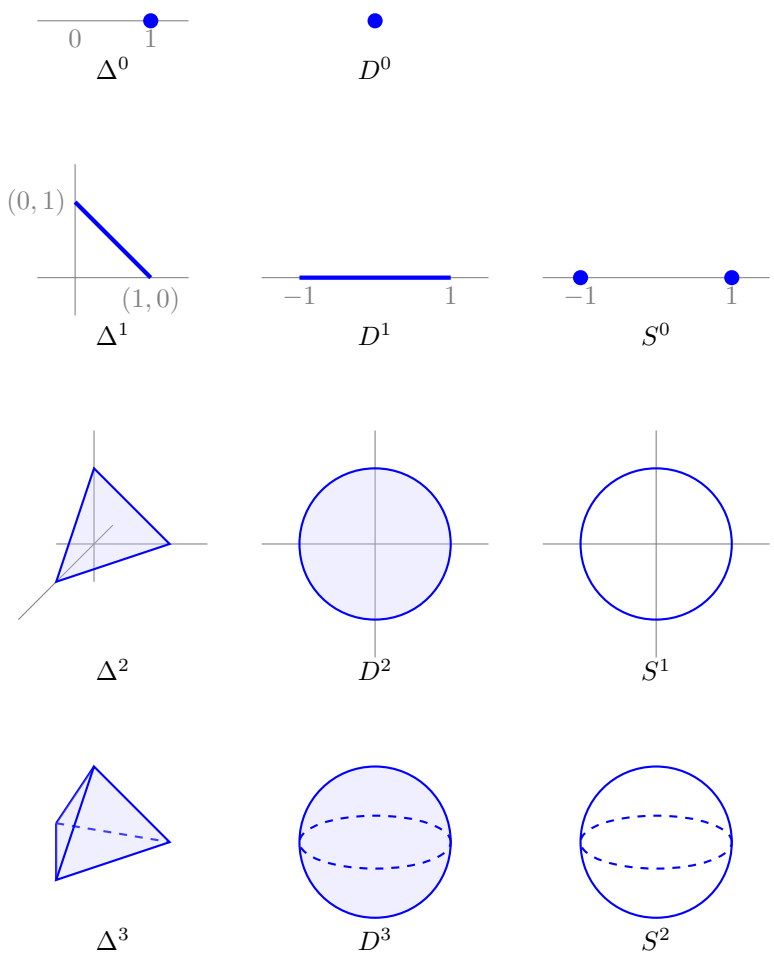


Abbildung (1.2): Standardsimplizes, Bälle, Sphären

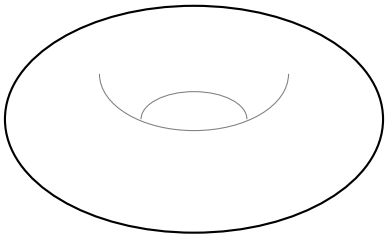


Abbildung (1.5): Der zweidimensionale Torus

Konstruktionsprinzip: Produkträume

Eine Möglichkeit aus zwei topologischen Räumen einen neuen topologischen Raum zu konstruieren, ist mithilfe der Produkttopologie (Bemerkung A.7).

Definition 1.4 (Torus)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Der *n-dimensionale Torus* ist definiert als $(S^1)^n$, versehen mit der Produkttopologie (Abbildung (1.5)).

In der Definition von Homotopie werden Produkträume der Form $X \times [0,1]$ eine zentrale Rolle Spielen (Kapitel 1.3).

Konstruktionsprinzip: Quotientenräume und Verkleben

Quotientenräume bzw. die Quotiententopologie sind ein Hilfsmittel, um das „Verkleben“ topologischer Räume zu modellieren:

Definition 1.6 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei Y eine Menge und sei $p\colon X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Die *von p auf Y induzierte Quotiententopologie* ist als

$$\left\{U \subset Y \;\middle|\; p^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\right\}$$

definiert.

In den meisten Anwendungen ist die surjektive Abbildung $p\colon X \longrightarrow Y$ dabei in der Form gegeben, dass man auf X eine Äquivalenzrelation betrachtet, Y die Menge der Äquivalenzklassen ist und p die kanonische Projektion ist.

Beispiel 1.8 (Möbiusband)**.** Das *Möbiusband* ist der Quotientenraum

$$M := [0,1] \times [0,1]/\sim,$$

wobei $[0,1]\times[0,1]$ die Produkttopologie trägt und die Äquivalenzrelation „$\sim$“ wie folgt definiert ist: Für alle $x, y \in [0,1]\times[0,1]$ gilt genau dann $x \sim y$, wenn $x = y$ ist oder die Bedingungen $x_1 \in \{0,1\}$, $y_1 = 1-x_1$ und $y_2 = 1-x_2$ erfüllt sind. Dabei versehen wir M mit der Quotiententopologie, die von der kanonischen Projektion $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]/\sim$ induziert wird (Abbildung (1.7)).

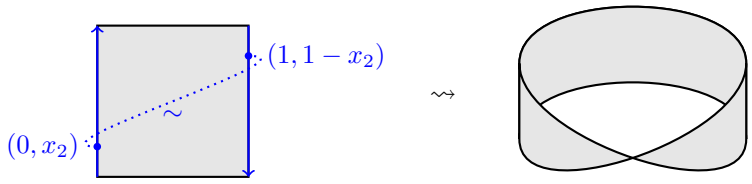


Abbildung (1.7): Das Möbiusband als Quotientenraum

Definition 1.9 (reell-projektive Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *n-dimensionale reell-projektive Raum* ist definiert als

$$\mathbb{R}P^n := S^n/(\forall_{x \in S^n} \quad x \sim -x),$$

versehen mit der Quotiententopologie.

Caveat 1.10. Ist X ein topologischer Raum, ist Y eine Menge, ist $p\colon X \longrightarrow Y$ surjektiv und trägt Y die von p induzierte Quotiententopologie, so ist p im allgemeinen *nicht* offen! (D.h. im allgemeinen bildet p *nicht* offene Mengen auf offene Mengen ab.)

Das Verkleben zweier topologischer Räume wird mithilfe von Pushouts modelliert. Als ersten Zwischenschritt modellieren wir das „Nebeneinanderlegen“ topologischer Räume durch die disjunkte Vereinigungstopologie:

Definition 1.11 (disjunkte Vereinigungstopologie)**.** Sei I eine Menge und sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann ist die *disjunkte Vereinigunstopologie* auf der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ als

$$\left\{U \subset \bigsqcup\nolimits_{i \in I} X_i \;\middle|\; \forall_{j \in I} \quad i_j^{-1}(U) \text{ offen in } X_j\right\}$$

definiert, wobei $i_j\colon X_j \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ zu $j \in I$ die kanonische Inklusion bezeichnet.[1]

Wir kombinieren dies nun mit der Quotiententopologie und erhalten so Pushouts topologischer Räume:

Definition 1.12 (Pushout topologischer Räume)**.** Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume und seien $i_1\colon X_0 \longrightarrow X_1$ und $i_2\colon X_0 \longrightarrow X_2$ stetige Abbildungen. Das *Pushout von*

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_2} & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \\ X_1 & & \end{array}$$

[1] Wir werden im folgenden (etwas schlampig) immer die Summanden X_i als Teilmengen von $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ ansehen, um die Notation etwas übersichtlicher zu halten.

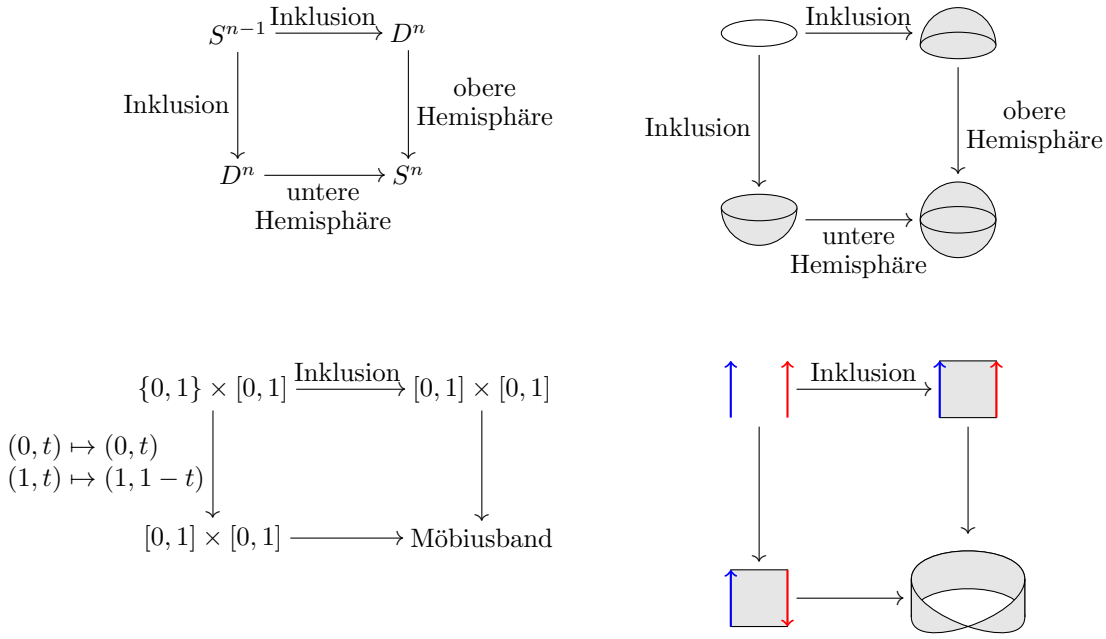


Abbildung (1.14): Pushouts in Top

ist der topologische Raum (versehen mit der Quotiententopologie der disjunkten Vereinigungstopologie)

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 := (X_1 \sqcup X_2)/\sim,$$

wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation auf $X_1 \sqcup X_2$ ist, die von

$$\forall_{x \in X_0} \quad i_1(x) \sim i_2(x)$$

erzeugt wird.

Beispiel 1.13 (Pushouts topologischer Räume)**.** Konkrete Beispiele für Pushouts topologischer Räume finden sich in Abbildung (1.14).

Wie kann man rigoros und nicht nur anschaulich mit Quotientenräumen und Pushouts arbeiten? Beide Konstruktionen besitzen eine entsprechende universelle Eigenschaft, da sie als Kolimiten aufgefasst werden können. Mithilfe der folgenden Kriterien kann man überprüfen, ob eine Abbildung aus einem Quotientenraum oder einem Pushout heraus stetig ist:

Proposition 1.15 (universelle Eigenschaft der Quotiententopologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum, sei Y eine Menge und sei $p\colon X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann gilt: Ist Z ein topologischer Raum und $g\colon Y \longrightarrow Z$ eine Abbildung, so ist g genau dann bezüglich der von p auf Y induzierten Quotiententopologie stetig, wenn $g \circ p\colon X \longrightarrow Z$ stetig ist.*

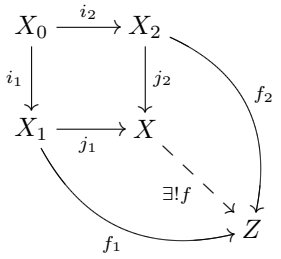


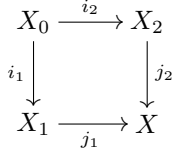
Abbildung (1.17): Die universelle Eigenschaft des Pushouts

Beweisskizze. Dies folgt direkt aus der Definition der Quotiententopologie. □

Proposition 1.16 (universelle Eigenschaft des Pushouts topologischer Räume)**.** *Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume und seien $i_1\colon X_0 \longrightarrow X_1$ und $i_2\colon X_0 \longrightarrow X_2$ stetige Abbildungen. Ein topologischer Raum X, zusammen mit stetigen Abbildungen $j_1\colon X_1 \longrightarrow X$, $j_2\colon X_2 \longrightarrow X$,* erfüllt die universelle Eigenschaft dieses Pushouts, *wenn folgendes gilt: Es gilt $j_2 \circ i_2 = j_1 \circ i_1$ und für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f_1\colon X_1 \longrightarrow Z$, $f_2\colon X_2 \longrightarrow Z$ mit $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Z$ mit (Abbildung (1.17))*

$$f \circ j_1 = f_1 \quad \textit{und} \quad f \circ j_2 = f_2.$$

In diesem Fall sagt man auch, dass



ein Pushoutdiagramm topologischer Räume *ist.*

1. *Das Pushout $X := X_1 \cup_{X_0} X_2$ bezüglich i_1 und i_2, zusammen mit den von den Inklusionen nach $X_1 \sqcup X_2$ induzierten stetigen Abbildungen $j_1\colon X_1 \longrightarrow X$, $j_2\colon X_2 \longrightarrow X$, besitzt die universelle Eigenschaft dieses Pushouts.*
2. *Erfüllt ein topologischer Raum X', zusammen mit $j_1'\colon X_1 \longrightarrow X'$, $j_2'\colon X_2 \longrightarrow X'$ die universelle Eigenschaft dieses Pushouts, so gibt es einen kanonischen Homöomorphismus zwischen X und X'.*

Beweisskizze. Die erste Aussage lässt sich leicht anhand der Konstruktion des Pushouts nachvollziehen. Die zweite Aussage ist eine Instanz eines allgemeinen Arguments über universelle Eigenschaften.[2] □

[2] mehr zu universellen Eigenschaften, Limiten und Kolimiten wurde in der Vorlesung Algebraischen Topologie I im SS 2013 behandelt:
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie1_ss13/lecture_notes.pdf

Wir beenden diesen kurzen Überblick über topologische Bausteine mit einer Liste typischer, klassischer Fragestellungen:

- Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph? Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es nichtleere offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, die zueinander homöomorph sind?
- Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ sind S^n und S^m homöomorph?
- Für welche n ist $(S^1)^n$ zu S^n homöomorph?
- Gibt es $n \in \mathbb{N}$, für die es eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ gibt, die zu S^n homöomorph ist?
- Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zu S^n homöomorph. Was kann man über das Komplement $\mathbb{R}^n \subset S$ aussagen?
- Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die zu $\mathbb{R}P^2$ homöomorph ist?
- Gibt es stetige Abbildungen $D^n \longrightarrow D^n$, die keinen Fixpunkt besitzen?
- Kann man einen Igel kämmen? Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^n ?
- ...

Diese Fragen sind jedoch mit elementaren Methoden nicht oder nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand zu lösen. Wir werden im folgenden sehen, wie man mithilfe der Methoden der algebraischen Topologie solche Probleme angehen kann.

1.2. Kategorien und Funktoren

Wir formalisieren nun den Kontext für „Übersetzungen“ zwischen mathematischen Theorien, z.B. von der Topologie in die Algebra.

Als ersten Schritt geben wir dazu einen abstrakten Rahmen für mathematische Theorien: Mathematische Theorien bestehen aus Objekten (z.B. Gruppen, reelle Vektorräume, topologische Räume, messbare Räume, ...) und strukturerhaltenden Abbildungen (z.B. Gruppenhomomorphismen, $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, stetige Abbildungen, messbare Abbildungen, ...) dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie:

Definition 1.18 (Kategorie)**.** Eine *Kategorie* C besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eine Klasse[3] $\mathrm{Ob}(C)$; die Elemente von $\mathrm{Ob}(C)$ heißen *Objekte von* C.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Menge $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$; die Elemente von $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ heißen *Morphismen von* X *nach* Y *in* C. (Dabei wird implizit angenommen, dass die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objektpaaren disjunkt sind.)
- Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Mor}_C(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_C(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

[3] Klassen sind eine Verallgemeinerung von Mengen; so gibt es etwa die Klasse aller Mengen. Weitere Informationen zu Mengen und Klassen finden Sie in den Büchern *Mengenlehre für den Mathematiker* (U. Friedrichsdorf, A. Prestel, Vieweg, 1985) und *Set theory and the continuum problem* (R.M. Smullyan, M. Fitting, überarbeitete Auflage, Dover, 2010).

von Morphismen.

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

- Für jedes Objekt X in C gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_C(X,X)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ bzw. $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,X)$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

  (Dadurch ist id_X eindeutig bestimmt und heißt *Identitätsmorphismus von X in C*.)
- Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ: Für alle Objekte W, X, Y, Z in C und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(W,X)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Caveat 1.19. Das Konzept der Morphismen und Verknüpfungen ist nach dem Beispiel der Abbildungen zwischen Mengen und der gewöhnlichen Abbildungskomposition modelliert. Im allgemeinen muss es sich bei Morphismen aber nicht um Abbildungen zwischen Mengen und bei der Verknüpfung nicht um Abbildungskomposition handeln!

Beispiel 1.20 (leere Kategorie)**.** Die *leere Kategorie* ist die (eindeutig bestimmte) Kategorie, deren Objektklasse die leere Menge ist.

Beispiel 1.21 (Gruppen als Kategorien)**.** Sei G eine Gruppe. Dann erhalten wir wie folgt eine Kategorie C_G:

- Objekte: Die Kategorie C_G besitze genau ein Objekt, etwa 0.
- Morphismen: Es sei $\mathrm{Mor}_C(0,0) := G$.
- Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(0,0) \times \mathrm{Mor}_C(0,0) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(0,0) \\ (g,h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Beispiel 1.22 (Mengenlehre)**.** Die Kategorie Set der Mengen besteht aus:

- Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ die Klasse(!) aller Mengen.
- Morphismen: Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
- Verknüpfungen: Sind X, Y, Z Mengen, so sei die Verknüpfung $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(Y,Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Z)$ die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Es ist klar, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Ist X eine Menge, so ist die gewöhnliche Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Identitätsmorphismus id_X von X in Set.

Beispiel 1.23 (Algebra)**.** Die Kategorie $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorräume besteht aus:

– Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})$ die Klasse aller $\mathbb{R}$-Vektorräume.
– Morphismen: Sind V und W reelle Vektorräume, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(V, W)$ die Menge aller lineare Abbildungen $V \longrightarrow W$.
– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog erhält man auch die Kategorie Group der Gruppen, die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, die Kategorie Mod_R der R-Rechtsmoduln bzw. die Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ der R-Linksmoduln über einem Ring R, ...

Beispiel 1.24 (Topologie)**.** Die Kategorie Top der topologischen Räume besteht aus:
– Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top})$ die Klasse aller topologischen Räume.
– Morphismen: Sind X und Y topologische Räume, so sei

$$\mathrm{map}(X, Y) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X, Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Oft ist man aber auch am Unterschied zwischen einem topologischen Raum und einem gegebenen Unterraum interessiert. Zwei Möglichkeiten dies zu tun sind Quotientenräume und Raumpaare:

Beispiel 1.25 (relative Topologie, Raumpaare)**.** Die Kategorie Top^2 der Raumpaare besteht aus:
– Objekte: Es sei

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2) := \big\{(X, A) \;\big|\; X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}), A \subset X\big\}.$$

Die Elemente von $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ heißen *Raumpaare*.
– Morphismen: Sind (X, A), (Y, B) Raumpaare, so sei

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^2}\big((X, A), (Y, B)\big) := \big\{f \colon X \longrightarrow Y \;\big|\; f \text{ ist stetig und } f(A) \subset B\big\}.$$

– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben (dies ist tatsächlich wohldefiniert).

Der absolute Fall entspricht dabei dem Fall, dass der Unterraum leer ist; der Fall *punktierter Räume* (der in der Homotopietheorie wichtig ist), entspricht dem Fall, dass der Unterraum aus genau einem Punkt besteht.

Die folgende Kategorie spielt in der homologischen Algebra und in der Konstruktion singulärer Homologie (zumindest implizit) eine zentrale Rolle:

Beispiel 1.26 (Simplexkategorie)**.** Die *Simplexkategorie* ist wie folgt definiert:
– Objekte: Sei

$$\mathrm{Ob}(\Delta) := \big\{\Delta(n) \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\},$$

wobei wir für $n \in \mathbb{N}$ die Notation $\Delta(n) := \{0, \ldots, n\}$ verwenden.

– Morphismen: Sind $n, m \in \mathbb{N}$, so sei

$$\mathrm{Mor}_{\Delta} := \big\{ f \colon \{0, \dots, n\} \longrightarrow \{0, \dots, m\} \;\big|\; f \text{ ist monoton wachsend} \big\}.$$

– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben (dies ist tatsächlich wohldefiniert).

Die Anschauung dazu ist, dass die Elemente von $\Delta(n)$ den Ecken des Standardsimplexes Δ^n entsprechen.

Ein wichtiges Konzept in der Kategorientheorie ist das „Dualisieren“ durch Invertieren der Richtung von Morphismen:

Beispiel 1.27 (duale Kategorie)**.** Sei C eine Kategorie. Die *duale Kategorie* C^{op} ist wie folgt definiert:

– Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) := \mathrm{Ob}(C)$.

– Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(C)$ sei

$$\mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Y) := \mathrm{Mor}_C(Y, X).$$

– Verknüpfungen: Für alle Objekte $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$ betrachten wir die Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{C^{\mathrm{op}}}(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto f \circ g; \end{aligned}$$

dabei bezeichnet „$\circ$“ die entsprechende Verknüpfung in C.

Nach Konstruktion ist also $(C^{\mathrm{op}})^{\mathrm{op}} = C$.

Alle Begriffe, die sich durch Objekte und (Komposition von) Morphismen ausdrücken lassen, lassen sich zu entsprechenden Begriffen in allgemeinen Kategorien verallgemeinern. Ein erstes Beispiel ist der Isomorphiebegriff:

Definition 1.28 (Isomorphismus)**.** Sei C eine Kategorie. Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sind *isomorph in* C, wenn es Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. In diesem Fall sind f und g *Isomorphismen in* C und wir schreiben $X \cong_C Y$ (oder wenn die Kategorie aus dem Kontext klar ist: $X \cong Y$).

Beispiel 1.29 (Isomorphismenbegriffe)**.**

– Objekte in Set sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.

– Objekte in Group, Ab, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$, … sind genau dann im obigen Sinne isomorph, wenn sie im gewöhnlichen algebraischen Sinne isomorph sind.

– Objekte in Top sind genau dann isomorph, wenn sie homöomorph sind.

– Objekte in der Simplexkategorie Δ sind genau dann isomorph, wenn sie gleich sind.

Definition 1.30 (Automorphismengruppe)**.** Sei C eine Kategorie und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann bildet die Menge $\mathrm{Aut}(X)$ aller Isomorphismen $X \longrightarrow X$ in C bezüglich der Komposition von Morphismen in C eine Gruppe, die *Automorphismengruppe von X in C*.

Als nächsten Schritt formalisieren wir nun den „Übersetzungsbegriff“, den wir verwenden möchten, um Topologie in Algebra zu übersetzen.; grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“. Dies führt zum Begriff des Funktors:

Definition 1.31 (Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:
- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C\big(F(X), F(Y)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, X \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ und alle $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Ein *kontravarianter Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ ist ein kovarianter Funktor $C \longrightarrow D^{\mathrm{op}}$.

Beispiel 1.32 (Identitätsfunktor)**.** Sei C eine Kategorie. Dann ist der *Identitätsfunktor* $\mathrm{Id}_C\colon C \longrightarrow C$ wie folgt definiert:
- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(C) \\ X &\longmapsto X. \end{aligned}$$

- Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Beispiel 1.33 (Vergissfunktor)**.** Der Vergissfunktor $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist wie folgt definiert:
- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$, die einem topologischen Raum die unterliegende Menge zuordnet.
- Auf Morphismen: Für alle topologischen Räume X, Y betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X,Y) = \mathrm{map}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Analog erhält man Vergissfunktoren $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Set}$, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, ...

Beispiel 1.34 (frei erzeugte abelsche Gruppen)**.** Es gibt einen Funktor $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, der die Mengenlehre in die kommutative Algebra überträgt:

– Auf Objekten definieren wir

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Ab}) \\ X &\longmapsto \bigoplus_X \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Wir betrachten dabei eine Menge X in kanonischer Weise als Teilmenge, bzw. sogar Basis, von $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.)

– Auf Morphismen definieren wir F wie folgt: Sind X, Y Mengen und ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so definieren wir $F(f)\colon \bigoplus_X \mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_Y \mathbb{Z}$ als die eindeutig bestimmte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung, die f von der Basis X auf ganz $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ fortsetzt.

Dies liefert tatsächlich einen Funktor.

Außerdem liefern Objekte in Kategorien Funktoren, die beschreiben wie die entsprechende Kategorie aus dem Blickwinkel dieses Objekts aussieht:

Beispiel 1.35 (darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann erhalten wir einen Funktor

$$\mathrm{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set},$$

den *von X dargestellten (kovarianten) Funktor*. Dieser Funktor ist wie folgt definiert:

– Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) \\ Y &\longmapsto \mathrm{Mor}_C(X, Y). \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Sind $Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X, \,\cdot\,)\colon \mathrm{Mor}_C(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}\big(\mathrm{Mor}_C(X, Y), \mathrm{Mor}_C(X, Z)\big) \\ g &\longmapsto (f \mapsto g \circ f). \end{aligned}$$

Analog erhält man einen kontravarianten Funktor $\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$.

Beispiel 1.36 (Tensorprodukt)**.** Sei R ein Ring und sei A ein Links-R-Modul. Dann erhalten wir einen Funktor $\,\cdot\, \otimes_R A\colon \mathsf{Mod}_R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ wie folgt:

– Auf Objekten sei

$$\begin{aligned} \,\cdot\, \otimes_R A\colon \mathsf{Mod}_R &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ M &\longmapsto M \otimes_R A. \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Für alle $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ sei

$$\begin{aligned} \,\cdot\, \otimes_R A\colon \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M, N) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(M \otimes_R A, N \otimes_R A) \\ f &\longmapsto f \otimes_R \mathrm{id}_A\,. \end{aligned}$$

Für (Ko)Homologie (sowohl in der algebraischen Topologie als auch in der homologischen Algebra) wichtig sind außerdem Funktoren, die auf der Simplexkategorie Δ definiert sind.

Eine wesentliche Eigenschaft von Funktoren ist, dass sie – da sie mit Verknüpfungen und Identitätsmorphismen verträglich sind – Isomorphie erhalten und somit ein geeignetes Konzept für Invarianten liefern:

Proposition 1.37 (Funktoren erhalten Isomorphie)**.** *Seien C, D Kategorien, sei $F\colon C \longrightarrow D$ ein Funktor und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$.*

1. *Ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ ein Isomorphismus in C, so ist $F(f) \in \mathrm{Mor}_D(F(X),F(Y))$ ein Isomorphismus in D.*
2. *Insbesondere: Ist $X \cong_C Y$, so folgt $F(X) \cong_D F(Y)$. Bzw.: Ist $F(X) \ncong_D F(Y)$, so ist $X \ncong_C Y$.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften von Funktoren. Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil. □

Geeignete Funktoren können also helfen zu zeigen, dass gewisse Objekte *nicht* isomorph sind.

Caveat 1.38. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. Objekte, die unter einem Funktor auf isomorphe Objekte abgebildet werden, sind im allgemeinen *nicht* isomorph.

Um mit Funktoren arbeiten zu können, wollen wir außerdem in der Lage sein, Funktoren zu komponieren und zu vergleichen:

Definition 1.39 (Komposition von Funktoren)**.** Seien C, D, E Kategorien und seien $F\colon C \longrightarrow D$, $G\colon D \longrightarrow E$ Funktoren. Dann ist $G \circ F\colon C \longrightarrow E$ der wie folgt definierte Funktor:

– Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned} G \circ F\colon C &\longrightarrow E \\ X &\longmapsto G\big(F(X)\big). \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sei

$$\begin{aligned} G \circ F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_E\big(G(F(X)), G(F(Y))\big) \\ f &\longmapsto G(F(f)). \end{aligned}$$

Funktoren lassen sich mithilfe von sogenannten natürlichen Transformationen vergleichen; natürliche Transformationen sind „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Funktoren“:

Definition 1.40 (natürliche Transformation, natürlicher Isomorphismus)**.** Seien C und D Kategorien und seien $F, G\colon C \longrightarrow D$ Funktoren.

– Eine *natürliche Transformation T von F nach G*, kurz $T\colon F \Longrightarrow G$, besteht aus einer Familie $\big(T(X) \in \mathrm{Mor}_D(F(X), G(X))\big)_{X \in \mathrm{Ob}(C)}$ von Morphismen, so dass für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ die Gleichheit

$$G(f) \circ T(X) = T(Y) \circ F(f)$$

in der Kategorie D gilt – d.h., dass die entsprechenden Diagramme in D kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle T(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

– Ein *natürlicher Isomorphismus* ist eine natürliche Transformation, die objektweise aus Isomorphismen besteht (äquivalent ist die Existenz einer objektweisen inversen natürlichen Transformation).

Beispiel 1.41 (Doppeldual)**.** Wir betrachten einerseits den Identitätsfunktor

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}\colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$$

und andererseits den Doppeldualfunktor

$$D := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\,\cdot\,, \mathbb{R}), \mathbb{R}\big)\colon \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\,.$$

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so definieren wir die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T(V)\colon V &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}\big(\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ v &\longmapsto \big(f \mapsto f(v)\big). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $(T(V))_{V \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})}$ eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}} \Longrightarrow D$ ist. Eingeschränkt auf die Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume ist dies sogar ein natürlicher Isomorphismus.

Für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt auch $V \cong_{\mathbb{R}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$; man beachte jedoch, dass es *keinen* natürlichen Isomorphismus dieser Form gibt!

Beispiel 1.42 (Tensorprodukte)**.** Sei R ein Ring, seien A und B Links-R-Moduln und sei $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(A, B)$. Dann ist

$$\big(\mathrm{id}_M \otimes_R f\colon M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B\big)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}$$

eine natürliche Transformation $\,\cdot\, \otimes_R A \Longrightarrow \,\cdot\, \otimes_R B$. [Mithilfe des sogenannten Yoneda-Lemmas und Beispiel 1.43 lässt sich zeigen, dass alle natürlichen Transformationen $\,\cdot\, \otimes_R A \Longrightarrow \,\cdot\, \otimes_R B$ von dieser Form sind.]

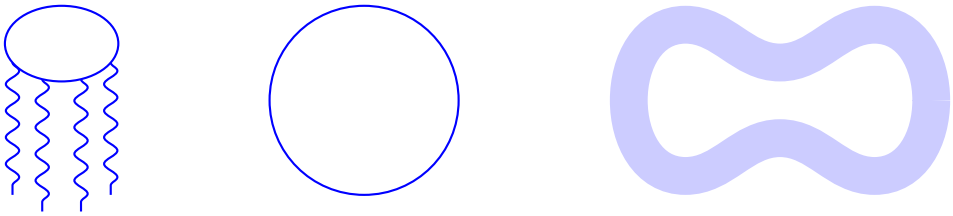


Abbildung (1.44): Diese Räume sind *nicht* homöomorph, haben aber dieselbe „prinzipielle Form“ – nämlich ein „Kreis“ mit einem „Loch“.

Beispiel 1.43 (darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie, seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und sei $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Mor}_C(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Z) \\ g \longmapsto g \circ f \end{pmatrix}_{Z \in \mathrm{Ob}(C)}$$

eine natürliche Transformation $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$. [Mithilfe des Yoneda-Lemmas lässt sich zeigen, dass alle natürlichen Transformationen $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$ von dieser Form sind.]

1.3. Homotopie

Für viele Fragestellungen und Techniken in der (algebraischen) Topologie ist Homöomorphie ein zu starrer Isomorphiebegriff (Abbildung (1.44)). Wir werden daher einen schwächeren Isomorphiebgeriff einführen. Dazu werden wir gewisse Deformationen zwischen stetigen Abbildungen bzw. topologischen Räumen als vernachlässigbar ansehen. Dies führt zum Begriff der Homotopie (Abbildung (1.47)):

Definition 1.45 (Homotopie, Homotopieäquivalenz, nullhomotop, kontraktibel)**.** Seien X und Y topologische Räume.

- Seien $f, g\colon X \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen. Dann heißt f *homotop zu* g, wenn sich f stetig in g deformieren lässt, d.h., falls es es eine stetige Abbildung $h\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit
$$h(\,\cdot\,, 0) = f \qquad \text{und} \qquad h(\,\cdot\,, 1) = g$$
gibt (wobei $X \times [0,1]$ mit der Produkttopologie versehen ist). In diesem Fall schreiben wir $f \simeq g$ und nennen h eine *Homotopie von* f *nach* g.
- Abbildungen, die zu konstanten Abbildungen homotop sind, heißen *nullhomotop*.
- Die topologischen Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow X$ mit
$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$
gibt; solche Abbildungen heißen *Homotopieäquivalenzen*. In diesem Fall schreibt man $X \simeq Y$.

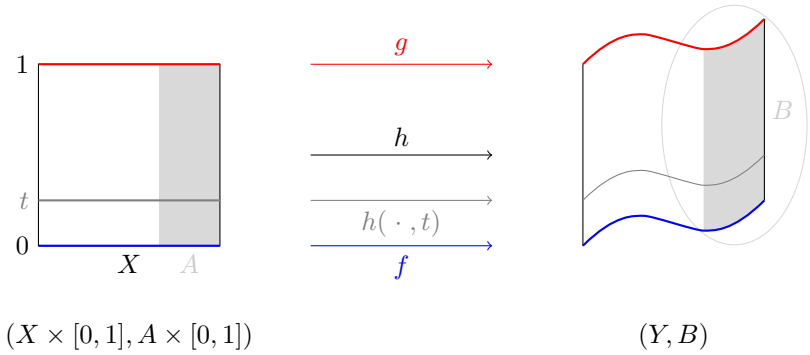


Abbildung (1.47): Homotopien sind „Filme“ zwischen zwei stetigen Abbildungen [von Raumpaaren]

– Topologische Räume, die zu einem einpunktigen topologischen Raum homotopieäquivalent sind, heißen *kontraktibel*.

Für gutartige topologische Räume kann man mithilfe des Exponentialgesetzes Homotopien als stetige Wege in Abbildungsräumen auffassen.

Analog zur obigen Definition erhalten wir die entsprechenden Begriffe für Raumpaare bzw. für punktierte Räume.

Definition 1.46 (Homotopie/Homotopieäquivalenz von Raumpaaren)**.** Seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare.

– Seien $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen von Raumpaaren (d.h. Morphismen in Top^2). Dann heißt f *homotop zu* g *bezüglich der Unterräume* A *und* B, wenn sich f als Abbildung von Raumpaaren stetig in g deformieren lässt, d.h., falls es es eine stetige Abbildung $h\colon (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren mit
$$h(\,\cdot\,, 0) = f \qquad \text{und} \qquad h(\,\cdot\,, 1) = g$$
gibt. In diesem Fall schreiben wir $f \simeq_{A,B} g$ und nennen h eine *Homotopie von Raumpaaren von* f *nach* g.

– Die Raumpaare (X, A) und (Y, B) heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ und $g\colon (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ von Raumpaaren mit
$$g \circ f \simeq_{A,A} \mathrm{id}_{(X,A)} \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq_{B,B} \mathrm{id}_{(Y,B)}$$
gibt; solche Abbildungen heißen *Homotopieäquivalenzen von Raumpaaren*. In diesem Fall schreibt man $(X, A) \simeq (Y, B)$.

Definition 1.48 (punktierte Homotopie, punktierte Homotopieäquivalenzen)**.** Sei Top_* die *Kategorie der punktierten Räume*, d.h. die volle Unterkategorie der Kategorie Top^2,

deren Objekte Raumpaare der Form $(X, \{x_0\})$ mit $x_0 \in X$ sind; man schreibt für solche Paare auch kurz (X, x_0) und nennt sie *punktierte Räume*. Seien nun (X, x_0) und (Y, y_0) punktierte topologische Räume.

- Seien $f, g\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ punktierte stetige Abbildungen (d.h. f und g sind stetige Abbildungen von X nach Y und $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$). Dann heißt f *punktiert homotop zu* g, falls es es eine stetige Abbildung $h\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit
$$h(\,\cdot\,, 0) = f \qquad \text{und} \qquad h(\,\cdot\,, 1) = g$$
gibt (wobei $X \times [0,1]$ mit der Produkttopologie versehen ist), die außerdem den Basispunkt nicht bewegt, d.h., die außerdem für alle $t \in [0,1]$ erfüllt, dass
$$h(x_0, t) = y_0.$$
In diesem Fall schreiben wir $f \simeq_* g$ und nennen h eine *punktierte Homotopie von f nach g*.
- Abbildungen, die zu konstanten Abbildungen punktiert homotop sind, heißen *punktiert nullhomotop*.
- Die punktierten topologischen Räume (X, x_0) und (Y, y_0) heißen *punktiert homotopieäquivalent*, wenn es punktierte stetige Abbildungen $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ und $g\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ mit
$$g \circ f \simeq_* \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq_* \mathrm{id}_Y$$
gibt; solche Abbildungen heißen *punktierte Homotopieäquivalenzen*. In diesem Fall schreibt man $X \simeq_* Y$.
- Punktierte topologische Räume, die zu einem einpunktigen topologischen Raum punktiert homotopieäquivalent sind, heißen *punktiert kontraktibel*.

Umgekehrt erhält man sowohl den absoluten Fall als auch den punktierten Fall aus dem Fall von Raumpaaren (indem man sich auf leere bzw. einpunktige Unterräume einschränkt).

Caveat 1.49. Homöomorphismen [von Raumpaaren/von punktierten Räumen] sind Homotopieäquivalenzen [von Raumpaaren/von punktierten Räumen]. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*. Zum Beispiel sind Homotopieäquivalenzen [von Raumpaaren/von punktierten Räumen] im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel 1.50 (Bälle sind kontraktibel)**.** Ist $n \in \mathbb{N}$, so sind der n-dimensionale Ball D^n und $\mathbb{R}^n$ kontraktibel; analog sieht man auch, dass $(D^n, 0)$ punktiert kontraktibel ist. Wir werden im Verlauf der Vorlesung sehen, dass Sphären *nicht* kontraktibel sind.

Beispiel 1.51 (aufgedickte Sphären)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Es gilt jedoch $(D^1, S^0) \not\simeq (\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$; letzteres folgt daraus, dass $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$ ist und S^0 nicht zusammenhängend ist. Dies gilt analog auch höherdimensional, erfordert aber höhere Zusammenhangsbegriffe und -resultate, die uns im Moment noch nicht zur Verfügung stehen.

Proposition 1.52 (Grundlegende Eigenschaften des Homotopiebegriffs)**.**

1. *Seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare; dann ist „$\simeq_{A,B}$“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge*

$$\operatorname{map}\big((X, A), (Y, B)\big) := \operatorname{Mor}_{\mathsf{Top}^2}\big((X, A), (Y, B)\big)$$

   der stetigen Abbildungen $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren.
2. *Seien (X, A), (Y, B), (Z, B) Raumpaare und seien $f, f' \in \operatorname{map}((X, A), (Y, B))$ und $g, g' \in \operatorname{map}((Y, B), (Z, C))$ stetige Abbildungen von Raumpaaren mit $f \simeq_{A,B} f'$ und $g \simeq_{B,C} g'$. Dann gilt auch $g \circ f \simeq_{A,C} g' \circ f'$.*
3. *Sei X ein kontraktibler topologischer Raum. Dann gilt für alle topologischen Räume Y, dass alle stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$ bzw. $Y \longrightarrow X$ nullhomotop sind.*

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Reflexivität folgt mithilfe der Homotopie, die zu jedem Zeitpunkt dieselbe Abbildung liefert; Symmetrie folgt, indem man entsprechende Homotopien rückwärts durchläuft; Transitivität folgt, indem man entsprechende Homotopien mit doppelter Geschwindigkeit durchläuft und dann mithilfe von Proposition A.13 verklebt.

Der zweite Teil folgt, indem man entsprechende Homotopien „komponiert“.

Der dritte Teil folgt aus dem zweiten Teil, indem man berücksichtigt, dass id_X nullhomotop ist (da X kontraktibel ist). □

Mithilfe dieser Proposition kann man leicht zeigen, dass die folgenden Kategorien wohldefiniert sind:

Definition 1.53 (Homotopiekategorien von topologischen Räumen)**.**

– Die *Homotopiekategorie von Raumpaaren* ist die Kategorie $\mathsf{Top}^2_{\mathsf{h}}$, deren Objekte Raumpaare sind, und deren Morphismen Äquivalenzklassen stetiger Abbildungen von Raumpaaren bzgl. Homotopie von Abbildungen zwischen Raumpaaren sind: Sind (X, A) und (Y, B) Raumpaare, so definieren wir

$$\big[(X, A), (Y, B)\big] := \operatorname{Mor}_{\mathsf{Top}^2_{\mathsf{h}}}\big((X, A), (Y, B)\big) := \operatorname{map}\big((X, A), (Y, B)\big)/\simeq_{A,B} .$$

  Die Verknüpfung von Homotopieklassen von Abbildungen von Raumpaaren ist dabei durch die repräsentantenweise Verknüpfung von Abbildungen definiert, d.h.: Sind (X, A), (Y, B), (Z, C) Raumpaare, so ist

$$\begin{aligned} \circ\colon \big[(Y, B), (Z, C)\big] \times \big[(X, A), (Y, B)\big] &\longrightarrow \big[(X, A), (Z, C)\big] \\ \big([g]_{A,B}, [f]_{A,B}\big) &\longmapsto [g \circ f]_{A,B}; \end{aligned}$$

  mit „$[\,\cdot\,]_{A,B}$“ bezeichnen wir dabei die zugehörigen Homotopieklassen von stetigen Abbildungen zwischen Raumpaaren.

– Die *Homotopiekategorie topologischer Räume* ist die Kategorie $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$, deren Objekte topologische Räume sind, und deren Morphismen Homotopieklassen stetiger Abbildungen sind: Sind X und Y topologische Räume, so definieren wir

$$[X, Y] := \operatorname{Mor}_{\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}}(X, Y) := \operatorname{map}(X, Y)/\simeq .$$

Die Verknüpfung von Homotopieklassen von Abbildungen ist dabei durch die repräsentantenweise Verknüpfung von Abbildungen definiert, d.h.: Sind X, Y, Z topologische Räume, so ist

$$\begin{aligned} \circ\colon [Y,Z] \times [X,Y] &\longrightarrow [X,Z] \\ \big([g],[f]\big) &\longmapsto [g \circ f]; \end{aligned}$$

mit „$[\,\cdot\,]$“ bezeichnen wir dabei die zugehörigen Homotopieklassen.

– Die *Homotopiekategorie punktierter Räume* ist die Kategorie $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$, deren Objekte punktierte Räume sind, und deren Morphismen Äquivalenzklassen punktierter stetiger Abbildungen bzgl. Homotopie von Abbildungen punktierter Räume sind: Sind (X,x_0) und (Y,y_0) punktierte Räume, so definieren wir

$$\big[(X,x_0),(Y,y_0)\big]_* := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}}\big((X,x_0),(Y,y_0)\big) := \mathrm{map}_*\big((X,x_0),(Y,y_0)\big)/\simeq_* .$$

Die Verknüpfung von punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen ist dabei durch die repräsentantenweise Verknüpfung von Abbildungen definiert, d.h.: Sind (X,x_0), (Y,y_0), (Z,z_0) punktierte Räume, so ist

$$\begin{aligned} \circ\colon \big[(Y,y_0),(Z,z_0)\big] \times \big[(X,x_0),(Y,y_0)\big] &\longrightarrow \big[(X,x_0),(Z,z_0)\big] \\ \big([g]_*,[f]_*\big) &\longmapsto [g \circ f]_*; \end{aligned}$$

mit „$[\,\cdot\,]_*$“ bezeichnen wir dabei die zugehörigen punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen.

Bemerkung 1.54. Wir erhalten somit eine kategorientheoretische Formulierung des Begriffes der Homotopieäquivalenz: Topologische Räume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie in $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ isomorph sind. Raumpaare bzw. punktierte Räume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie in $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}^2$ bzw. $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ isomorph sind.

Im allgemeinen ist es nicht leicht zu entscheiden, ob zwei gegebene topologische Räume homöomorph bzw. homotopieäquivalent sind oder nicht – da es im allgemeinen sehr viele stetige Abbildungen gibt. In der algebraischen Topologie studiert man daher algebraische Invarianten, um Probleme dieser Art (partiell) zu lösen.

1.4. Homotopieinvarianz – Was ist algebraische Topologie?

Eines der Hauptziele der algebraischen Topologie ist es, topologische Räume soweit wie möglich bis auf Homotopieäquivalenz zu klassifizieren (also die Homotopiekategorien $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}, \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}, \ldots$ besser zu verstehen). Dazu versucht man, Funktoren

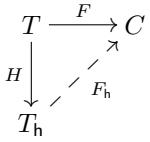
$$\begin{aligned} \mathsf{Top}_{\mathsf{h}} &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ \mathsf{Top}_{\mathsf{h}}^2 &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} &\longrightarrow \cdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

zu konstruieren und zu studieren. Die Kunst dabei ist, dass solche Funktoren genug interessante Information über topologische Räume enthalten sollen, dabei aber trotzdem noch hinreichend gut berechenbar sein sollten.

Caveat 1.55. Man kann zeigen, dass das Homöomorphieproblem bzw. Homotopieäquivalenzproblem selbst für relativ gutartige topologische Räume (z.B. Mannigfaltigkeiten) im allgemeinen *nicht* algorithmisch lösbar ist. Beim angestrebten Verständnis der (Homotopie)Kategorien topologsicher Räume müssen also immer Kompromisse eingegangen werden.

Definition 1.56 (homotopieinvarianter Funktor)**.** Sei T eine der Kategorien Top, Top^2, Top_*, ...[4] und sei C eine Kategorie. Ein Funktor $F\colon T \longrightarrow C$ ist *homotopieinvariant*, falls folgendes gilt: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(T)$ und alle $f, g \in \mathrm{Mor}_T(X, Y)$ mit $f \simeq_T g$ ist $F(f) = F(g)$.

Bemerkung 1.57. Sei T eine der Kategorien Top, Top^2, Top_*, ..., sei C eine Kategorie und sei $F\colon T \longrightarrow C$ ein Funktor. Dann ist F genau dann im obigen Sinne homotopieinvariant, wenn F über den Homotopieklassenfunktor $H\colon T \longrightarrow T_\mathsf{h}$ faktorisiert (der auf Objekten die Identität ist und Morphismen auf die entsprechenden Homotopieklassen abbildet), d.h. wenn es einen Funktor $F_\mathsf{h}\colon T_\mathsf{h} \longrightarrow C$ mit $F_\mathsf{h} \circ H = F$ gibt:



Homotopieinvariante Funktoren liefern insbesondere notwendige Kriterien für Homotopieäquivalenz von Räumen:

Proposition 1.58 (homotopieinvariante Funktoren liefern Homotopieinvarianten)**.** *Sei T eine der Kategorien $\mathsf{Top}, \mathsf{Top}^2, \mathsf{Top}_*, \ldots$, sei C eine Kategorie, sei $F\colon T \longrightarrow C$ ein homotopieinvarianter Funktor und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(T)$.*

1. *Gilt $X \simeq_T Y$, so folgt $F(X) \cong_C F(Y)$.*
2. *Bzw.: Gilt $F(X) \ncong_C F(Y)$, so folgt $X \not\simeq_T Y$.*

Beweisskizze. Dies ist eine Konsequenz der obigen Beschreibung homotopieinvarianter Funktoren (Bemerkung 1.57), der Tatsache, dass Funktoren Isomorphie erhalten (Proposition 1.37), und der Reformulierung von Homotopieäquivalenzen mithilfe von Homotopiekategorien (Bemerkung 1.54). □

Im Verlauf der Vorlesung werden wir den folgenden (nicht-trivialen) Satz beweisen:

Satz 1.59 (Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren)**.** *Es gibt eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ homotopieinvarianter Funktoren $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ mit folgenden Eigenschaften:*

[4] Wir werden im folgenden noch weitere Kategorien mit einem zugehörigen Homotopiebegriff (und einer zugehörigen Homotopiekategorie) kennenlernen.

a. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_m(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \mathbb{Z} & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

b. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ gilt

$$F_n(r_j^{(n)}) \neq \mathrm{id}_{F_n(S^n)},$$

wobei

$$\begin{aligned} r_j^{(n)} \colon S^n &\longrightarrow S^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir geben nun ein paar erste Anwendungen dieses Satzes. Sobald wir Beispiele solcher Funktoren konkreter beschreiben können und besser verstehen, werden sich noch viele weitere Anwendungen ergeben.

Korollar 1.60 (Invarianz der Dimension, I)**.**

0. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist S^n nicht *kontraktibel.*

1. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $S^n \simeq S^m$, wenn $n = m$ ist.

2. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist.

Beweisskizze (unter der Annahme, dass Satz 1.59 gilt). 0. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wäre S^n kontraktibel, so wären alle stetigen Abbildungen $S^n \longrightarrow S^n$ nullhomotop und somit homotop zueinander (da S^n wegzusammenhängend ist). Dies steht jedoch im Widerspruch zu $F_n(r_1^{(n)}) \neq \mathrm{id}_{F_n(S^n)} = F_n(\mathrm{id}_{S^n})$.

1. Dies folgt aus Satz 1.59 a.
2. Die kann aus Teil 1 abgeleitet werden. □

Korollar 1.61 (Der Brouwersche Fixpunktsatz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann besitzt jede stetige Abbildung des n-dimensionalen Balls in sich selbst mindestens einen Fixpunkt.*

Beweisskizze (unter der Annahme, dass Satz 1.59 gilt). Angenommen, es gibt eine stetige Abbildung $f \colon D^n \longrightarrow D^n$, die *keinen* Fixpunkt besitzt, d.h. für alle $x \in D^n$ ist $f(x) \neq x$; insbesondere ist dann $n > 0$. Wir führen diese Annahme nun zu einem Widerspruch, indem wir

1. aus f eine stetige Abbildung $g \colon D^n \longrightarrow S^{n-1}$ mit $g \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ konstruieren, wobei $i \colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion bezeichnet
2. und daraus schließen, dass S^{n-1} kontraktribel ist (im Widerspruch zum obigen Korollar).

Aus f erhalten wir die Abbildung $g \colon D^n \longrightarrow S^{n-1}$ wie folgt: Ist $x \in D^n$, so ist nach Annahme $x \neq f(x)$. Also gibt es eine eindeutige Halbgerade, die in $f(x)$ beginnt und durch x geht; wir definieren $g(x)$ dann als den eindeutigen Schnittpunkt dieser (offenen) Halbgerade mit S^{n-1} (Abbildung (1.62)), d.h.

$$\begin{aligned} g \colon D^n &\longrightarrow S^n \\ x &\longmapsto f(x) + \frac{t(x)}{\|x - f(x)\|^2} \cdot \big(x - f(x)\big), \end{aligned}$$

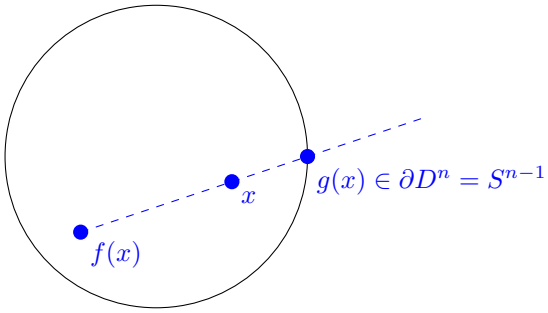


Abbildung (1.62): Konstruktion von g im Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes

wobei

$$t(x) := -\big\langle f(x), x - f(x)\big\rangle + \sqrt{\big\langle f(x), x - f(x)\big\rangle^2 - \big\|x - f(x)\big\|^2 \cdot \big(\|f(x)\|^2 - 1\big)}.$$

Diese Beschreibung sieht man an, dass g stetig ist, und dass $g \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}}$ ist, wobei $i\colon S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ die Inklusion ist. Dies steht jedoch im Widerspruch zu Korollar 1.60. Also muss f einen Fixpunkt besitzen. □

Caveat 1.63. Dieser Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist *nicht* konstruktiv, er zeigt also nicht, wie man solche Fixpunkte finden kann.

Eine Anwendung des Brouwerschen Fixpunktsatzes ist zum Beispiel die Existenz sogenannter Nash-Gleichgewichte in der Spieltheorie oder auch der Fixpunktsatz von Schauder.

Unter der Annahme, dass Satz 1.59 gilt, können wir außerdem den Satz vom Igel beweisen: Als ersten Schritt betrachten wir dazu die folgende Variante des Prinzips der Abbildungsgrade:

Proposition 1.64 (Abbildungsgrade für Selbstabbildungen)**.** *Sei C eine Kategorie, sei $F\colon C \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ein Funktor und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$ mit $F(X) \cong \mathbb{Z}$. Die* Gradabbildung auf X bezüglich F *ist dann definiert als*

$$\begin{aligned} \deg_F\colon \mathrm{Mor}_C(X,X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f &\longmapsto d \in \mathbb{Z} \text{ mit } F(f) = d \cdot \mathrm{id}_{F(X)}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

0. *Die Abbildung $\deg_F\colon \mathrm{Mor}_C(X,X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist wohldefiniert.*
1. *Für alle $f, g \in \mathrm{Mor}_C(X,X)$ ist*

$$\deg_F(g \circ f) = \deg_F(g) \cdot \deg_F(f).$$

2. *Es ist $\deg_F(\mathrm{id}_X) = 1$ und für alle C-Isomorphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X,X)$ gilt*

$$\deg_F(f) \in \{-1, 1\}.$$

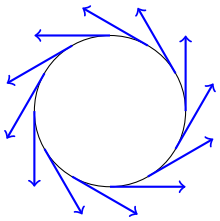


Abbildung (1.66): Stetige Kämmung eines eindimensionalen Igels

Beweisskizze. Dies folgt daraus, dass Endomorphismen von unendlich zyklischen Gruppen eindeutig bestimmte ganzzahlige Vielfache der Identität sind, und den Funktoreigenschaften. □

Satz 1.65 (Satz vom Igel)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann existiert genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^n, wenn n ungerade ist.*

Insbesondere kann ein Igel (aufgefasst als S^2) *nicht* stetig gekämmt werden.
Zur Erinnerung:

- Ein *Vektorfeld* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine stetige Abbildung $v\colon M \longrightarrow TM$ mit $p \circ v = \mathrm{id}_M$, wobei $p\colon TM \longrightarrow M$ die Bündelprojektion des Tangentialbündels von M ist. Ein solches Vektorfeld $v\colon M \longrightarrow TM$ ist *nirgends verschwindend*, falls $v(x) \neq 0 \in T_xM$ für alle $x \in M$ gilt.
- Ist $n \in \mathbb{N}$, so entsprechen [nirgends verschwindende] Vektorfelder auf S^n stetigen Abbildungen $v\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\forall_{x \in S^n} \quad \langle v(x), x \rangle = 0 \quad [\text{und } v(x) \neq 0].$$

Beweisskizze (unter der Annahme, dass Satz 1.59 gilt). Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, etwa $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$\begin{aligned} S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2\cdot k+2}, -x_{2\cdot k+1}) \end{aligned}$$

ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^n (Abbildung (1.66)).

Ist umgekehrt $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und $v\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, so ist

$$\begin{aligned} S^n \times [0,1] &\longrightarrow S^n \\ (x,t) &\longmapsto \cos(\pi \cdot t) \cdot x + \sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{1}{\|v(x)\|_2} \cdot v(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig und zeigt $\mathrm{id}_{S^n} \simeq -\mathrm{id}_{S^n}$. Mithilfe des Abbildungsgrades auf S^n bezüglich F_n folgt aus Satz 1.59 und Proposition 1.64, dass

$$1 = \deg_{F_n}(\mathrm{id}_{S^n}) = \deg_{F_n}(-\mathrm{id}_{S^n}) = \deg_{F_n}(r^{(n)}_{n+1}) \cdot \cdots \cdot \deg_{F_n}(r^{(n)}_1) = (-1)^{n+1},$$

und damit, dass n ungerade ist. □

Weitere Anwendungen und Schlüsse dieser Art werden wir später systematischer zum Beispiel im Zusammenhang mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen kennenlernen.

2. Fundamentalgruppe und Überlagerungstheorie

Wir beginnen nun mit ersten Beispielen von homotopieinvarianten Funktoren, den sogenannten Homotopiegruppen. Die geometrische Idee, die den Homotopiegruppen zugrundeliegt, ist es, „sphärische Löcher“ in (punktierten) topologischen Räumen zu „zählen“. D.h. wir möchten die Kategorie $\mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}}$ aus dem Blickwinkel der Sphären betrachten. In die Sprache der Kategorientheorie übersetzt bedeutet dies, dass wir zu $n \in \mathbb{N}$ den durch die Sphäre S^n dargestellten Funktor

$$\pi_n := \big[(S^n, e_1^n),\ \cdot\ \big]_* \colon\ \mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

studieren.

Wir werden uns in diesem Kapitel auf den eindimensionalen Fall konzentrieren; wir werden insbesondere die folgenden Fragen untersuchen:

- Wie erhalten wir eine Gruppenstruktur auf π_1? D.h. wie können wir π_1 als Funktor nach Group auffassen?
- Wie verträgt sich der Funktor π_1 mit dem Zerlegen bzw. Zusammensetzen von topologischen Räumen?
- Können wir π_1 geeignet als Automorphismengruppe interpretieren?
- Welche Anwendungen besitzt π_1?

2.1. Die Fundamentalgruppe – eine Gruppenstruktur auf π_1

Wir beginnen mit einer expliziten Beschreibung von π_1 und der Gruppenstruktur auf π_1. Im Anschluss werden wir kurz auf eine etwas konzeptionellere Beschreibung der Gruppenstruktur eingehen.

Anschauung 2.1 (π_1, anschaulich)**.** Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Dann ist

$$\pi_1(X, x_0) = \big[(S^1, 1), (X, x_0)\big]_* = \mathrm{map}_*\big((S^1, 1), (X, x_0)\big) / \simeq_*$$

die Menge der punktierten Homotopieklassen von punktierten Schleifen in (X, x_0) (Abbildung (2.2)).

Die punktierte Schleife ① in Abbildung (2.2) ist punktiert nullhomotop. Falls die punktierte Schleife ② nicht punktiert nullhomotop ist (dies wird sich als wahr herausstellen (Satz 2.71)), so entdeckt sie das „Loch“ in diesem Raum.

Notation 2.3 (Parametrisierung von S^1)**.** Wir werden im folgenden Punkte in S^1 mithilfe des Homöomorphismus

$$\begin{aligned} [0,1]/\{0,1\} &\longrightarrow S^1 \\ [t] &\longmapsto e^{2\pi \cdot i \cdot t} \end{aligned}$$

durch Punkte in $[0, 1]$ parametrisieren.

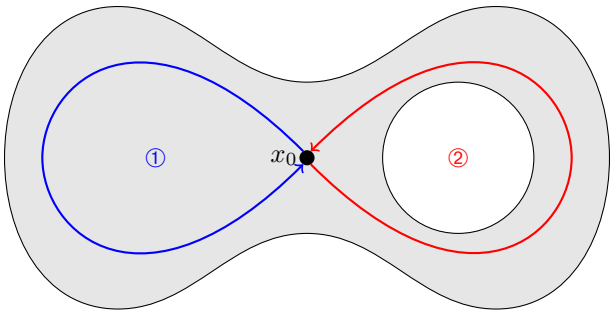


Abbildung (2.2): π_1, anschaulich

Durchlaufen wir Schleifen zum selben Basispunkt hintereinander, so erhalten wir eine neue Schleife zu diesem Basispunkt; dies liefert eine Gruppenstruktur auf π_1:

Proposition 2.4 (Gruppenstruktur auf π_1)**.**

1. *Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum. Dann ist die Abbildung (Abbildung (2.5))*

$$\begin{aligned}\pi_1(X,x_0)\times\pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \pi_1(X,x_0)\\ \big([\gamma]_*,[\eta]_*\big) &\longmapsto \left[\gamma*\eta := \left([t]\mapsto \begin{cases}\gamma(2\cdot t) & \text{falls } t\in[0,1/2]\\ \eta(2\cdot t-1) & \text{falls } t\in[1/2,1]\end{cases}\right)\right]_*\end{aligned}$$

   wohldefiniert und $\pi_1(X, x_0)$ bildet bezüglich dieser Verknüpfung eine Gruppe, die Fundamentalgruppe von (X, x_0).
2. *Seien (X, x_0), (Y, y_0) punktierte topologische Räume und sei $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine stetige Abbildung. Dann ist (Abbildung (2.6))*

$$\begin{aligned}\pi_1(f) = \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}}}\big((S^1,1),f\big)\colon \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y,y_0)\\ [\gamma]_* &\longmapsto [f\circ\gamma]_*\end{aligned}$$

   bezüglich der obigen Gruppenstruktur auf $\pi_1(X, x_0)$ bzw. $\pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenhomomorphismus.

Beweisskizze. 1. Man kann alle gewünschten Eigenschaften anhand der Definitionen nachrechnen und die entsprechenden punktierten Homotopien explizit ausschreiben. Etwa ist das neutrale Element durch die konstante punktierte Schleife gegeben und die inversen Elemente sind durch Durchlaufen von repräsentierende Schleifen in umgekehrter Richtung gegeben; schematisch kann man die entsprechenden Homotopien wie in Abbildung (2.7) konstruieren.

2. Für alle $\gamma, \eta \in \mathrm{map}_*((S^1, 1), (X, x_0))$ gilt $f \circ (\gamma * \eta) = (f \circ \gamma) * (f \circ \eta)$, woraus leicht folgt, dass $\pi_1(f)$ ein Gruppenhomomorphismus ist. □

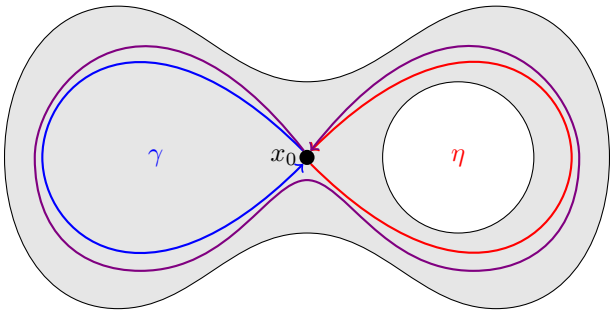


Abbildung (2.5): Die Gruppenstruktur auf π_1; die violette Schleife ist $\gamma * \eta$ und somit ein Repräsentant von $[\gamma]_* \cdot [\eta]_*$.

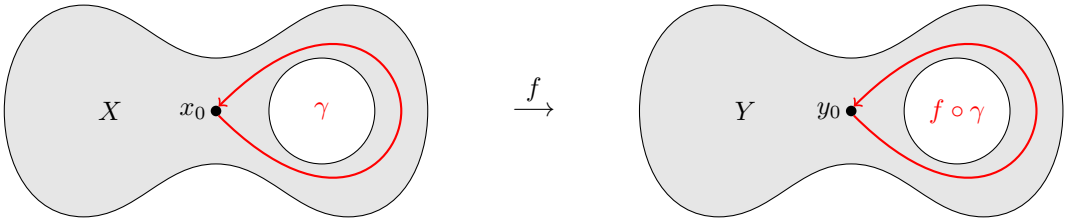


Abbildung (2.6): Der induzierte Gruppenhomomorphismus auf π_1

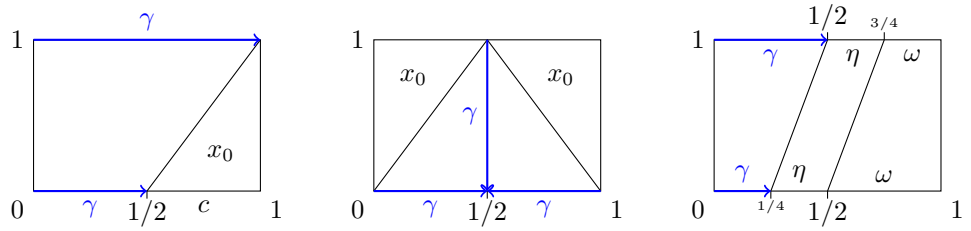
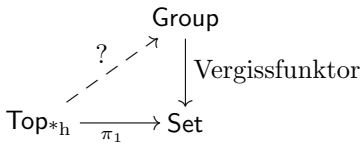


Abbildung (2.7): Gruppenaxiome für die Verknüpfung aus Proposition 2.4; dabei sind $\gamma, \eta, \omega \colon (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$ punktierte stetige Abbildungen und $c \colon (S^1, 1) \longrightarrow (X, x_0)$ bezeichnet die konstante Schleife in x_0.

Diese Proposition liefert die gewünschte Faktorisierung des Funktors $\pi_1 \colon \mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ über die Kategorie Group der Gruppen und den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$:



Oft schreibt man auch für die Komposition des Homotopieklassenfunktors $\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}}$ mit π_1 wieder π_1, um die Notation übersichtlich zu halten.

Bemerkung 2.8 (Gruppenstrukturen auf π_n)**.** Der Beweis von Proposition 2.4 beruht im wesentlichen nur auf entsprechenden Eigenschaften von $(S^1, 1)$ und Funktorialität. In der Sprache der Kategorientheorie lässt sich das wie folgt formulieren: Der punktierte Kreis $(S^1, 1)$ (zusammen mit geeigneten Abbildungen) ist ein sogenanntes *Kogruppenobjekt* in der Kategorie $\mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}}$ und diese Kogruppenobjektstruktur liefert eine Faktorisierung des Funktors π_1 über den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$ (s. Anhang B). Außerdem kann man zeigen, dass die Kogruppenobjektstruktur (und somit die Gruppenstruktur auf π_1) im wesentlichen eindeutig bestimmt ist.

Da S^1 *kein* Kogruppenobjekt in Top_h ist, faktorisiert $[S^1, \,\cdot\,] \colon \mathsf{Top}_\mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *nicht* über Group. Für die Gruppenstruktur auf π_1 ist es also essentiell, in der punktierten Homotopiekategorie zu arbeiten. Alternative Funktoren, die ohne Basispunkte auskommen, sind der Fundamentalgruppoid bzw. die erste (singuläre) Homologie $H_1(\,\cdot\,; \mathbb{Z})$.

Da S^0 kein Komonoidobjekt (und damit erst recht kein Kogruppenobjekt) in $\mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}}$ ist, trägt π_0 (also der Funktor der Wegzusammenhangskomponenten) *keine* Monoid- bzw. Gruppenstruktur!

Ist $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, so kann man ähnlich zu obigen Gruppenstruktur auf π_1 auch eine Gruppenstruktur auf π_n (bzw. eine Kogruppenobjektstruktur auf (S^n, e_1^n)) definieren; dabei stellt sich heraus, dass diese Gruppenstruktur sogar multiplikativ ist. Man bezeichnet π_n als *n-te Homotopiegruppe*.

Beispiel 2.9 (triviale Fundamentalgruppen)**.**

- Ist (X, x_0) punktiert kontraktibel, so ist $\pi_1(X, x_0) \cong 1$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sind alle punktierten stetigen Abbildungen $(S^1, 1) \longrightarrow (S^n, e_1^n)$ punktiert nullhomotop. Also ist in diesem Fall $\pi_1(S^n, e_1^n) \cong 1$. Man kann dies direkt geometrisch beweisen oder mithilfe des Satzes von Seifert und van Kampen (Satz 2.12, Beispiel 2.17).

Wir werden später mithilfe von Überlagerungstheorie zeigen, dass die Fundamentalgruppe tatsächlich das „Loch“ in S^1 entdeckt (Satz 2.71):

Satz 2.10 (Fundamentalgruppe des Kreises)**.** *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ d &\longmapsto [z \mapsto z^d]_* \end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus (wobei wir S^1 als Teilmenge von $\mathbb{C}$ auffassen).

Nach Konstruktion der Fundamentalgruppe kann $\pi_1(X, x_0)$ nur die Wegzusammenhangskomponente des Basispunkts x_0 „sehen“, da Schleifen zum Basispunkt x_0 nicht in andere Wegzusammenhangskomponenten wechseln können.

Die Fundamentalgruppen eines Raumes bezüglich verschiedenen Basispunkten, die in derselben Wegzusammenhangskomponente liegen, sind jedoch isomorph (wie man durch explizite Rechnungen mit Homotopieklassen von Schleifen überprüfen kann); es gibt jedoch im allgemeinen *keinen* kanonischen solchen Isomorphismus:

Proposition 2.11 (Fundamentalgruppe und Basiswechsel)**.** *Sei X ein topologischer Raum, seien $x, y \in X$ und es gebe Wege $\eta, \eta' \colon [0,1] \longrightarrow X$ in X von x nach y.*

1. *Dann ist*

$$\begin{aligned} \varphi_\eta \colon \pi_1(X, y) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ [\gamma]_* &\longmapsto [\eta * \gamma * \overline{\eta}]_* \end{aligned}$$

   eine wohldefinierte Abbildung, die ein Gruppenisomorphismus ist.
2. *Es gilt $c_h \circ \varphi_\eta = \varphi_{\eta'}$, wobei*

$$\begin{aligned} c_h \colon \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(X, x) \\ g &\longmapsto h \cdot g \cdot h^{-1} \end{aligned}$$

   die Konjugation mit dem Element $h \in \pi_1(X, x)$ ist, das durch $h = [\eta' * \overline{\eta}]_*$ gegeben ist.

Beweisskizze. Hierbei haben wir die Konkatenation „$*$“ und das umgekehrte Durchlaufen „$\overline{\cdot}$“ in naheliegender Weise auf Wege $[0,1] \longrightarrow X$ erweitert. Analog zum Beweis von Proposition 2.4 erfüllt diese auch modulo geeigneter Homotopien Assoziativität etc..

Nun zeigen einfache Rechnungen, dass φ_η ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus mit Inversem $\varphi_{\overline{\eta}}$ ist. Auch die Konjugationsformel folgt aus einer einfachen Rechnung. □

2.2. Die Fundamentalgruppe – divide et impera

Wir werden nun untersuchen, wie sich die Fundamentalgruppe bezüglich Zerlegen/Zusammensetzen von topologischen Räumen verhält. Wir werden dabei die Operationen

- Verkleben
- Produkte
- aufsteigende Vereinigungen

studieren. Zusammen mit der Berechnung von $\pi_1(S^1, 1)$ lässt sich daraus die Fundamentalgruppe der meisten „gutartigen“ topologischen Räume berechnen.

Satz 2.12 (Satz von Seifert und van Kampen)**.** *Sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und seien $X_1, X_2 \subset X$ wegzusammenhängende Teilräume mit folgenden Eigenschaften:*

- *Es ist $X_1^\circ \cup X_2^\circ = X$,*

– *der Durchschnitt* $X_0 := X_1 \cap X_2$ *ist wegzusammenhängend*
– *und* x_0 *liegt in* X_0.

Dann ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0, x_0) & \xrightarrow{\pi_1(i_1)} & \pi_1(X_1, x_0) \\ {\scriptstyle \pi_1(i_2)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi_1(j_1)} \\ \pi_1(X_2, x_0) & \xrightarrow[\pi_1(j_2)]{} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen. Dabei betrachten wir jeweils die Teilraumtopologie auf $X_0, X_1, X_2 \subset X$ *und* $i_1, : X_0 \longrightarrow X_1$, $i_2 \colon X_0 \longrightarrow X_2$, $j_1 \colon X_1 \longrightarrow X$, *sowie* $j_2 \colon X_2 \longrightarrow X$ *bezeichnen die Inklusionen.*

Wie bei vielen topologischen Verklebungssätzen beruht der Beweis des Satzes darauf, dass wir Schleifen hinreichend fein zerlegen können. Dazu benötigen wir das Lebesgue-Lemma als Hilfsmittel:

Lemma 2.13 (Lebesgue-Lemma)**.** *Sei* (X, d) *ein kompakter metrischer Raum und sei* $(U_i)_{i \in I}$ *eine offene Überdeckung von* X. *Dann gibt es ein* $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ *mit folgender Eigenschaft: Für alle* $x \in X$ *existiert ein* $i \in I$ *mit* $U(x, \varepsilon) \subset U_i$. *(Dabei bezeichnet* $U(x, \varepsilon)$ *den offenen* ε*-Ball um* x *in* (X, d)*.)*

Beweisskizze des Satzes von Seifert und van Kampen. Die grundlegende Beweisstrategie ist, zu zeigen, dass $\pi_1(X, x_0)$ zusammen mit den Homomorphismen $\pi_1(j_1)$ und $\pi_1(j_2)$ die universelle Eigenschaft des Pushouts von

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0, x_0) & \xrightarrow{\pi_1(i_1)} & \pi_1(X_1, x_0) \\ {\scriptstyle \pi_1(i_2)}\downarrow & & \\ \pi_1(X_2, x_0) & & \end{array}$$

in Group erfüllt. Sei daher H eine Gruppe und seien $\varphi_1 \colon \pi_1(X_1, x_0) \longrightarrow H$ und $\varphi_2 \colon \pi_1(X_2, x_0) \longrightarrow H$ Gruppenhomomorphismen mit $\varphi_1 \circ \pi_1(i_1) = \varphi_2 \circ \pi_1(i_2)$. Es ist nun zu zeigen, dass es genau einen Gruppenhomomorphismus $\varphi \colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H$ mit

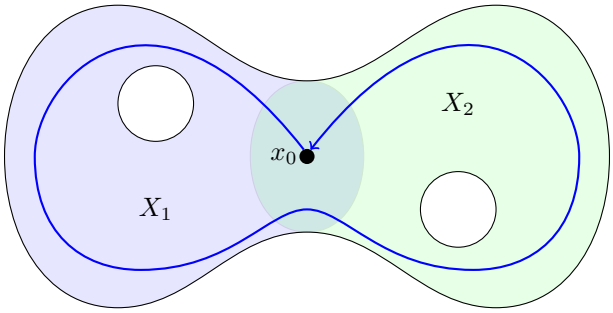
$$\varphi \circ \pi_1(j_1) = \varphi \circ \pi_1(j_2)$$

gibt.

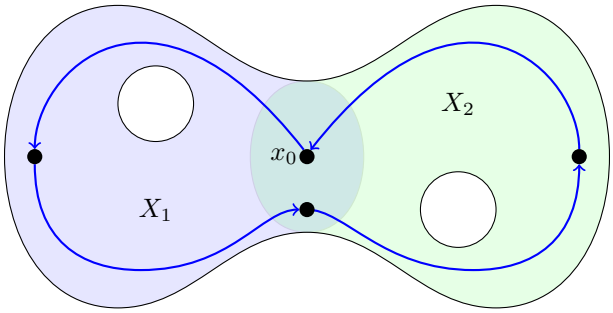
Die grundlegende geometrische Idee dabei ist, punktierte Schleifen in (X, x_0) mithilfe des Lebesgue-Lemmas in „kleine“ Wege (die jeweils in X_1 oder X_2 liegen) zu zerlegen. Diese Wege ergänzen wir durch Wege zum Basispunkt zu punktierten Schleifen (Abbildung (2.14)).

Dieses Argument zeigt, dass jedes Element von $\pi_1(X, x_0)$ als Produkt endlich vieler Elemente aus $\operatorname{im} \pi_1(j_1) \cup \operatorname{im} \pi_1(j_2)$ geschrieben werden kann. Insbesondere folgt daraus die *Eindeutigkeit* von φ.

Die Schleife ...



... wird in „kleine“ Wege zerlegt, ...



... die durch Wege zum Basispunkt x_0 zu Schleifen ergänzt werden:

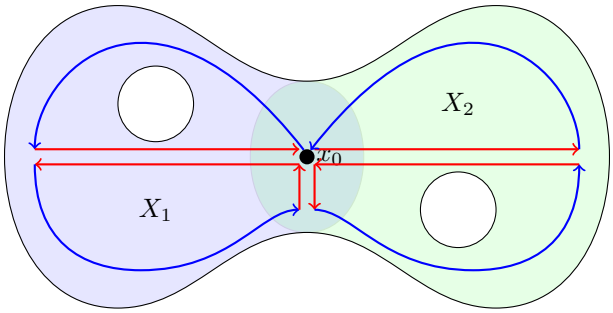


Abbildung (2.14): Zerlegte Schleife im Beweis des Satzes von Seifert und van Kampen

Andererseits zeigt dieses Argument auch wie φ definiert werden muss, wenn die Bedingung $\varphi \circ \pi_1(j_1) = \varphi \circ \pi_1(j_2)$ erfüllt werden soll. Die technische Hauptschwierigkeit des Beweises ist, nachzuweisen, dass dies tatsächlich eine wohldefinierte Abbildung liefert. Unter anderem ist dabei zu zeigen, dass die entsprechenden Werte nicht von der gewählten repräsentierenden punktierten Schleife des betrachteten Gruppenelements in $\pi_1(X, x_0)$ abhängen. Dazu zerlegt man punktierte Homotopien in hinreichend „kleine“ Teile (mithilfe des Lebesgue-Lemmas) und hangelt sich Schritt für Schritt induktiv durch die Homotopie. Es folgt die *Existenz* von φ. □

Um Fundamentalgruppen mithilfe des Satzes von Seifert und van Kampen berechnen zu können, ist es nötig, Pushouts von Gruppen besser zu verstehen. Wir beschränken uns hier auf die wichtigsten Eckdaten:

Bemerkung 2.15 (Pushouts von Gruppen)**.**

1. Das übliche Eindeutigkeitsyoga bei universellen Eigenschaften zeigt, dass Pushouts von Gruppen durch die Ausgangsdaten bis auf kanonische Isomorphie eindeutig bestimmt sind (genauer gesagt sind Pushouts Spezialfälle von Kolimiten).
2. Alle Pushouts in Group existieren; eine konkrete Konstruktion des Pushouts ist durch das sogenannte freie amalgamierte Produkt von Gruppen gegeben (Anhang C.1).
3. Ist A eine Gruppe, so ist

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

   (wobei alle Gruppenhomomorphismen trivial sind) ein Pushout in Group.
4. Ist $\varphi\colon A \longrightarrow G$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & G \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ 1 & \longrightarrow & G/N \end{array}$$

   ein Pushout in Group, wobei $N \subset G$ der kleinste Normalteiler ist, der $\varphi(A)$ enthält, und $\pi\colon G \longrightarrow G/N$ die kanonische Projektion ist.
5. Sei F_2 die Gruppe der reduzierten Wörter über $\{a, b\}$ (zusammen mit der Verknüpfung, die durch Aneinanderhängen und Reduzieren gegeben ist), also die sogenannte *freie Gruppe vom Rang* 2. Dann ist

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\mapsto a} \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow[1\mapsto b]{} & F_2 \end{array}$$

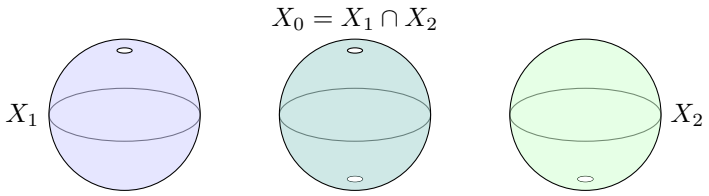


Abbildung (2.18): Berechnung der Fundamentalgruppen höherdimensionaler Sphären mit dem Satz von Seifert und van Kampen

ein Pushout in Group (Anhang C). Man beachte dabei, dass F_2 *nicht* abelsch ist.

Bemerkung 2.16 (Fundamentalgruppoid)**.** Die Fundamentalgruppe besitzt eine auf relativen Homotopieklassen von nicht notwendig geschlossenen Wegen basierende Verallgemeinerung zum sogenannten Fundamentalgruppoid. Dieser erfüllt einen zum Satz von Seifert und van Kampen analogen Satz; der Beweis ist etwas harmonischer, da Zerlegungen von Wegen Wege sind (und man somit alles mit Wegen statt mit Schleifen und Wegen formulieren kann).

Wir geben nun erste Beispiele für Berechnung mithilfe des Satzes von Seifert und van Kampen an:

Beispiel 2.17 (Fundamentalgruppe von höherdimensionalen Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Wir schreiben $N := (0, \ldots, 0, 1)$ bzw. $S := (0, \ldots, -1)$ für den *Nord-* bzw. *Südpol* der n-dimensionalen Sphäre S^n. Auf die offene Überdeckung von S^n durch $X_1 := S^n \setminus \{N\}$ und $X_2 := S^n \setminus \{S\}$ (Abbildung (2.18)) ist der Satz von Seifert und van Kampen anwendbar (wegen $n \geq 2$ ist der Durschnitt $X_0 := X_1 \cap X_2$ wegzusammenhängend!). Also ist

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X_0, e_1^n) & \longrightarrow & \pi_1(X_1, e_1^n) \cong 1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ 1 \cong \pi_1(X_2, e_1^n) & \longrightarrow & \pi_1(S^n, e_1^n) \end{array}$$

ein Pushout in Group; da X_1 und X_2 homöomorph zu $\mathbb{R}^n$ (stereographische Projektion) und somit punktiert kontraktibel sind, ist dabei $\pi_1(X_1, e_1^n) \cong 1 \cong \pi_1(X_2, e_1^n)$.

Anhand der universellen Eigenschaft erhält man somit, dass $\pi_1(S^n, e_1^n)$ trivial ist. (Alternativ kann man sich anhand der konkreten Beschreibung des freien amalgamierten Produktes überlegen, dass $\pi_1(S^n, e_1^n)$ trivial ist.)

Beispiel 2.19 (Fundamentalgruppe der reell-projektiven Ebene)**.** Mithilfe des Satzes von Seifert und van Kampen und der Berechnung von $\pi_1(S^1, 1)$ (Satz 2.10, Satz 2.71) zeigt eine geeignete Zerlegung von $\mathbb{R}P^2$, dass die Fundamentalgruppe von $\mathbb{R}P^2$ zu $\mathbb{Z}/2$ isomorph ist.

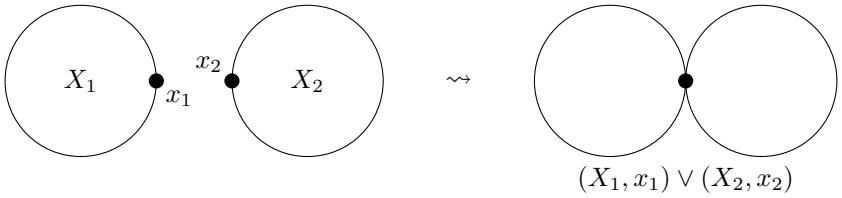


Abbildung (2.21): Die Einpunktvereinigung

Definition 2.20 (Einpunktvereinigun/Wedge)**.** Sei $((X_i, x_i))_{i\in I}$ eine Familie punktierter topologischer Räume, wobei die Menge I nicht-leer sei. Die *Einpunktvereinigung* (das *Wedge*) dieser Familie ist als

$$\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i) := \Big(\bigsqcup_{i\in I} X_i/\sim, z_0\Big)$$

definiert, wobei $\bigsqcup_{i\in I} X_i/\sim$ die Quotiententopologie (Definition 1.6) der disjunkten Vereinigungstopologie trägt, „$\sim$“ die Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung ist, die von

$$x_i \sim x_j$$

für alle $i, j \in I$ erzeugt ist und z_0 der von den Basispunkten $(x_i)_{i\in I}$ induzierte Punkt im Quotient ist. (D.h. die punktierten Räume werden entlang ihrer Basispunkte verklebt (Abbildung (2.21).)

Beispiel 2.22 (Fundamentalgruppe von Einpunktvereinigungen endlich vieler Kreise)**.** Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$(B_n, b_n) := \bigvee_{\{1,\dots,n\}} (S^1, 1).$$

Induktiv folgt dann mit dem Satz von Seifert und van Kampen und der Berechnung von $\pi_1(S^1, 1)$ (Satz 2.10, Satz 2.71) mithilfe der Zerlegung aus Abbildung (2.23), dass $\pi_1(B_n, b_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ frei vom Rang n ist. Dabei entsprechen die (einmal umlaufenen) Kreise Erzeugern in den $\mathbb{Z}$-Faktoren. Man beachte, dass diese Gruppen für alle $n \geq 2$ *nicht* abelsch sind.

Caveat 2.24 (Fundamentalgruppe von Einpunktvereinigungen)**.** Im allgemeinen gilt *nicht* für alle punktierten Räume (X, x_0) und (Y, y_0), dass $\pi_1((X, x_0) \vee (Y, y_0)) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0)$ ist; dies liegt grob gesprochen daran, dass es im allgemeinen *keine* Umgebung des Basispunktes gibt, die „gutartig“ ist.

Aus der Beschreibung von Produkten in der Kategorie $\mathsf{Top}_{*_\mathrm{h}}$ erhalten wir unmittelbar, dass die Fundamentalgruppe im folgenden Sinne mit Produkten verträglich ist:

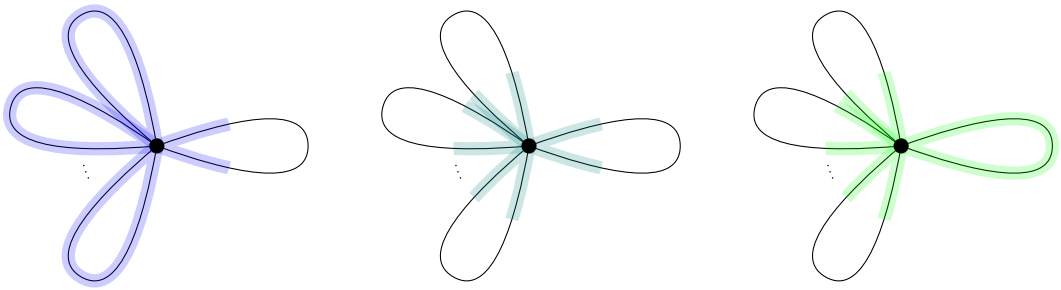


Abbildung (2.23): Berechnung der Fundamentalgruppe von endlichen Einpunktvereinigungen von Kreisen mit dem Satz von Seifert und van Kampen

Proposition 2.25 (π_n und Produkte)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $(X_i, x_i)_{i\in I}$ eine Familie punktierter topologischer Räume. Dann ist*

$$\begin{aligned}\pi_n\Big(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I}\Big) &\longrightarrow \prod_{i\in I} \pi_n(X_i, x_i)\\ g &\longmapsto \big(\pi_n(p_i)(g)\big)_{i\in I}\end{aligned}$$

eine Bijektion; dabei bezeichnet $p_i\colon \prod_{j\in I} X_j \longrightarrow X_i$ zu $i \in I$ die Projektion auf den i-ten Faktor. Ist $n \geq 1$, so ist diese Abbildung ein Gruppenisomorphismus.

Beweisskizze. Da $(\prod_{i\in I} X_i, (x_i)_{i\in I})$ zusammen mit den punktierten Homotopieklassen $([p_i]_*)_{i\in I}$ das Produkt in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ der Familie $(X_i, x_i)_{i\in I}$ ist und da der Funktor π_n als $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}}((S_n, e_1^n), \cdot\,)$ definiert ist, folgt die Bijektivität aus der universellen Eigenschaft des Produkts (angewendet auf den Testraum (S^n, e_1^n)).

Da die von den Projektionen via π_1 induzierten Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind und bijektive Gruppenhomomorphismen Isomorphismen sind, folgt die zweite Behauptung. □

Beispiel 2.26 (Fundamentalgruppe des Torus)**.** Der *zweidimensionale Torus* ist als

$$T^2 := S^1 \times S^1$$

definiert. Mit Proposition 2.25 und der Berechnung der Fundamentalgruppe des Kreises (Satz 2.10, Satz 2.71) erhalten wir also

$$\pi_1\big(T^2, (1,1)\big) \cong \pi_1(S^1, 1) \times \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}.$$

In Abbildung (2.27) sind entsprechende Erzeuger der Fundamentalgruppe des Torus eingezeichnet.

Insbesondere folgt:

– Der Torus ist nicht zu $(S^1, 1)$ punktiert homotopieäquivalent.

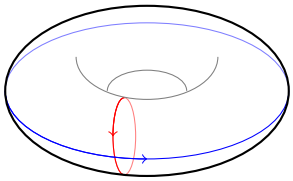


Abbildung (2.27): Erzeuger der Fundamentalgruppe des Torus

- Der Torus ist nicht zu (S^2, e_1^2) punktiert homotopieäquivalent. Daher sind der zweidimensionale Torus und die zweidimensionale Sphäre auch nicht homöomorph. Dies ist ein Teil der Klassifikation der kompakten Flächen, in der die Berechnung der Fundamentalgruppen eingesetzt werden kann.
- Der Torus ist nicht zu $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ punktiert homotopieäquivalent.

Außerdem ist die Fundamentalgruppe im folgenden Sinne mit (verallgemeinerten) aufsteigenden Vereinigungen verträglich:

Proposition 2.28 (π_n und aufsteigende Vereinigungen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum, sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und sei $(X_i)_{i \in I}$ ein bezüglich Inklusion gerichtetes System von Teilräumen von X mit*

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i^\circ \qquad \text{und} \qquad x_0 \in \bigcap_{i \in I} X_i.$$

Dann gilt:

1. *Es ist $\pi_n(X, x_0) = \bigcup_{i \in I} \pi_n(X_i \hookrightarrow X)\big(\pi_n(X_i, x_0)\big)$.*
2. *Sind $i, k \in I$ und $g \in \pi_n(X_i, x_0)$, $h \in \pi_n(X_k, x_0)$ mit $\pi_n(X_i \hookrightarrow X)(g) = \pi_n(X_k \hookrightarrow X)(h)$, so gibt es bereits ein $j \in I$ mit $i \leq j$ und $k \leq j$ und*

$$\pi_n(X_i \hookrightarrow X_j)(g) = \pi_n(X_k \hookrightarrow X_j)(h).$$

Insbesondere ist $\pi_n(X, x_0)$ (zusammen mit den Abbildungen $(\pi_n(X_i \hookrightarrow X))_{i \in I}$) der direkte Limes des Systems $((\pi_n(X_i, x_0))_{i \in I}, (\pi_n(X_i \hookrightarrow X_j))_{i,j \in I, i \leq j})$ in Set *(bzw. in* Group*, falls $n \geq 1$).*

Beweisskizze. Der Beweis beruht auf einem Kompaktheitsargument – sowohl S^n als auch $S^n \times [0, 1]$ sind kompakt und daher lebt jeder Repräsentant eines Elements von $\pi_n(X, x_0)$ und jede punktierte Homotopie zwischen Repräsentanten bereits in einer der Teilmengen $(X_i)_{i \in I}$. □

Beispiel 2.29 (Fundamentalgruppe von Einpunktvereinigungen von Kreisen)**.** Sei I eine Menge. Dann folgt aus der Berechnung der Fundamentalgruppe von endlichen Einpunktvereinigungen von Kreisen und Proposition 2.28 (angewendet auf ein geeignetes gerichtetes System), dass $\pi_1\Big(\bigvee_I (S^1, 1)\Big)$ frei vom Rang $|I|$ ist, wobei die Kreise (einmal durchlaufen) Erzeugern der $\mathbb{Z}$-Faktoren entsprechen.

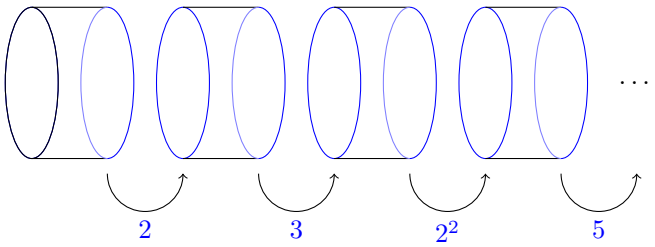


Abbildung (2.30): Ein „Teleskop“

Beispiel 2.31 (Teleskop – ein Spezialfall einer Rationalisierung)**.** Wir betrachten den Raum in Abbildung (2.30), bestehend aus Zylindern $[0,1] \times S^1$, die mit den angegebenen Anzahlen von „Herumwicklungen“ verklebt sind; dabei treten alle Primpotenzen als Anzahlen auf.

Man kann mit dem Satz von Seifert und van Kampen die Fundamentalgruppen (bezüglich einem Basispunkt im Zylinder ganz links) der Anfangsstücke berechnen und erhält (aufgefasst als Untergruppen von $\mathbb{Q}$) die Folge

$$\mathbb{Z} \subset \frac{1}{2} \cdot \mathbb{Z} \subset \frac{1}{6} \cdot \mathbb{Z} \subset \frac{1}{24} \cdot \mathbb{Z} \subset \frac{1}{120} \cdot \mathbb{Z} \subset \dots$$

von Gruppen. Mit Proposition 2.28 erhält man somit, dass der gesamte Raum die Fundamentalgruppe $\mathbb{Q}$ hat.

Aufbauend auf diesem Beispiel kann man die Theorie der Rationalisiserungen bzw. Lokalisierungen von topologischen Räumen entwickeln.

2.3. Überlagerungen – Grundbegriffe

Das Ziel ist nun, eine Interpretation der Fundamentalgruppe als Automorphismengruppe anzugeben. Dies liefert

- einerseits eine Beschreibung gewisser geometrischer Objekte mithilfe der Fundamentalgruppe und
- andererseits einen Zugang um in manchen Fällen die Fundamentalgruppe geometrisch zu berechnen.

Der zentrale Begriff in diesem Kontext ist der der Überlagerung; Überlagerungen sind eine spezielle Klasse von lokal einfachen Abbildungen:

Definition 2.33 ((lokal) triviales Bündel, Überlagerung)**.** Seien F, E, B topologische Räume.

- Eine stetige Abbildung $p\colon E \longrightarrow B$ ist ein *triviales Bündel über B mit Faser F*, falls es einen Homöomorphismus $f\colon E \longrightarrow B \times F$ mit

  $$p_B \circ f = p$$

  gibt, wobei $p_B\colon B \times F \longrightarrow B$ die Projektion auf den ersten Faktor ist.

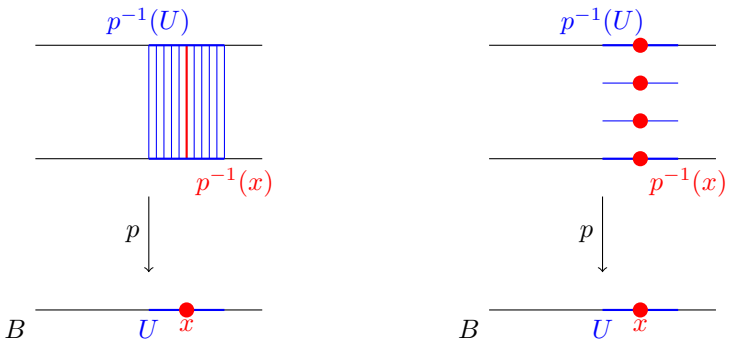


Abbildung (2.32): Schematische Darstellung eines lokal trivialen Bündels und einer Überlagerung

- Eine stetige Abbildung $p\colon E \longrightarrow B$ ist ein *lokal triviales Bündel über B mit Faser F*, falls: Für alle $x \in B$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset B$ von x, so dass die Einschränkung $p|_{p^{-1}(U)}\colon p^{-1}(U) \longrightarrow U$ ein triviales Bündel über U mit Faser F ist.
  Man nennt E dann den *Totalraum* des Bündels. Ist $x \in B$, so nennt man $p^{-1}(x) \subset E$ die *Faser von p über x* (Abbildung (2.32)).
- Lokal triviale Bündel mit diskreter Faser F heißen *Überlagerungen*. Man nennt dann $|F|$ die *Anzahl der Blätter* der Überlagerung (Abbildung (2.32)).

Caveat 2.34 (covering)**.** Das englische Wort *covering* hat im Deutschen in der Topologie zwei sehr verschiedene Bedeutungen, nämlich „Überdeckung“ und „Überlagerung.“

Beispiel 2.35.

- Vektorbündel (z.B. Tangentialbündel differenzierbarer Mannigfaltigkeiten) sind lokal triviale Bündel; die Fasern sind hierbei Vektorräume.
- Die stetigen Abbildungen in Abbildung (2.36) sind lokal triviale Bündel mit Faser $[0,1]$ über S^1. Das linke Bündel ist trivial, das rechte *nicht*. Es handelt sich hierbei *nicht* um Überlagerungen.
- Fassen wir S^3 als Einheitssphäre in $\mathbb{C}^2$ auf, so liefert die Skalarmultiplikation mit Elementen aus S^1 (aufgefasst als Einheitskreis in $\mathbb{C}$) eine stetige Gruppenoperation $S^1 \curvearrowright S^3$. Man kann zeigen, dass die zugehörige Quotientenabbildung $p\colon S^3 \longrightarrow S^1 \setminus S^3$ ein lokal triviales Bündel mit Faser S^1 ist, die sogenannte *Hopf-Faserung*. Der Basisraum ist dabei homöomorph zu S^2. Es ist eines der grundlegenden Resultate der Homotopietheorie, dass die durch p repräsentierte Klasse in $\pi_3(S^2, e_1^2)$ *nicht* trivial ist.
- Ist I eine Menge und X ein topologischer Raum, so ist

$$\begin{array}{c} \coprod_I X \\ \downarrow{\scriptstyle \coprod_I \mathrm{id}_X} \\ X \end{array}$$

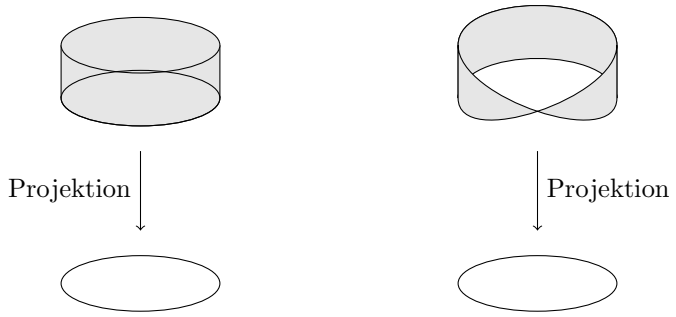


Abbildung (2.36): Lokal triviale Bündel über S^1 mit Faser $[0,1]$

eine (triviale) $|I|$-blättrige Überlagerung.

– In Abbildung (2.37) sind zwei Überlagerungen von S^1 dargestellt. Man kann direkt nachrechnen, dass es sich dabei tatsächlich um Überlagerungen handelt; alternativ kann man dazu die Beobachtung aus Proposition 2.40 verwenden. Da die Totalräume dieser Überlagerungen zusammenhängend sind und die Überlagerungen mehr als ein Blatt haben, sind diese Überlagerungen keine trivialen Überlagerungen.

Gutartige Gruppenoperationen liefern Überlagerungen. Grundbegriffe über Gruppenoperationen sind in Anhang D zusammengestellt.

Definition 2.38 (eigentlich diskontinuierliche Operation)**.** Sei $G \curvearrowright X$ eine Gruppenoperation in Top einer Gruppe G auf einem topologischen Raum X. Diese Operation heißt *eigentlich diskontinuierlich*, falls folgendes gilt: Für jedes $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x mit

$$\forall_{g \in G \setminus \{e\}} \quad g \cdot U \cap U = \emptyset.$$

Caveat 2.39. Aus der Definition erhält man sofort, dass eigentlich diskontinuierliche Gruppenoperationen frei sind. Im allgemeinen sind jedoch freie Operationen *nicht* eigentlich diskontinuierlich (wie man etwa an der Operation von $\mathbb{Z}$ auf S^1 durch eine irrationale Drehung sehen kann).

Mit einfachen Argumenten aus der mengentheoretischen Topologie erhält man dann:

Proposition 2.40 (Gruppenoperationen liefern Überlagerungen)**.** *Sei $G \curvearrowright X$ eine eigentlich diskontinuierliche Operation in* Top*. Dann ist die Projektion*

$$\begin{aligned} p\colon X &\longrightarrow G \setminus X \\ x &\longmapsto G \cdot x \end{aligned}$$

eine Überlagerung mit Faser G. Dabei betrachten wir auf $G \setminus X$ die durch die surjektive Abbildung p induzierte Quotiententopologie.

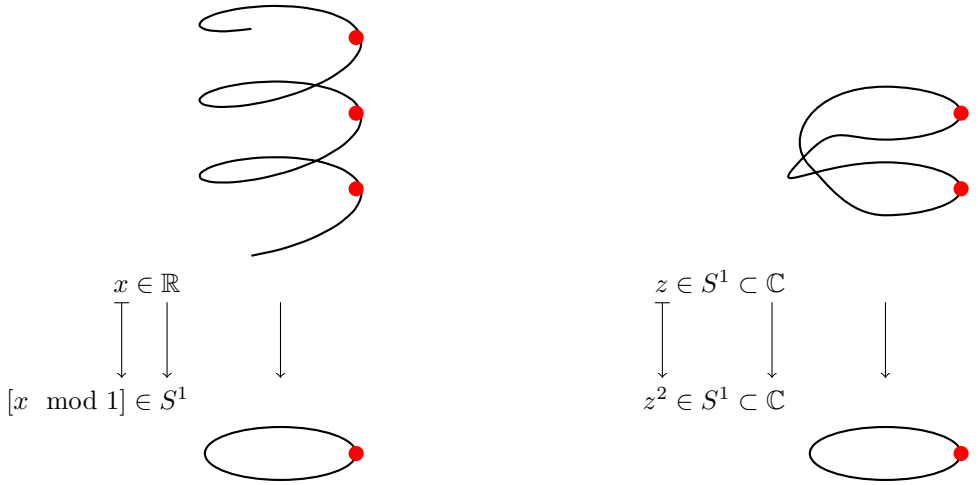


Abbildung (2.37): Überlagerungen von S^1

Beispiel 2.41 (Tori)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Operation $\mathbb{Z}^n \curvearrowright \mathbb{R}^n$, die durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (z, x) &\longmapsto z + x \end{aligned}$$

gegeben ist, eigentlich diskontinuierlich. Also ist die Projektion

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n \cong (S^1)^n$$

eine $|\mathbb{Z}^n|$-blättrige Überlagerung des n-dimensionalen Torus $(S^1)^n$.

Beispiel 2.42 (reell-projektive Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Operation $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$, die durch

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2 \times S^n &\longrightarrow S^n \\ ([0], x) &\longmapsto x \\ ([1], x) &\longmapsto -x \end{aligned}$$

gegeben ist, eigentlich diskontinuierlich. Also ist die Projektion

$$S^n \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \setminus S^n \cong \mathbb{R}P^n$$

eine zweiblättrige Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$.

Es drängen sich nun folgende Fragen auf:
- Inwieweit sind alle Überlagerungen von diesem Typ?
- Was ist der Zusammenhang mit der Fundamentalgruppe?

– Bzw. wie können wir allgemein Überlagerungen über einem gegebenen Basisraum klassifizieren?

Eines der Bindeglieder in diesem Zusammenhang ist die sogenannte Decktransformationsgruppe:

Definition 2.43 (Lift, Morphismus von Überlagerungen, Decktransformation)**.** Sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung.

– Sei $f\colon Z \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung. Ein *p-Lift von f* ist eine stetige Abbildung $\widetilde{f}\colon Z \longrightarrow Y$ mit $p \circ \widetilde{f} = f$.

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & \overset{\widetilde{f}}{\nearrow} & \big\downarrow p \\ Z & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$

– Sei $p'\colon Y' \longrightarrow X'$ eine Überlagerung. Ein *Morphismus von p' nach p* ist ein Paar $(\widetilde{f}, f)$, wobei $f\colon X' \longrightarrow X$ eine stetige Abbildung und $\widetilde{f}\colon Y' \longrightarrow Y$ ein p-Lift von $f \circ p'$ ist.

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{\widetilde{f}} & Y \\ {\scriptstyle p'}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p} \\ X' & \xrightarrow[f]{} & X \end{array}$$

– Dies führt zur Kategorie Cov der Überlagerungen:
  – Objekte: Die Klasse aller Überlagerungen.
  – Morphismen: Morphismen zwischen Überlagerungen im obigen Sinne.
  – Verknüpfungen: Gewöhnliche Abbildungskomposition der beiden Komponenten.
– Analog definieren wir die Kategorie Cov_* der punktierten Überlagerungen:
  – Objekte: Die Klasse aller punktierten Überlagerungen zwischen punktierten topologischen Räumen.
  – Morphismen: Morphismen zwischen Überlagerungen im obigen Sinne, wobei beide Komponenten punktierte Abbildungen sind.
  – Verknüpfungen: Gewöhnliche Abbildungskomposition der beiden Komponenten.
– Ist X ein topologischer Raum, so definieren wir die Kategorie Cov_X der Überlagerungen über X durch:
  – Objekte: Die Klasse aller Überlagerungen von X.
  – Morphismen: Sind $p\colon Y \longrightarrow X$ und $p'\colon Y' \longrightarrow X$ Überlagerungen von X, so ist

$$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}_X}(p', p) := \big\{ f \in \mathrm{map}(Y', Y) \;\big|\; (f, \mathrm{id}_X) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}}(p', p) \big\}.$$

  – Verknüpfungen: Gewöhnliche Abbildungskomposition.

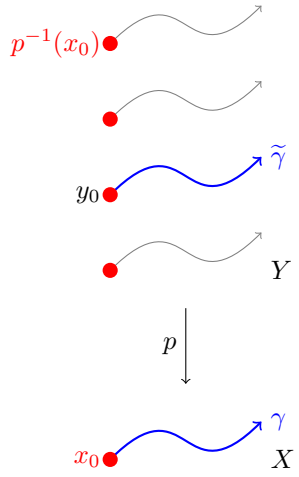


Abbildung (2.45): Lifts von Wegen in Überlagerungen

- Analog definieren wir zu einem punktierten topologischen Raum (X, x_0) die Kategorie $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$ der punktierten Überlagerungen über (X, x_0).
- Die Automorphismengruppe

$$\begin{aligned}\mathrm{Deck}(p) &:= \mathrm{Aut}_{\mathrm{Cov}_X}(p)\\ &= \big\{f\colon Y \longrightarrow Y \;\big|\; f \text{ ist ein Homöomorphismus mit } p\circ f = p\big\}\end{aligned}$$

  heißt *Decktransformationsgruppe von p*.

Beispiel 2.44 (symmetrische Gruppen als Decktransformationsgruppen)**.** Ist I eine Menge (versehen mit der diskreten Topologie), so hat die triviale Überlagerung $I \longrightarrow \{1\}$ (d.h. die konstante Abbildung) die Decktransformationsgruppe $\mathrm{Sym}(I)$ aller Bijektionen $I \longrightarrow I$ (bezüglich Komposition).

Unser Ziel ist im folgenden, die Kategorie $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$ für punktierte topologische Räume (X, x_0) und ihren Zusammenhang mit $\pi_x(X, x_0)$ zu verstehen.

2.4. Überlagerungen – Liftungseigenschaften

(Fast) alle Resultate der Überlagerungstheorie beruhen auf der folgenden Beobachtung (Abbildung (2.45)):

Proposition 2.46 (Lifts von (Homotopien von) Wegen in Überlagerungen)**.** *Sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung, sei $x_0 \in X$ und sei $y_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

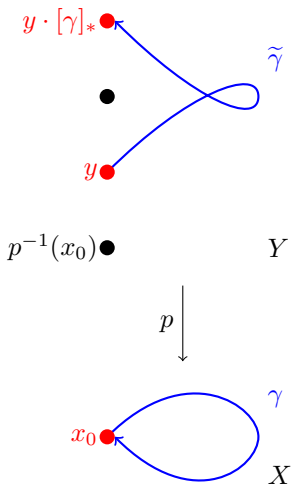


Abbildung (2.47): Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern

1. *Ist* $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow X$ *ein stetiger Weg mit* $\gamma(0) = x_0$*, so existiert genau ein* p*-Lift* $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow Y$ *von* γ *mit* $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$*.*
2. *Ist* $h\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow X$ *stetig und gilt*

$$\forall_{t\in[0,1]} \quad h(0,t) = x_0,$$

so gibt es genau einen p*-Lift* $\widetilde{h}\colon [0,1] \times [0,1] \longrightarrow Y$ *von* h *mit*

$$\forall_{t\in[0,1]} \quad \widetilde{h}(0,t) = y_0.$$

Beweisskizze. Man zeigt die Existenz und Eindeutigkeit solcher Lifts zunächst für den Fall, dass die betrachtete Überlagerung trivial ist.

Für den allgemeinen Fall zerlegt man $[0,1]$ bzw. $[0,1] \times [0,1]$ mithilfe des Lebesgue-Lemmas in endlich viele hinreichend kleine Stücke und hangelt sich dann mit dem bereits gezeigten trivialen Fall und dem Verklebelemma induktiv von einem Stück zum nächsten. Dabei geht im Beweis des zweiten Teils auch die Eindeutigkeit aus dem ersten Teil ein (an den Kanten der zu verklebenden Definitionsbereiche). □

Zum Beispiel erhält man daraus eine Rechtsoperation der Fundamentalgruppe auf den Fasern (Abbildung (2.47)):

Korollar 2.48 (Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern)**.** *Sei* $p\colon Y \longrightarrow X$ *eine Überlagerung und sei* $x_0 \in X$*.*

1. *Dann ist*

$$\begin{aligned} p^{-1}(x_0) \times \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow p^{-1}(x_0) \\ (y, [\gamma]_*) &\longmapsto \widetilde{\gamma}(1) \\ &\qquad \textit{wobei } \widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow Y \textit{ der p-Lift} \\ &\qquad \textit{von } [0,1] \longrightarrow X, t \mapsto \gamma([t]) \textit{ mit } \widetilde{\gamma}(0) = y \textit{ ist} \end{aligned}$$

   eine wohldefinierte Rechtsoperation von $\pi_1(X, x_0)$ auf $p^{-1}(x_0)$.
2. *Ist $y \in p^{-1}(x_0)$, so ist $\pi_1(p)(\pi_1(Y, y))$ die Standgruppe von y bezüglich dieser Operation.*
3. *Diese Operation ist genau dann transitiv, wenn die Faser $p^{-1}(x_0)$ in einer Wegzusammenhangskomponente von Y enthalten ist, d.h., wenn je zwei Punkte aus der Faser $p^{-1}(x_0)$ durch einen Weg in Y verbunden werden können.*

Caveat 2.49. Dass diese Operation der Fundamentalgruppe interessant ist, beruht darauf, dass Lifts von geschlossenen Wegen im allgemeinen *keine* geschlossenen Wege sind!

Außerdem erhalten wir aus Proposition 2.46 die folgende Eindeutigkeitsaussage für Lifts, indem wir jeweils Wege (und ihre Lifts) vom Basispunkt zu den den anderen Punkten betrachten:

Korollar 2.50 (Eindeutigkeit von Lifts)**.** *Sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung, sei Z wegzusammenhängend, sei $f\colon Z \longrightarrow X$ stetig und sei $z_0 \in Z$. Sind $\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2\colon Z \longrightarrow Y$ Lifts von f bezüglich p mit $\widetilde{f}_1(z_0) = \widetilde{f}_2(z_0)$, so folgt*

$$\widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2.$$

Bemerkung 2.51. Man kann die obige Eindeutigkeit auch unter der schwächeren Voraussetzung, dass der Startraum zusammenhängend (statt wegzusammenhängend) ist, beweisen; dies erfordert jedoch ein anderes Argument (aus der mengentheoretischen Topologie).

Indem man Proposition 2.46 konsequent anwendet, erhält man zusätzlich die folgende Existenzaussage für Lifts:

Satz 2.52 (Liftungskriterium für Überlagerungen via π_1)**.** *Sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine Überlagerung, seien $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$ mit $p(y_0) = x_0$ und sei $f\colon (Z, z_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine punktierte stetige Abbildung, wobei Z wegzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend sei. Dann besitzt f genau dann einen p-Lift $(Z, z_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, wenn*

$$\pi_1(f)\big(\pi_1(Z, z_0)\big) \subset \pi_1(p)\big(\pi_1(Y, y_0)\big).$$

Definition 2.53 (lokal wegzusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X ist *lokal wegzusammenhängend*, wenn es zu jedem $x \in X$ und zu jeder offenen Umgebung $U \subset X$ von x eine wegzusammenhängende offene Umgebung $V \subset X$ von x mit $V \subset U$ gibt.

Zum Beispiel sind alle Mannigfaltigkeiten lokal wegzusammenhängend.

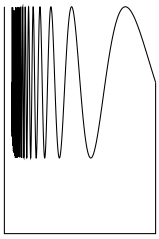


Abbildung (2.55): Der Warschauer Kreis

Caveat 2.54 (wegzusammenhängend vs. lokal wegzusammenhängend)**.** Im allgemeinen sind wegzusammenhängende Räume *nicht* lokal wegzusammenhängend, wie z.B. der Warschauer Kreis (Abbildung (2.55)) zeigt. Und im allgemeinen sind lokal wegzusammenhängende Räume *nicht* wegzusammenhängend, wie z.B. diskrete Räume mit mindestens zwei Elementen zeigen.

Beweisskizze von Satz 2.52. Falls es einen Lift gibt, so folgt die Aussage über π_1 direkt aus der Funktorialität von π_1.

Es gelte umgekehrt $\pi_1(f)\big(\pi_1(Z,z_0)\big) \subset \pi_1(p)\big(\pi_1(Y,y_0)\big)$. Wir zeigen nun, dass f dann einen p-Lift $\widetilde{f}\colon (Z,z_0) \longrightarrow (Y,y_0)$ besitzt:

Sei $z \in Z$. Da Z wegzusammenhängend ist, gibt es einen Weg $\gamma\colon [0,1] \longrightarrow Z$ von z_0 nach z. Sei $\widetilde{\gamma}\colon [0,1] \longrightarrow Y$ der p-Lift von $f \circ \gamma$ mit $\widetilde{\gamma}(0) = y_0$. Dann definieren wir

$$\widetilde{f}(z) := \widetilde{\gamma}(1).$$

Nach Konstruktion ist dann $p \circ \widetilde{f}(z) = f(z)$.

Aus der Bedingung $\pi_1(f)\big(\pi_1(Z,z_0)\big) \subset \pi_1(p)\big(\pi_1(Y,y_0)\big)$ und der Tatsache, dass $\pi_1(p)\big(\pi_1(Y,y_0)\big) \subset \pi_1(X,x_0)$ trivial auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ operiert, folgt, dass der Wert $\widetilde{f}(z)$ nicht vom gewählten Weg γ von z_0 nach z abhängt.

Insbesondere liefert daher die Betrachtung konstanter Wege, dass $\widetilde{f}(z_0) = y_0$.

Die Stetigkeit von $\widetilde{f}$ kann man zeigen, indem man verwendet, dass Z lokal wegzusammenhängend ist. □

Insbesondere erhalten wir aus Korollar 2.50 und Satz 2.52:

Korollar 2.56 (Lifts von Abbildungen aus einfach zusammenhängenden Räumen)**.** *Sei $p\colon (Y,y_0) \longrightarrow (X,x_0)$ eine punktierte Überlagerung, sei Z lokal wegzusammenhängend und einfach zusammenhängend, und sei $z_0 \in Z$. Dann besitzt jede punktierte stetige Abbildung $f\colon (Z,z_0) \longrightarrow (X,x_0)$ genau einen p-Lift $(Z,z_0) \longrightarrow (Y,y_0)$.*

Definition 2.57 (einfach zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X ist *einfach zusammenhängend*, wenn er wegzusammenhängend ist und die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ für einen Basispunkt $x_0 \in X$ (äquivalent: für alle Basispunkte $x_0 \in X$) trivial ist.

Satz 2.52 und Korollar 2.56 liefern das folgende Hilfsmittel zur Berechnung von π_* (da höherdimensionale Sphären einfach zusammenhängend sind):

Korollar 2.58 (π_*(Überlagerungsabbildungen))**.** *Sei $p\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine punktierte Überlagerung.*

1. *Dann ist $\pi_1(p)\colon \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv.*
2. *Und für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist $\pi_n(p)\colon \pi_n(Y, y_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ bijektiv (und somit ein Gruppenisomorphismus).*

Beispiel 2.59. Mithilfe der Überlagerung $(\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, 1)$ aus Beispiel 2.35 und der Tatsache, dass $(\mathbb{R}, 0)$ punktiert kontraktibel ist, folgt also

$$\left|\pi_n(S^1, 1)\right| = \left|\pi_n(\mathbb{R}, 0)\right| = 1$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. D.h. S^1 besitzt keine höherdimensionalen „sphärischen Löcher."

Caveat 2.60. Die entsprechende Aussage für höherdimensionale Sphären ist falsch: Es gilt zwar

$$\pi_n(S^n, e_1^n) \cong \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad \forall_{k \in \{0,\ldots,n-1\}} \quad \pi_k(S^n, e_1^n) \cong \{0\}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, aber die höheren Homotopiegruppen von S^n sind im allgemeinen nicht-trivial (z.B. gilt $\pi_3(S^2, e_1^2) \cong \mathbb{Z}$. Diese Resultate können mit Hilfsmitteln aus der Homotopietheorie bewiesen werden. Die allgemeine Struktur von höheren Homotopiegruppen von Sphären ist jedoch immer noch unverstanden und Gegenstand aktueller Forschung.

2.5. Überlagerungen – Klassifikation

Wir wollen nun die Kategorie $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$ für „gutartige" punktierte Räume (X, x_0) genauer verstehen.

Definition 2.61 (universelle Überlagerung)**.** Eine Überlagerung $\widetilde{X} \longrightarrow X$ eine topologischen Raumes X heißt *universelle Überlagerung von X*, falls $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend und nicht-leer ist.

Mit Korollar 2.56 folgt dann:

Proposition 2.62 (universelle Überlagerungen sind initial)**.** *Sei X ein lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, der eine universelle Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ besitzt. Sei $x_0 \in X$ und sei $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

1. *Dann ist $p\colon (\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow (X, x_0)$ ein initiales Objekt in $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$, d.h. für jede punktierte Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ gibt es genau einen Morphismus von p nach q in $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$.*
2. *Insbesondere sind alle punktierten universellen Überlagerungen von (X, x_0) in der Kategorie $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$ kanonisch isomorph.*

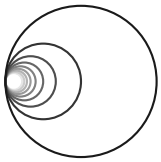


Abbildung (2.68): Der Hawaiianische Ohrring

Beispiel 2.63 (universelle Überlagerungen von Tori und reell-projektiven Räumen)**.**

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Projektion

$$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n \setminus \mathbb{R}^n \cong (S^1)^n$$

  des n-dimensionalen Torus (Beispiel 2.41) „die“ universelle Überlagerung des n-dimensionalen Torus.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist die Projektion

$$S^n \longrightarrow \mathbb{Z}/2 \setminus S^n = \mathbb{R}P^n$$

  der n-dimensionalen reell-projektiven Raums $\mathbb{R}P^n$ (Beispiel 2.42) „die“ universelle Überlagerung von $\mathbb{R}P^n$.

Caveat 2.64. *Nicht* jeder (nicht-leere, wegzusammenhängende) topologische Raum besitzt eine universelle Überlagerung!

Satz 2.65 (Existenz universeller Überlagerungen)**.** *Sei X nicht-leer, wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfach zusammenhängend. Dann besitzt X eine universelle Überlagerung.*

Definition 2.66 (semi-lokal einfach zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum X heißt *semi-lokal einfach zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x mit der Eigenschaft, dass der von der Inklusion induzierte Homomorphismus

$$\pi_1(U, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

trivial ist (d.h. jede punktierte Schleife in (U, x) ist in (X, x) punktiert nullhomotop).

Beispiel 2.67 (semi-lokal einfach zusammenhängende Räume)**.**

- Einfach zusammenhängende Räume sind semi-lokal einfach zusammenhängend.
- Mannigfaltigkeiten sind semi-lokal einfach zusammenhängend.
- Der Hawaiianische Ohrring (Abbildung (2.68)) ist *nicht* semi-lokal einfach zusammenhängend.

Beweisskizze von Satz 2.65. Motiviert durch die Liftungseigenschaften von (geschlossenen) Wegen in einfach zusammenhängende Überlagerungen betrachtet man die folgende Konstruktion: Sei

$$\widetilde{X} := \mathrm{map}_*\big(([0,1],0),(X,x_0)\big)/\sim,$$

wobei zwei punktierte Wege $\gamma, \eta \in \mathrm{map}_*(([0,1],0),(X,x_0))$ genau dann $\gamma \sim \eta$ erfüllen, wenn $\gamma * \overline{\eta}$ das neutrale Element in $\pi_1(X,x_0)$ repräsentiert. Wir versehen $\widetilde{X}$ mit der Quotiententopologie der Teilraumtopologie der kompakt-offenen Topologie.

Dann ist $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend, die Abbildung

$$\begin{aligned}\widetilde{X} &\longrightarrow X\\ [\gamma]_\sim &\longmapsto \gamma(1).\end{aligned}$$

ist eine Überlagerung (dies folgt zum Beispiel mit einer geeigneten eigentlich diskontinuierlichen Operation von $\pi_1(X,x_0)$ auf $\widetilde{X}$ aus Proposition 2.40), und $\widetilde{X}$ ist einfach zusammenhängend (dies folgt zum Beispiel mithilfe der Operation der Fundamentalgruppe auf den Fasern). □

Wir geben nun die angestrebte Interpretation der Fundamentalgruppe als Automorphismengruppe:

Satz 2.69 (Fundamentalgruppe als Automorphismengruppe)**.** *Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender topologischer Raum, der eine universelle Überlagerung $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ besitzt. Sei $x_0 \in X$ und $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$. Zu $g \in \pi_1(X,x_0)$ sei $f_g\colon \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$ der eindeutig bestimmte p-Lift von p mit $f_g(\widetilde{x}_0) = \widetilde{x}_0 \cdot g$.*

1. *Dann ist*

$$\begin{aligned}\pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \mathrm{Deck}(p)\\ g &\longmapsto f_g\end{aligned}$$

   ein Gruppenisomorphismus.
2. *Insbesondere operiert die Fundamentalgruppe $\pi_1(X,x_0)$ eigentlich diskontinuierlich auf $\widetilde{X}$ und $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ induziert einen Homöomorphismus*

$$\pi_1(X,x_0) \setminus \widetilde{X} \cong_{\mathsf{Top}} X.$$

Beweisskizze. Wir zeigen den ersten Teil in den folgenden Schritten:

– Da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, ist die Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi\colon \pi_1(X,x_0) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}_X}(p,p)\\ g &\longmapsto f_g\end{aligned}$$

nach den Liftungseigenschaften (Korollar 2.56) wohldefiniert.

– Mit einer sorgfältigen Analyse der Definition der Operation der Fundamentalgruppe auf der Faser $p^{-1}(x_0)$ und der Eindeutigkeit von Lifts (Korollar 2.50) folgt: Für alle $g, h \in \pi_1(X, x_0)$ gilt

$$\varphi(g \cdot h) = \varphi(g) \circ \varphi(h)$$

und $\varphi(1) = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$.
– Insbesondere ist $\varphi(g) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(1) = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$ und $\varphi(g^{-1}) \circ \varphi(g) = \mathrm{id}_{\widetilde{X}}$ für alle $g \in G$. Das Bild von φ liegt also tatsächlich in $\mathrm{Deck}(p)$.
– Außerdem kann man mithilfe der Liftungseigenschaften (Korollar 2.56) leicht nachweisen, dass φ bijektiv ist.

Wir kommen nun zum zweiten Teil: Da $\widetilde{X}$ wegzusammenhängend ist, folgt aus der Eindeutigkeit von Lifts (Korollar 2.50), dass $\mathrm{Deck}(p)$ durch

$$\begin{aligned} \mathrm{Deck}(p) \times \widetilde{X} &\longrightarrow \widetilde{X} \\ (f, x) &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

eigentlich diskontinuierlich auf $\widetilde{X}$ operiert. Da Decktransformationen mit p verträglich sind, induziert p eine wohldefinierte Abbildung

$$\begin{aligned} \overline{p}\colon \mathrm{Deck}(p) \setminus \widetilde{X} &\longrightarrow X \\ \mathrm{Deck}(p) \cdot x &\longrightarrow p(x). \end{aligned}$$

Nach Definition ist $\overline{p} \circ q = p$, wobei $q\colon \widetilde{X} \longrightarrow \mathrm{Deck}(p) \setminus \widetilde{X}$ die Projektion ist. Aus den Eigenschaften der Quotiententopologie und der Überlagerung p folgt, dass $\overline{p}$ stetig, offen und surjektiv ist. Da $\widetilde{X}$ einfach zusammenhängend ist, operiert $\mathrm{Deck}(p)$ transitiv auf den Fasern von p (Korollar 2.48); somit ist $\overline{p}$ auch injektiv.

Also ist $\overline{p}\colon \mathrm{Deck}(p) \setminus \widetilde{X} \longrightarrow X$ ein Homöomorphismus. Zusammen mit dem ersten Teil folgt nun die Behauptung. □

Umgekehrt erhalten wir auch durch Gruppenoperationen eine Beschreibung der Decktransformationsgruppe:

Proposition 2.70 (Decktransformationen von Quotienten)**.** *Sei $G \curvearrowright Y$ eine eigentlich diskontinuierliche Operation der Gruppe G auf dem wegzusammenhängenden und lokal wegzusammenhängenden (und nicht-leeren) topologischen Raum Y. Sei $p\colon Y \longrightarrow G \setminus Y$ die kanonische Projektion.*

1. *Dann ist*

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathrm{Deck}(p) \\ g &\longmapsto (x \mapsto g \cdot x) \end{aligned}$$

ein Gruppenisomorphismus.
2. *Ist Y einfach zusammenhängend und $x_0 \in G \setminus Y$, so ist also*

$$\pi_1(G \setminus Y, x_0) \cong \mathrm{Deck}(p) \cong G.$$

Beweisskizze. Offensichtlich ist die obige Abbildung ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Aus den Liftungseigenschaften (Korollar 2.50 und Satz 2.52) und der Definition des Bahnenraums $G \setminus Y$ folgt, dass diese Abbildung bijektiv, und somit ein Guppenisomorphismus, ist.

Der zweite Teil folgt mithilfe von Satz 2.69 aus dem ersten Teil. □

In vielen Fällen, können wir durch Proposition 2.70 die Fundamentalgruppe berechnen: Als erstes nicht-triviales Beispiel bestimmen wir auf diese Weise die Fundamentalgruppe des Einheitskreises S^1.

Satz 2.71 (Fundamentalgruppe des Kreises)**.** *Es ist $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$. Genauer gilt: Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z} &\longrightarrow \pi_1(S^1, 1) \\ d &\longmapsto [z \mapsto z^d]_* \end{aligned}$$

ist ein Gruppenisomorphismus, wobei wir S^1 als Teilmenge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ auffassen, und $1 \in S^1 \subset \mathbb{C}$ als Basispunkt verwenden.

Beweisskizze. Mithilfe der Translationsoperation von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{R}$ und der zugehörigen Überlagerung $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{Z} \setminus \mathbb{R} \cong_{\mathsf{Top}} S^1$ folgt aus Proposition 2.70, dass $\mathbb{Z} \cong \pi_1(S^1, 1)$ ist.

Dass die obige Abbildung ein Gruppenisomorphismus ist, zeigt man, indem man die Isomorphismen aus Proposition 2.70 explizit in diesem Fall anhand von Lifts der durch die angegebenen Schleifen induzierten Wege nachvollzieht. □

Analog können wir zum Beispiel auch die Fundamentalgruppen reell-projektiver Räume bestimmen:

Beispiel 2.72 (Fundamentalgruppen reell-projektiver Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann ist S^n einfach zusammenhängend und Proposition 2.70 ist auf die Antipodenoperation $\mathbb{Z}/2 \curvearrowright S^n$ (Beispiel 2.42) anwendbar. Also ist

$$\pi_1(\mathbb{R}P^n, x) \cong \mathbb{Z}/2$$

für alle $x \in \mathbb{R}P^n$.

Wir kommen nun zur Klassifikation der Überlagerungen: Diese beschreibt (analog zum Hauptsatz der Galoistheorie) punktierte Überlagerungen über einem gegebenen punktierten Raum mithilfe der Fundamentalgruppe.

Bevor wir die Klassifikation der Überlagerungen formulieren können, benötigen wir noch etwas Notation:

Notation 2.73.

- Ist (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum, so bezeichne $\mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)}$ die volle Unterkategorie von $\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$ deren Objekte Überlagerungen mit wegzusammenhängendem Totalraum sind. D.h. die Kategorie $\mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)}$ ist wie folgt definiert:

  - Objekte: Die Klasse aller punktierten Überlagerungen von (X, x_0), deren Totalraum wegzusammenhängend ist.
  - Morphismen: Sind $p\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ und $p'\colon (Y', y_0') \longrightarrow (X, x_0)$ punktierte Überlagerungen von (X, x_0), so ist

    $$\mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)}}(p', p) := \big\{ f \in \mathrm{map}((Y', y_0'), (Y, y_0)) \;\big|\; (f, \mathrm{id}_X) \in \mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}}(p', p) \big\}.$$

  - Verknüpfungen: Gewöhnliche Abbildungskomposition.
- Ist G eine Gruppe, so bezeichnet $\mathsf{Subgroup}_G$ die Kategorie der Untergruppen von G, wobei die Morphismen die Inklusionen sind.
- Ein Funktor $\varphi\colon C \longrightarrow D$ zwischen zwei Kategorien C und D ist eine *natürliche Äquivalenz*, wenn es einen Funktor $\psi\colon D \longrightarrow C$ gibt, so dass der Funktor $\varphi \circ \psi$ zu id_D natürlich isomorph ist und der Funktor $\psi \circ \varphi$ zu id_C natürlich isomorph ist (s. Definition 1.40 für den Begriff von natürlichen Isomorphismen).
- Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Der *Normalisator von H in G* ist die Untergruppe

  $$N_G(H) := \{ g \in G \mid g \cdot H \cdot g^{-1} = H \}$$

  von G. D.h. $N_G(H)$ ist die bezüglich Inklusion größte Untergruppe von G, in der H normal ist. Den Quotienten $N_G(H)/H$ bezeichnet man auch als *Weylgruppe von H in G*.
- Eine Überlagerung heißt *regulär* (oder *normal* oder *galoissch*), wenn die Decktransformationsgruppe transitiv auf den Fasern operiert.

Satz 2.74 (Klassifikation der Überlagerungen)**.** *Sei X ein wegzusammenhängender, lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender topologischer Raum, sei $x_0 \in X$ und sei $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ die universelle Überlagerung von X. Sei $\widetilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$.*

Im folgenden betrachten wir die Decktransformationsoperation von $\pi_1(X, x_0)$ auf $\widetilde{X}$ bezüglich dieses Basispunkts $\widetilde{x}_0$ (Satz 2.69).

1. *Dann sind*

   $$\begin{aligned}
   \varphi\colon \mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)} &\longleftrightarrow \mathsf{Subgroup}_{\pi_1(X,x_0)} : \psi \\
   \big(p\colon (Y, y_0) \to (X, x_0)\big) &\longmapsto \pi_1(p)\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \\
   \mathrm{Mor}_{\mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)}}(q', q) \ni f &\longmapsto \big(\mathrm{im}(\pi_1(q')) \subset \mathrm{im}(\pi_1(q))\big) \\
   \big(q_H\colon (H \setminus \widetilde{X}, H \cdot \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)\big) &\longleftarrow\!\shortmid H \\
   (\textit{Projektion}\colon H' \setminus \widetilde{X} \to H \setminus \widetilde{X}) &\longleftarrow\!\shortmid (H' \subset H)
   \end{aligned}$$

   zueinander „inverse“ natürliche Äquivalenzen.
2. *Dabei gilt: Ist $q\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung aus $\mathrm{Cov}^\circ_{(X,x_0)}$, und ist $H := \pi_1(q)(\pi_1(Y, y_0))$, so folgt:*
   a) Die Überlagerung q ist $[\pi_1(X, x_0) : H]$-blättrig.
   b) Es ist $\mathrm{Deck}(q) \cong N_{\pi_1(X,x_0)}(H)/H$.

c) Die Überlagerung q ist genau dann regulär, wenn H in $\pi_1(X, x_0)$ normal ist.

Beweisskizze. Im folgenden schreiben wir

$$G := \pi_1(X, x_0).$$

Ist $H \subset G$, so definieren wir

$$\begin{aligned} q_H \colon H \setminus \widetilde{X} &\longrightarrow X \\ H \cdot x &\longmapsto p(x). \end{aligned}$$

Da $p\colon \widetilde{X} \longrightarrow X$ und die Projektion $p_H \colon \widetilde{X} \longrightarrow H \setminus \widetilde{X}$ Überlagerungen sind und $q_H \circ p_H = p$ ist, folgt, dass auch q_H eine Überlagerung ist. Mit $\widetilde{X}$ ist dabei auch der Totalraum $H \setminus \widetilde{X}$ wegzusammenhängend und es gilt $q_H(H \cdot \widetilde{x}_0) = x_0$. Also ist q_H ein Objekt in $\mathrm{Cov}^{\circ}_{(X,x_0)}$.

1. Wir gehen in den folgenden Schritten vor:
   - Man kann nachrechnen, dass φ und ψ wohldefinierte Funktoren sind.
   - Ist $H \subset G$ eine Untergruppe, so folgt aus der Definition der Decktransformationsoperation von G auf $\widetilde{X}$ bezüglich des Basispunktes $\widetilde{x}_0$, dass

     $$\pi_1(q_H)\big(\pi_1(H \setminus \widetilde{X}, H \cdot \widetilde{x}_0)\big) = H.$$

   - Daraus folgt insbesondere

     $$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{\mathsf{Subgroup}_G}.$$

   - Aus dem zweiten Schritt und dem Liftungskriterium (Satz 2.52) folgt außerdem: Ist $q\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ eine Überlagerung aus $\mathrm{Cov}^{\circ}_{(X,x_0)}$ und ist $H := \pi_1(q)(\pi_1(Y, y_0))$, so gibt es in $\mathrm{Cov}^{\circ}_{(X,x_0)}$ genau einen Isomorphismus zwischen q und q_H.
   - Aus dem letzten Schritt erhält man mit einer einfachen Rechnung, dass $\psi \circ \varphi$ natürlich isomorph zu $\mathrm{id}_{\mathrm{Cov}^{\circ}_{(X,x_0)}}$ ist.

   Damit ist der erste Teil gezeigt.
2. Nach dem ersten Teil genügt es den Fall der Überlagerung $q_H \colon H \setminus \widetilde{X} \longrightarrow X$ zu betrachten.
   - Nach Konstruktion (und da die Decktransformationsoperation von G auf $\widetilde{X}$ frei ist) gilt

     $$\begin{aligned} \big|q_H^{-1}(x_0)\big| &= \big|\{H \cdot g \cdot \widetilde{x}_0 \mid g \in G\}\big| \\ &= \big|\{H \cdot g \mid g \in G\}\big| \\ &= [G : H]. \end{aligned}$$

     Also hat die Überlagerung q_H genau $[G : H]$ Blätter.

– Die Abbildung

$$\begin{aligned} f\colon N_G(H) &\longrightarrow \mathrm{Deck}(q_H) \\ g &\longmapsto (H\cdot x \mapsto H\cdot g\cdot x = g\cdot H\cdot x) \end{aligned}$$

ist ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Man rechnet leicht nach, dass der Kern f genau die Untergruppe $H \subset N_G(H)$ ist. Mithilfe der Liftungseigenschaften (insbesondere mit Satz 2.52) und der Tatsache, dass nach dem zweiten Schritt aus dem ersten Teil

$$\pi_1(q_{g^{-1}\cdot H\cdot g})\big(\pi_1(g^{-1}Hg\setminus\widetilde{X}, g^{-1}Hg\cdot\widetilde{x}_0)\big) = g^{-1}\cdot H\cdot g$$

für alle $g \in G$ gilt, kann man außerdem zeigen, dass f surjektiv ist. Also induziert f einen Gruppenisomorphismus

$$N_G(H)/H \cong \mathrm{Deck}(q_H).$$

– Eine genaue Analyse der Argumente aus dem letzten Schritt zeigt, dass $\mathrm{Deck}(q_H)$ genau dann transitiv auf $q_H^{-1}(x_0)$ operiert, wenn $N_G(H) = G$ ist; dies ist – nach Definition des Normalisators – äquivalent dazu, dass H ein Normalteiler in G ist. □

Grob gesprochen entsprechen also Überlagerungen Untergruppen der Fundamentalgruppe des Basisraums.

Bemerkung 2.75 (Vergleich mit Galoistheorie)**.** Mit dem folgenden Wörterbuch können wir zwischen dem Klassifikationssatz für Überlagerungen und dem Hauptsatz der Galoistheorie hin- und herübersetzen:

Überlagerungstheorie	*Galoistheorie*
Überlagerung	(separable) Körpererweiterung (bzw. zugehöriger Morphismus affiner Schemata)
universelle Überlagerung	separabler Abschluss (als Erweiterung)
Anzahl der Blätter	Grad der Erweiterung
reguläre Überlagerung	Galoiserweiterung
Decktransformationsgruppe	Galoisgruppe
Fundamentalgruppe	absolute Galoisgruppe (bzw. étale Fundamentalgruppe)
Quotientenüberlagerung	Fixkörper

Bemerkung 2.76 (Verallgemeinerungen des Klassifkationssatzes für Überlagerungen)**.**

– „$\mathrm{Cov}_{(X,x_0)}$“: Indem man statt Untergruppen der Fundamentalgruppe (bzw. deren Nebenklassenmengen mit der Operation der Fundamentalgruppe) Mengen mit einer Operation der Fundamentalgruppe betrachtet, kann man den obigen Klassifikationssatz für Überlagerungen auf den Fall verallgemeinern, in dem die Totalräume der Überlagerungen nicht notwendig wegzusammenhängend sind.

– „Cov_X“: Indem man Konjugationsoperationen hinreichend berücksichtigt, kann man den Klassifikationssatz außerdem auf den unpunktierten Fall anpassen.

Beispiel 2.77. Einfach zusammenhängende, lokal weg-zusammenhängende, semi-lokal einfach zusammenhängende topologische Räume besitzen nach dem Klassifikationssatz also keine nicht-trivialen Überlagerungen.

Daraus folgt zum Beispiel, dass alle einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten orientierbar sind (da die Orientierungsüberlagerung trivial ist).

Caveat 2.78. Es gibt jedoch einfach zusammenhängende topologische Räume mit nicht-trivialen Überalgerungen (zum Beispiel der Warschauer Kreis).

Beispiel 2.79 (Überlagerungen des Kreises)**.** Mit dem Klassifikationssatz lassen sich leicht alle zusammenhängenden Überlagerungen von $(S^1, 1)$ beschreiben – da die Untergruppen von $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ alle von der Form $n \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ mit $n \in \mathbb{N}$ sind. Dabei entspricht (siehe auch Abbildung (2.37))

die universelle Überlagerung $(\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (S^1, 1)$	der Untergruppe $0 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$
die triviale Überlagerung $\mathrm{id}_{S^1} \colon (S^1, 1) \longrightarrow (S^1, 1)$	der Untergruppe $1 \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$
für $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die Überlagerung $S^1 \longrightarrow S^1, z \longmapsto z^n$	der Untergruppe $n \cdot \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.

Beispiel 2.80 (doppelte Überlagerungen)**.** Da Untergruppen vom Index 2 immer normal sind, sind alle (zusammenhängenden) doppelten Überlagerungen (von hinreichend gutartigen topologischen Räumen) regulär.

Untergruppen vom Index 2 in $F_2 \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ entsprechen also Kernen von Epimorphismen $F_2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$. Sei $\{a, b\}$ ein freies Erzeugendensystem von F_2. Dann gibt es genau die folgenden Epimorphismen $F_2 \longrightarrow \mathbb{Z}/2$:

$$\begin{aligned} B \colon F_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ a &\longmapsto [0] \\ b &\longmapsto [1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB \colon F_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ a &\longmapsto [1] \\ b &\longmapsto [1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \colon F_2 &\longrightarrow \mathbb{Z}/2 \\ a &\longmapsto [1] \\ b &\longmapsto [0] \end{aligned}$$

Also besitzt $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ bis auf Isomorphie genau drei zweiblättrige Überlagerungen (Abbildung (2.81)).

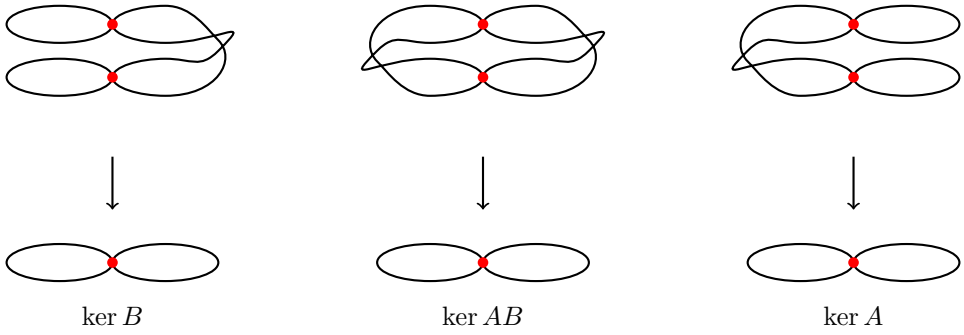


Abbildung (2.81): Doppelte Überlagerungen von $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$

Beispiel 2.82 (viele Überlagerungen)**.** Es ist eine Tatsache aus der Gruppentheorie, dass F_2 überabzählbar viele verschiedene Normalteiler besitzt. Also gibt es überabzählbar viele Isomorphietypen von regulären wegzusammenhängenden Überlagerungen von $(S^1, 1) \vee (S^1, 1)$.

2.6. Anwendungen

Die Fundamentalgruppe und die Überlagerungstheorie haben zahlreiche Anwendungen:

- Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra
- Beweis des Brouwerschen Fixpunktsatz in Dimension 2
  (höherdimensionale Versionen des Brouwerschen Fixpunktsatzes können z.B. mit (Ko)Homologie bewiesen werden)
- Beweis des Jordanschen Kurvensatzes
  (höherdimensionale Versionen des Jordanschen Kurvensatzes können mit (Ko)Homologie bewiesen werden)
- Beweis des Satzes von Nielsen-Schreier (Satz 2.83)
- Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam in Dimension 2
  (höherdimensionale Versionen des Satzes von Borsuk-Ulam können mit Kohomologieringen bewiesen werden)
- Topologische und geometrische Klassifikation der kompakten Flächen
- Geometrische Gruppentheorie, insbesondere geometrische Übersetzung algebraischer Eigenschaften von Gruppen und umgekehrt (z.B. residuell endliche Gruppen, Švarc-Milnor-Lemma, ...)
- Unentscheidbarkeitsresultate in der Topologie von Mannigfaltigkeiten (z.B. ist das Homöomorphieproblem für kompakte 4-Mannigfaltigkeiten *nicht* algorithmisch lösbar)
- ...

Wir gehen nun etwas genauer auf den Satz von Nielsen-Schreier ein:

Satz 2.83 (Satz von Nielsen-Schreier)**.** *Untergruppen von freien Gruppen sind frei.*

Beweisskizze. Sei G eine freie Gruppe (s. Anhang C.2), etwa frei erzeugt von $S \subset G$, und sei $H \subset G$ eine Untergruppe.

Wir übersetzen zunächst die Gruppe G in die Topologie: Dazu betrachten wir den Raum

$$(X, x_0) := \bigvee_S (S^1, 1).$$

Dann ist (Beispiel 2.29 und Proposition C.9)

$$\pi_1(X, x_0) \cong \bigstar_S \mathbb{Z} \cong G;$$

sei $f\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow G$ ein solcher Gruppenisomorphismus.

Nach dem Klassifikationssatz für Überlagerungen (Satz 2.74) gibt es eine Überlagerung $q\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ mit

$$\pi_1(q)\big(\pi_1(Y, y_0)\big) = f^{-1}(H).$$

Wir können X als sogenannten eindimensionalen Komplex auffassen (d.h. als einen Raum, den man durch Zusammenkleben von Punkten und Einheitsintervallen erhält). Diese Eigenschaft vererbt sich auch auf den Totalraum von Überlagerungen von eindimensionalen Komplexen; insbesondere trägt auch Y die Struktur eines eindimensionalen Komplexes. Außerdem kann man (z.B. mithilfe des Satzes von Seifert und van Kampen (Satz 2.12) und der Verträglichkeit von π_1 mit aufsteigenden Vereinigungen (Proposition 2.28)) zeigen, dass die Fundamentalgruppe eines eindimensionalen Komplexes eine freie Gruppe ist. Also ist $\pi_1(Y, y_0)$ eine freie Gruppe.

Da $\pi_1(q)\colon \pi_1(Y, y_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ injektiv ist (Korollar 2.58), erhalten wir somit, dass auch

$$H = f \circ \pi_1(q)\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \cong \pi_1(q)\big(\pi_1(Y, y_0)\big) \cong \pi_1(Y, y_0)$$

eine freie Gruppe ist. □

Mit einer genaueren Analyse der Überlagerungen kann man zusätzlich auch noch bestimmen, wie der Rang von Untergruppen von freien Gruppen mit dem Rang der umgebenden Gruppe und dem Index zusammenhängt (Korollar 5.51).

Dimensionsargumente dieser Art werden allgemeiner in der Gruppen(ko)homologie betrachtet. Ein topologischer Zugang zu Gruppen(ko)homologie führt über sogenannte klassifizierende Räume von Gruppen.

3. Axiomatische Homologie

Wir werden nun die Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologietheorien kennenlernen und uns überlegen, was man aus diesen Axiomen ableiten kann bzw. wie man mit solchen Homologietheorien arbeiten kann.

In Kapitel 4 und Kapitel 5 werden wir Homologietheorien dieser Art für topologische Räume bzw. sogenannte CW-Komplexe konstruieren.

3.1. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir beginnen mit der Formulierung der Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologietheorien:

Definition 3.1 (Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologie)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Eine *Homologietheorie auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_R\mathsf{Mod}$ ist ein Paar $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$, wobei

- $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Funktoren $\mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$
- und $(\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge natürlicher Transformationen $\partial_k \colon h_k \Longrightarrow h_{k-1} \circ U$, genannt *Verbindungshomomorphismen* (oder *Randoperatoren*), wobei $U \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der Objekte (X, A) auf $(A, \emptyset)$ und stetige Abbildungen von Paaren auf die entsprechende Einschränkungen abbildet,

mit folgenden Eigenschaften ist:

- *Homotopieinvarianz.* Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $h_k \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein homotopieinvarianter Funktor im Sinne von Definition 1.56.
- *lange exakte Paarsequenz.* Für alle Raumpaare (X, A) ist die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} h_k(A, \emptyset) \xrightarrow{h_k(i)} h_k(X, \emptyset) \xrightarrow{h_k(j)} h_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k} h_{k-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{h_{k-1}(i)} \cdots$$

  exakt (Definition E.2), wobei $i \colon (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ und $j \colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind.
- *Ausschneidung.* Für alle Raumpaare (X, A) und alle $B \subset A$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ ist die von der Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung

$$h_k(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow h_k(X, A)$$

  für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus (Abbildung (3.2)).

Man nennt $\big(h_k(\{\emptyset\}, \emptyset)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ die *Koeffizienten* der Theorie.

Eine solche Homologietheorie $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ heißt *gewöhnlich*, wenn das Dimensionsaxiom erfüllt ist:

- *Dimensionsaxiom.* Für den Einpunktraum $\bullet := \{\emptyset\}$ und alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$h_k(\bullet, \emptyset) \cong 0.$$

Eine Homologietheorie $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ heißt *additiv*, wenn das Additivitätsaxiom erfüllt ist:

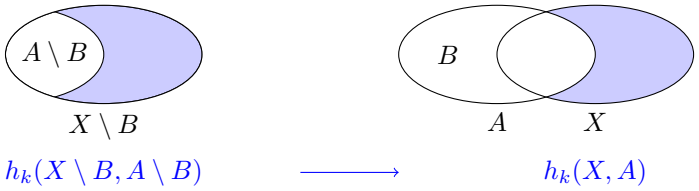


Abbildung (3.2): Ausschneidung, schematisch

– *Additivität.* Für alle Mengen I und alle Familien $(X_i)_{i\in I}$ topologischer Räume induzieren die kanonischen Inklusionen $(X_i \longrightarrow \bigsqcup_{j\in I} X_j)_{i\in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} h_k(X_i, \emptyset) \longrightarrow h_k\Big(\bigsqcup_{i\in I} X_i, \emptyset\Big).$$

Bemerkung 3.3.

– Die lange exakte Paarsequenz beschreibt den Zusammenhang zwischen Homologie eines Raumes, des Unterraumes, und des zugehörigen Paares.
– Das Ausschneidungsaxiom erlaubt es, Homologie von Räumen bzw. Raumpaaren durch Zerlegen in kleinere Teile zu berechnen. Im Gegensatz zum Ausschneidungssatz von Blakers-Massey für Homotopiegruppen gilt Ausschneidung für Homologie nicht nur in bestimmten Gradbereichen, sondern allgemein. Dies ist der Hauptgrund, warum Homologie deutlich einfacher zu berechnen ist als Homotopiegruppen.
– Ist X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir im obigen Kontext auch kurz

$$h_k(X) := h_k(X, \emptyset).$$

Man bezeichnet dies auch als *absolute Homologie* und Homologie von Raumpaaren als *relative Homologie*.
– Die obigen Axiome lassen sich analog nicht nur in Top^2, sondern auch in anderen Kategorien aus der Topologie formulieren.
– In Kapitel 5.3 werden wir sehen, in welchem Sinne Homologietheorien durch die Eilenberg-Steenrod-Axiome bereits eindeutig bestimmt sind.

3.2. Fingerübungen

Bevor wir mit Verkleberesultaten und topologischen Anwendungen von Homologie beginnen, üben wir das Arbeiten mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen mit einfachen Fingerübungen. Häufig werden dabei grundlegende Techniken für exakte Sequenzen (Kapitel E.1) benötigt.

Setup 3.4. In diesem Abschnitt sei R ein Ring mit Eins und $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ sei eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Proposition 3.5 (mehr zu Homotopieinvarianz)**.**

1. *Ist (X, A) ein Raumpaar und ist die Inklusion $i\colon A \longrightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist*
$$h_k(X, A) \cong 0$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $h_k(X, X) \cong 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
2. *Ist $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Raumpaaren und sind sowohl $f\colon X \longrightarrow Y$ als auch $f|_A\colon A \longrightarrow B$ Homotopieäquivalenzen in Top, so ist*
$$h_k(f)\colon h_k(X, A) \longrightarrow h_k(Y, B)$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus der langen exakten Paarsequenz. Der zweite Teil folgt aus der langen exakten Paarsequenz und dem Fünferlemme (Proposition E.6). □

Als nächstes zeigen wir, wie man die Koeffizienten der Theorie (d.h. die Homologie von Einpunkträumen) aus der Homologie jedes (nicht-leeren) Raumes abspalten kann:

Proposition 3.6 (Abspalten der Homologie des Punktes)**.**

1. *Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$. Dann induzieren die Inklusion $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, \{x_0\})$ und die konstante Abbildung $X \longrightarrow \{x_0\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus*
$$h_k(X) \cong h_k\big(\{x_0\}\big) \oplus h_k\big(X, \{x_0\}\big).$$
2. *Diese Isomorphismen sind im folgenden Sinne natürlich: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und ist $x_0 \in X$, so ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Diagramm*
$$\begin{array}{ccc} h_k(X) & \xrightarrow{\cong} & h_k\big(\{x_0\}\big) \oplus h_k\big(X, \{x_0\}\big) \\ {\scriptstyle h_k(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_k(f|_{\{x_0\}}) \oplus h_k(f)} \\ h_k(Y) & \xrightarrow[\cong]{} & h_k\big(\{f(x_0)\}\big) \oplus h_k\big(Y, \{f(x_0)\}\big) \end{array}$$
kommutativ, wobei die horizontalen Isomorphismen, die Isomorphismen aus dem ersten Teil sind.[5]

Beweisskizze. Die Natürlichkeit im zweiten Teil folgt direkt daraus, dass die Inklusion der entsprechenden Basispunkte und die konstanten Abbildungen auf die entsprechenden Einpunkträume mit f verträglich sind – und dass diese Eigenschaft nach Anwendung der Funktoren $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ erhalten bleibt.

[5] Dies entspricht der Aussage, dass die Isomorphismen aus dem ersten Teil eine natürliche Transformation
$$h_k \circ F \Longrightarrow h_k \circ U \oplus h_k\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$
bilden, wobei Top_* die Kategorie der punktierten Räume (also Raumpaare, deren Unterraum einpunktig ist) und $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der den einpunktigen Unterraum durch den leeren Unterraum ersetzt und U der Unterraumfunktor (Definition 3.1) ist. In der algebraischen Topologie wird jedoch oft diese genauere Formulierung nicht explizit genannt.

Für den Beweis des ersten Teils betrachten wir die lange exakte Paarsequenz des Paares $(X, \{x_0\})$. Wegen $\big(X \longrightarrow \{x_0\}\big) \circ \big(\{x_0\} \hookrightarrow X\big) = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$ folgt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$h_k\big(X \longrightarrow \{x_0\}\big) \circ h_k\big(\{x_0\} \hookrightarrow X\big) = \mathrm{id}_{h_k(\{x_0\})}.$$

Dies zeigt, dass wir aus der langen exakten Paarsequenz kurze spaltende exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow h_k\big(\{x_0\}\big) \xrightarrow{h_k(\{x_0\} \hookrightarrow X)} h_k(X) \xrightarrow{h_k((X,\emptyset) \hookrightarrow (X,\{x_0\}))} h_k\big(X, \{x_0\}\big) \longrightarrow 0$$

$$h_k(X \to \{x_0\})$$

erhalten. Daraus folgt mit Proposition E.5 die Behauptung. □

Die Abspaltung der Koeffizienten lässt sich auch durch die sogenannte reduzierte Homologie ausdrücken:

Bemerkung 3.7 (reduzierte Homologie)**.** Sei $\bullet := \{\emptyset\}$ „der“ Einpunktraum. Ist X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{Z}$, so definieren wir die *k-te reduzierte Homologie von X bezüglich* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ durch

$$\widetilde{h}_k(X) := \ker\big(h_k(c_X)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(\bullet)\big) \subset h_k(X),$$

wobei $c_X\colon X \longrightarrow \bullet$ die eindeutig bestimmte Abbildung ist. Dann ist für alle $x_0 \in X$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ die von den Inklusionen induzierte Komposition

$$\widetilde{h}_k(X) \longrightarrow h_k(X) \longrightarrow h_k\big(X, \{x_0\}\big)$$

ein Isomorphismus. Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so ist

$$\widetilde{h}_k(f) := h_k(f)|_{\widetilde{h}_k(X)}\colon \widetilde{h}_k(X) \longrightarrow \widetilde{h}_k(Y)$$

wohldefiniert und man erhält einen homotopieinvarianten Funktor $\widetilde{h}_k\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ mit $\widetilde{h}_k(\bullet) \cong 0$.

Im Zusammenhang mit Ausschneidungsargumenten betrachtet man oft Raumtripel, d.h. Raumpaare mit einem zusätzlichen Unterraum des Unterraums. Dabei ist häufig die folgende lange exakte Sequenz hilfreich:

Proposition 3.8 (lange exakte Tripelsequenz)**.** *Sei X ein topologischer Raum und seien $B \subset A \subset X$ Unterräume. Dann ist die Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}^{(X,A,B)}} h_k(A,B) \longrightarrow h_k(X,B) \longrightarrow h_k(X,A) \xrightarrow{\partial_k^{(X,A,B)}} h_{k-1}(A,B) \longrightarrow \cdots$$

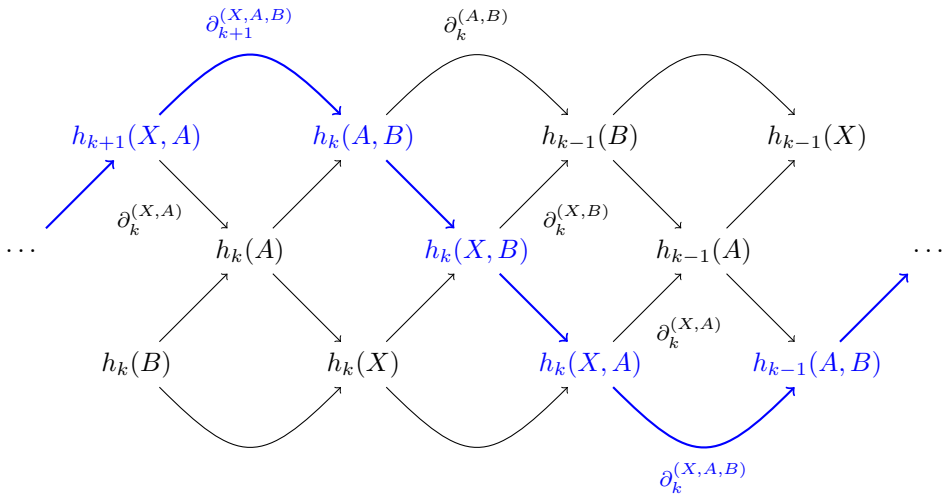


Abbildung (3.9): Das Zopfdiagramm der langen exakten Tripelsequenz; die unmarkierten Homomorphismen sind jeweils durch die entsprechenden Inklusionen induziert.

exakt, wobei wir für $k \in \mathbb{Z}$ den Verbindungshomomorphismus $\partial_k^{(X,A,B)}$ der Tripelsequenz als die Komposition

$$\begin{array}{ccc} h_k(X,A) & \xrightarrow{\partial_k^{(X,A,B)}} & h_k(A,B) \\ & \searrow^{\partial_k^{(X,A)}} \quad \nearrow & \\ & h_k(A) & \end{array}$$

definieren und die unmakrierten Homomorphismen jeweils durch die entsprechenden Inklusionen topologischer Räume/Raumpaare induziert sind.

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten das Zopfdiagramm in Abbildung (3.9), das aus der gewünschten Tripelsequenz und den langen exakte Paarsequenzen der Paare (A,B), (X,B) und (X,A) geflochten ist. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus der Tripelsequenz, wegen der Funktorialität der $(h_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ und der Natürlichkeit der Verbindungshomomorphismen der Homologietheorie ist dieses Zopfdiagramm kommutativ.

Die Komposition

$$h_k(A,B) \longrightarrow h_k(X,B) \longrightarrow h_k(X,A)$$

der durch die Inklusionen induzierten Homomorphismen ist der Nullhomomorphismus, denn diese Komposition faktorisiert über $h_k(A,A) \cong 0$. Auch die anderen jeweils

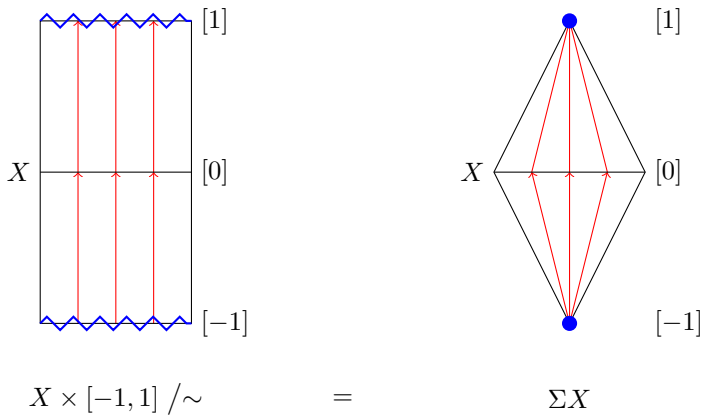


Abbildung (3.10): Einhängung, schematisch; die obere und die untere Zickzacklinie werden jeweils zu einem Punkt identifiziert.

aufeinanderfolgenden Homomorphismen der Tripelsequenz liefern als Komposition den Nullhomomorphismus (wir finden im Zopfdiagramm immer eine alternative Route, die zwei aufeinanderfolgende Homomorphismen aus einer langen exakten Paarsequenz enthält).

Mit einer Diagrammjagd kann man nun die Exaktheit der Tripelsequenz aus der Exaktheit der drei langen exakten Paarsequenzen folgern. □

Für längere absteigende Ketten von Unterräumen sind exakte Sequenzen als Hilfsmittel der homologischen Algebra im allgemeinen nicht mehr mächtig genug; das geeignete Werkzeug sind dann sogenannte Spektralsequenzen.

3.3. Homologie von Sphären und Einhängungen

Wir berechnen nun die Homologie von Sphären und geben erste Anwendungen davon. Um die Homologie von Sphären zu berechnen gehen wir induktiv mithilfe der sogenannten Einhängung vor.

Definition 3.11 (Einhängung)**.**

– Die *Einhängung* eines topologischen Raumes X ist definiert als

$$\Sigma X := X \times [-1,1] \,/\!\sim$$

mit der Quotiententopologie der Produkttopologie, wobei „$\sim$“ von

$$\forall_{x,x' \in X} \quad (x,1) \sim (x',1)$$
$$\forall_{x,x' \in X} \quad (x,-1) \sim (x',-1)$$

erzeugt wird (Abbildung (3.10)).

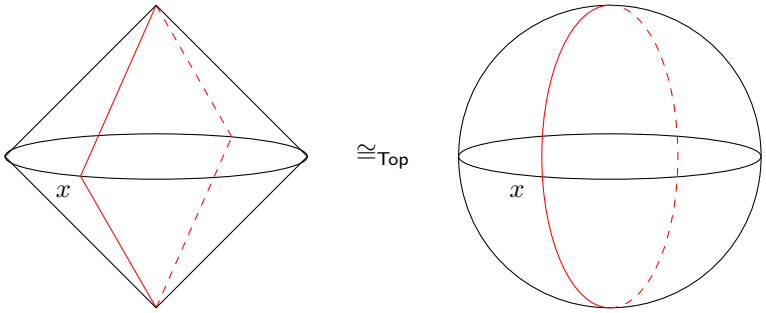


Abbildung (3.12): Einhängungen von Sphären sind Sphären

– Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Sigma f\colon \Sigma X &\longrightarrow \Sigma Y \\ [x,t] &\longmapsto \big[f(x),t\big] \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig.

Auf diese Weise erhält man den *Einhängungsfunktor* $\Sigma\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Top}$.

Beispiel 3.13 (Einhängungen von Sphären sind Sphären)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \Sigma S^n &\longrightarrow S^{n+1} \\ [x,t] &\longmapsto \big(\cos(\pi/2 \cdot t) \cdot x, \sin(\pi/2 \cdot t)\big) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Homöomorphismus (Abbildung (3.12)).

Satz 3.14 (Homologie von Einhängungen)**.** *Sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine Homologietheorie auf* Top^2 *und sei* (X, x_0) *ein punktierter Raum. Dann gibt es für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *einen (in* Top_**) natürlichen Isomorphismus (den sogenannten* Einhängungsisomorphismus*)*

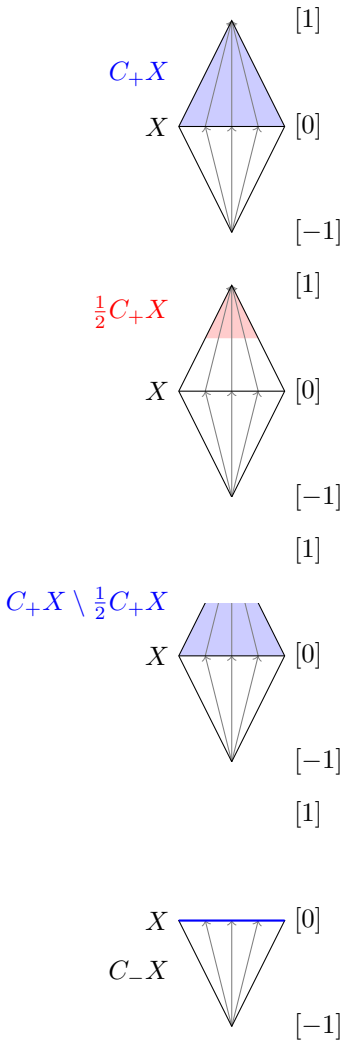
$$\sigma_k(X,x_0)\colon h_k\big(X,\{x_0\}\big) \longrightarrow h_{k+1}\big(\Sigma X, \{[(x_0,0)]\}\big).$$

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann erhalten wir die Kette von (natürlichen) Isomorphismen in Abbildung (3.15).

Der unterste vertikale Homomorphismus ist dabei der Verbindungshomomorphismus der langen exakten Tripelsequenz (Proposition 3.8) des Tripels

$$\{x_0\} \subset X \subset C_- X.$$

Dieser Verbindungshomomorphismus ist ein Isomorphismus, denn: Da $C_- X$ kontraktibel ist, folgt mit Proposition 3.5, dass $h_m(C_- X, \{x_0\}) \cong 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt. □



$$
\begin{array}{l}
h_{k+1}\big(\Sigma X, \{[x_0, 0]\}\big) \\
\quad \cong \Big| \text{ verallgemeinerte Homotopieinvarianz (Proposition 3.5)} \\
h_{k+1}(\Sigma X, C_+X) \\
\quad \cong \Big| \text{ Ausschneidung} \\
h_{k+1}\big(\Sigma X \setminus \tfrac{1}{2}C_+X, C_+X \setminus \tfrac{1}{2}C_+X\big) \\
\quad \cong \Big| \text{ Homotopieinvarianz} \\
h_{k+1}\big(C_-X, X \times \{0\}\big) \\
\quad \cong \Big| \text{ Verbindungshomomorphismus der Tripelsequenz, s.u.} \\
h_k\big(X, \{x_0\}\big)
\end{array}
$$

Abbildung (3.15): Berechnung der Homologie von Einhängungen

Bemerkung 3.16 (Wie wendet man Ausschneidung an?)**.** Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 und sei X ein topologischer Raum. Wie im obigen Beweis kann man die Homologie $(h_k(X))_{k\in\mathbb{Z}}$ dann oft mithilfe von Ausschneidung wie folgt berechnen: Man sucht Unterräume $B \subset A \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ mit der Eigenschaft,

- dass man $(h_k(A))_{k\in\mathbb{Z}}$ gut beschreiben kann
- und dass man $(h_k(X \setminus B, A \setminus B))_{k\in\mathbb{Z}}$ gut beschreiben kann (z.B. mithilfe der Tripelsequenz 3.8 oder der Paarsequenz),

und kombiniert dann Ausschneidung mit der langen exakten Paarsequenz des Paares (X, A). In Abschnitt 3.4 werden wir eine Reformulierung von Ausschneidung kennenlernen, die es oft erleichtert, Homologie nach dem Baukastenprinzip zu berechnen.

Caveat 3.17 (falsche Anwendung von Ausschneidung)**.** Bei der Anwendung von Ausschneidung ist darauf zu achten, dass der Abschluss des auszuschneidenden Raumes im Inneren des Teilraumes enthalten ist!

Aus Satz 3.14 und Beispiel 3.13 erhalten wir:

Korollar 3.18 (Homologie von Sphären)**.** *Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2. Dann gilt:*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt es einen natürlichen Isomorphismus*
$$h_k\big(S^n, \{e_1^{n+1}\}\big) \cong h_{k+1}\big(\Sigma S^n, \{[e_1^{n+1}, 0]\}\big) \cong h_{k+1}\big(S^{n+1}, \{e_1^{n+2}\}\big),$$
wobei e_1^{n+1} bzw. e_1^{n+2} jeweils den ersten Einheitsvektor $(1, 0, \dots, 0)$ bezeichnet.
2. *Insbesondere folgt mit Proposition 3.6 und Ausschneidung induktiv für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$, dass*
$$\begin{aligned} h_k(S^n) &\cong h_k\big(S^n, \{e_1^{n+1}\}\big) \oplus h_k\big(\{e_1^{n+1}\}\big) \\ &\cong h_{k-n}\big(S^0, \{e_1^1\}\big) \oplus h_k\big(\{e_1^{n+1}\}\big) \\ &\cong h_{k-n}(\bullet) \oplus h_k(\bullet). \end{aligned}$$
3. *Ist $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie, so folgt: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist*
$$h_k(S^0) \cong \begin{cases} h_0(\bullet) \oplus h_0(\bullet) & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \neq 0. \end{cases}$$
Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist
$$h_k(S^n) \cong \begin{cases} h_0(\bullet) & \text{falls } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}. \end{cases}$$

Gewöhnliche Homologie mit nicht-trivialen Koeffizienten entdeckt also das n-dimensionale sphärische „Loch“ in der n-dimensionalen Sphäre. Im Gegensatz zu Homotopiegruppen entdeckt gewöhnliche Homologie zwar nicht die „exotischen“ sphärischen Löcher in Sphären, dafür aber auch nicht-sphärische Löcher (wie man z.B. an der Homologie des Torus $S^1 \times S^1$ sehen kann).

Eine erste Anwendung der Berechnung in Korollar 3.18 ist eine verfeinerte Version der Invarianz der Dimension (unter der Annahme, dass gewöhnliche Homologietheorien tatsächlich existieren):

Korollar 3.19 (Invarianz der Dimension, II)**.** *Falls eine gewöhnliche Homologietheorie* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} = \mathsf{Ab}$ *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$ *existiert, so folgt:*

Sind $n, m \in \mathbb{N}$ *und sind* $U \subset \mathbb{R}^n$*,* $V \subset \mathbb{R}^m$ *offen und nicht-leer mit* $U \cong V$*, so gilt bereits* $n = m$*.*

Beweisskizze. Ohne Einschränkung seien $n, m > 0$. Sei $x \in U$ und sei $f\colon U \longrightarrow V$ ein Homöomorphismus. Mithilfe von Ausschneidung kann man dann die Homologie des Paares $(U, U \setminus \{x\})$ auf die von $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ zurückführen (Ausschneidung des Teils von U, der außerhalb eines kleinen offenen Balles um x liegt) und erhält so wegen $(U, U \setminus \{x\}) \cong_{\mathsf{Top}^2} (V, V \setminus \{f(x)\})$ und der langen exakten Paarsequenz:

$$\begin{aligned} h_{n-1}(S^{m-1}) &\cong h_n\big(V, V \setminus \{f(x)\}\big) \\ &\cong h_n\big(U, U \setminus \{x\}\big) \\ &\cong h_{n-1}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Aus Korollar 3.18 folgt daher $n = m$. □

Als nächsten Schritt bestimmen wir nun Abbildungsgrade für Selbstabbildungen von Sphären (positiver Dimension) bezüglich gewöhnlicher Homologietheorien; dies ist ein wichtiges Hilfsmittel, um Homologie von Räumen, die induktiv aus Sphären „zusammengesetzt“ sind, zu berechnen:

Korollar 3.20 (Abbildungsgrade für Selbstabbildungen von Sphären)**.** *Es sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie. Dann gilt:*

1. *Ist* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und* $j \in \{1, \dots, n+1\}$*, so ist*

$$h_n(r_j^{(n)}) = -\operatorname{id}_{h_n(S^n)},$$

   wobei $r_j^{(n)}$ *die in Satz 1.59 definierte Spiegelung ist.*
2. *Für* $d \in \mathbb{Z}$ *sei*

$$\begin{aligned} f_d\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^d, \end{aligned}$$

   wobei wir S^1 *als Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *auffassen. Dann gilt*

$$h_1(f_d) = d \cdot \operatorname{id}_{h_1(S^1)}.$$

3. *Für alle* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $d \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$h_n(\Sigma^{n-1} f_d) = d \cdot \operatorname{id}_{h_n(S^n)}.$$

Insbesondere folgt: Ist $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$*, so gilt (wobei der Abbildungsgrad wie in Proposition 1.64 definiert ist):*

– *Für alle* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $j \in \{1, \dots, n\}$ *ist*

$$\deg_{h_n} r_j^{(n)} = -1.$$

– *Für alle* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $d \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$\deg_{h_n} \Sigma^{n-1} f_d = d.$$

Insbesondere ist $\deg_{h_n} \colon [S^n, S^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ *surjektiv.*[6]

Der Beweis beruht auf der folgenden Beobachtung:

Lemma 3.21 (Homologie von „Addition“ von Abbildungen auf Sphären)**.** *Es sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie auf* Top^2 *und sei* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*. Zu* $d \in \mathbb{N}$ *betrachten wir die Einpunktvereinigung*

$$\bigvee^d S^n := \bigsqcup^d S^n \Big/ \sim,$$

wobei „$\sim$*“ die ersten Einheitsvektoren der* d *Sphären miteinander verklebt; außerdem betrachten wir die Inklusionsabbildungen* $(i_j \colon S^n \longrightarrow \bigvee^d S^n)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ *der Summanden und die Kollapsabbildungen* $(p_j \colon \bigvee^d S^n \longrightarrow S^n)_{j\in\{1,\dots,n\}}$*, die jeweils auf einem Sphärensummanden die Identität sind und die anderen Summanden auf* e_1^n *abbilden. Dann gilt:*

1. *Die Inklusionen* $(i_j)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ *und die Kollapsabbildungen* $(p_j)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ *induzieren für alle* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ *Isomorphismen*

$$h_k\Big(\bigvee^d S^n\Big) \cong \bigoplus^d h_k(S^n).$$

2. *Sei*

$$c_{S^n} \colon S^n \longrightarrow \bigvee^2 S^n$$
$$\alpha_x(t) \longmapsto \begin{cases} i_1\big(\alpha_x(2\cdot t)\big) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ i_2\big(\alpha_x(2\cdot t - 1)\big) & \text{falls } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

wobei $\alpha_x \colon [0,1] \longrightarrow S^n$ *zu* $x \in S^{n-1} \times \{0\} \setminus \{e_1^{n+1}\}$ *der eindeutig bestimmte Kreis (mit konstanter Geschwindigkeit, startend in* e_1^n *in Richtung* e_{n+1}^n*) ist, der* x *und* e_1^n *als diametral gegenüberliegende Punkte enthält und in der Ebene durch* x*,* e_1^n *und* $e_1^n + e_{n+1}^n$ *liegt (Abbildung (3.22)). (Die Abbildung* c_{S^n} *ist wohldefiniert und stetig). Dann gilt für alle topologischen Räume* X *und alle* $f, g \in \operatorname{map}(S^n, X)$ *mit* $f(e_1^{n+1}) = g(e_1^{n+1})$*, dass*

$$h_n\big((f \vee g) \circ c_{S^n}\big) = h_n(f) + h_n(g).$$

Dabei bezeichnet $f \vee g \colon \bigvee^2 S^n \longrightarrow X$ *die eindeutig bestimmte stetige Abbildung mit* $(f \vee g) \circ i_1 = f$ *und* $(f \vee g) \circ i_2 = g$*.*

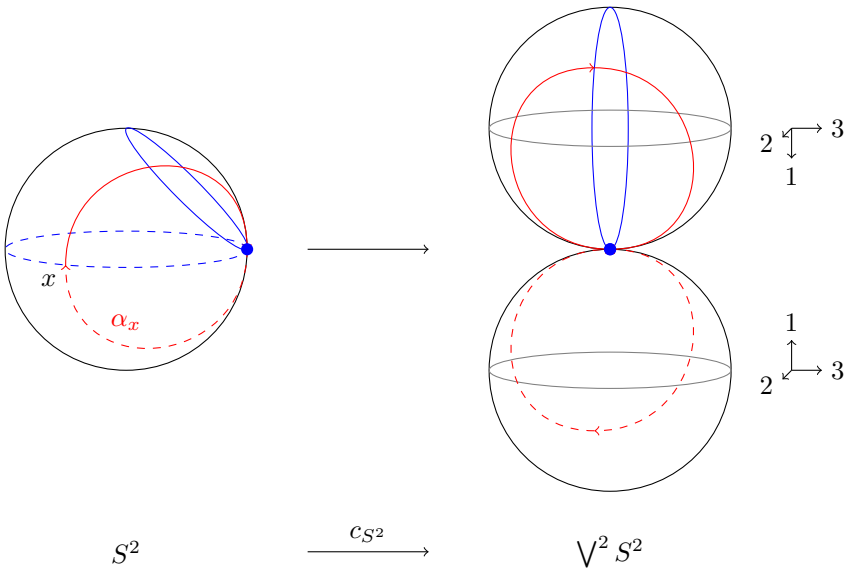


Abbildung (3.22): Die „Einschnürungsabbildung“ $c_{S^n} \colon S^n \longrightarrow \bigvee^2 S^n$.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt induktiv mithilfe von Ausschneidung.

Wegen $p_1 \circ c_{S^n} \simeq \mathrm{id}_{S^n} \simeq p_2 \circ c_{S^n}$ folgt aus dem ersten Teil, dass

$$\begin{aligned} h_n\big((f \vee g) \circ c_{S^n}\big) &= h_n(f \vee g) \circ h_n(i_1) \circ h_n(p_1) \circ h_n(c_{S^n}) \\ &\quad + h_n(f \vee g) \circ h_n(i_2) \circ h_n(p_2) \circ h_n(c_{S^n}) \\ &= h_n\big((f \vee g) \circ i_1\big) \circ h_n(p_1 \circ c_{S^n}) + h_n\big((f \vee g) \circ i_2\big) \circ h_n(p_2 \circ c_{S^n}) \\ &= h_n(f) + h_n(g), \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 3.23 (Hurewicz-Homomorphismus)**.** Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei außerdem $[S^n] \in h_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger. Dann erhalten wir für jeden punktierten topologischen Raum (X, x_0) einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow h_n(X) \\ [f]_* &\longmapsto h_n(f)\big([S^n]\big) \end{aligned}$$

von der n-ten Homotopiegruppe in die Homologie im Grad n, den sogenannten *Hurewicz-Homomorphismus im Grad n*. Genauer liefert dies eine natürliche Transformation $\pi_n \Longrightarrow$

[6] Tatsächlich ist $\deg_{h_n} \colon [S^n, S^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ sogar bijektiv. Dies kann man z.B. mit den Methoden aus der Homotopietheorie zeigen.

$h_n \circ F$, wobei $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der den Basispunkt durch den leeren Teilraum ersetzt.

Beweisskizze von Korollar 3.20. 1. Indem wir Spiegelungen mit Homöomorphismen, die je zwei Koordinaten tauschen, konjugieren, sehen wir, dass es genügt, die Behauptung für die Spiegelung $r_2^{(n)}$ zu zeigen.

Induktiv folgt mit dem natürlichen Einhängungsisomorphismus (Satz 3.14 und Beispiel 3.13) und der Tatsache, dass $\Sigma r_2^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ der Spiegelung $r_2^{(n+1)}$ entspricht, dass es genügt

$$h_1(r_2^{(1)}) = -\operatorname{id}_{h_1(S^1)}$$

zu zeigen.

Da $(\operatorname{id}_{S^1} \vee r_2^{(1)}) \circ c_{S^1}$ zu einer konstanten Abbildung homotop ist (wie man leicht an der Konstruktion ablesen kann), erhalten wir aus Lemma 3.21, dass

$$0 = h_1(\text{const}) = h_1\big((\operatorname{id}_{S^1} \vee r_2^{(1)}) \circ c_{S^1}\big) = h_1(\operatorname{id}_{S^1}) + h_1(r_2^{(1)}).$$

2. Wir unterscheiden drei Fälle:
- Die Abbildung f_0 ist konstant; also faktorisiert $h_1(f_0)$ über $h_1(\bullet) \cong 0$, und damit $h_1(f_0) = 0$.
- Ist $d \in \mathbb{Z}_{<0}$, so ist $f_d = r_2^{(1)} \circ f_{|d|}$. Nach dem ersten Teil ist daher $h_1(f_d) = h_1(r_2^{(1)}) \circ h_1(f_{|d|}) = -h_1(f_{|d|})$.
- Es genügt daher, den Fall $d \in \mathbb{N}_{>0}$ zu betrachten: Es ist

  $$f_d \simeq (f_{d-1} \operatorname{id}_{S^1}) \circ c_{S^1}.$$

  Lemma 3.21 liefert dann

  $$h_1(f_d) = h_1(f_{d-1}) + h_1(\operatorname{id}_{S^1}) = h_1(f_{d-1}) + \operatorname{id}_{h_1(S^1)};$$

  induktiv erhalten wir somit $h_1(f_d) = d \cdot \operatorname{id}_{h_1(S^1)}$.

Der dritte Teil folgt mithilfe des natürlichen Einhängungsisomorphismus (Satz 3.14 und Beispiel 3.13) induktiv aus dem zweiten Teil. □

Mithilfe des Abbildungsgrades kann man zum Beispiel analog zum Argument über die Fundamentalgruppe den Fundamentalsatz der Algebra beweisen.

Außerdem erhalten wir:

Korollar 3.24 (Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren)**.** *Falls* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$ *ist, so sind die entsprechenden reduzierten Homologiefunktoren (Bemerkung 3.7)*

$$\widetilde{h}_0, \widetilde{h}_1, \ldots\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

Funktoren mit den Eigenschaften aus Satz 1.59.

Eines der Ziele der Vorlesung ist daher, eine gewöhnliche Homologietheorie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten zu konstruieren (Kapitel 4 und Kapitel 5).

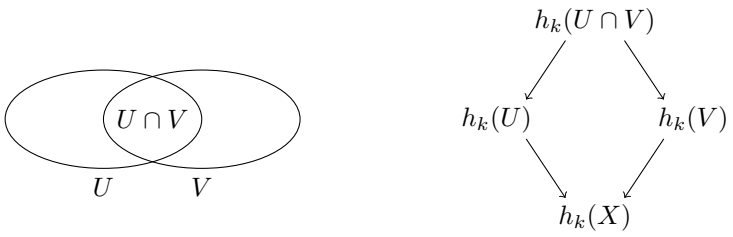


Abbildung (3.25): Die Ausgangssituation für die Mayer-Vietoris-Sequenz

3.4. Verkleben von Räumen – die Mayer-Vietoris[7]-Sequenz

Wir leiten nun eine Variante von Ausschneidung ab, die es oft ermöglicht, Homologie, bequem nach dem Baukastenprinzip zu berechnen. Genauer: Wie können wir die Homologie eines Raumes $X = U \cup V$ berechnen, wenn wir die Homologie von U, V und $U \cap V$ kennen? (Abbildung (3.25))

Wir werden dies insbesondere auf Abbildungskegel anwenden; dies liefert einerseits Realisierungsresultate und andererseits eine Möglichkeit, auch Homologietheorien auf Top (statt auf Top^2) axiomatisch zu erfassen.

Satz 3.26 (Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** *Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2. Sei X ein topologischer Raum, seien U, $V \subset X$ mit der Eigenschaft, dass der Abschluss von $U \setminus V$ (in $U \cup V$) im Inneren von U (in $U \cup V$) liegt, und sei $A \subset X$ mit $A \subset U \cap V$.*

1. *Ist $U \cup V = X$, so ist die Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} h_k(U \cap V, A) \xrightarrow{(h_k(i_U), -h_k(i_V))} h_k(U, A) \oplus h_k(V, A) \xrightarrow{h_k(j_U) \oplus h_k(j_V)} h_k(X, A) \xrightarrow{\Delta_k} h_{k-1}(U \cap V, A) \longrightarrow \cdots$$

exakt. Dabei bezeichnen $i_U \colon (U \cap V, A) \longrightarrow (U, A)$, $i_V \colon (U \cap V, A) \longrightarrow (V, A)$, $j_U \colon (U, A) \longrightarrow (X, A)$ und $j_V \colon (V, A) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Für $k \in \mathbb{Z}$ ist Δ_k als die Komposition

$$h_k(X, A) \longrightarrow h_k(X, U) \xleftarrow[\text{Ausschneidung}]{\cong} h_k(V, U \cap V) \xrightarrow[\partial_k^{(V, U\cap V, A)}]{} h_{k-1}(U \cap V, A)$$

definiert (wobei die unmarkierten Pfeile von den entsprechenden Inklusionen induziert werden).

2. *Außerdem die Sequenz*

[7] Leopold Vietoris; österreichischer Mathematiker, 1891–2002(!)

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} h_k(X, U \cap V) \xrightarrow{(h_k(i_U), -h_k(i_V))} h_k(X, U) \oplus h_k(X, V) \xrightarrow{h_k(j_U) \oplus h_k(j_V)} h_k(X, U \cup V) \xrightarrow{\Delta_k} h_{k-1}(X, U \cap V) \longrightarrow \cdots$$

exakt. Dabei bezeichnen $i_U \colon (X, U \cap V) \longrightarrow (X, U)$, $i_V \colon (X, U \cap V) \longrightarrow (X, V)$, $j_U \colon (X, U) \longrightarrow (X, U \cup V)$ *und* $j_V \colon (X, V) \longrightarrow (X, U \cup V)$ *die Inklusionen. Für* $k \in \mathbb{Z}$ *ist* Δ_k *als die Komposition*

$$h_k(X, U \cup V) \xrightarrow[\partial_k^{(X, U \cup V, U)}]{} h_{k-1}(U \cup V, U) \xleftarrow[\text{Ausschneidung}]{\cong} h_k(V, U \cap V) \longrightarrow h_{k-1}(X, U \cap V), \quad \Delta_k \text{ über alles}$$

definiert (wobei die unmarkierten Pfeile von den entsprechenden Inklusionen induziert werden).

Beweisskizze. Der Beweis beruht auf der algebraischen Mayer-Vietoris-Sequenz (Proposition E.8).

Man beachte, dass in beiden Fällen Ausschneidung anwendbar ist (wegen der topologischen Voraussetzungen an U und V).

Der erste Teil folgt, indem wir Proposition E.8 auf die kommutative Leiter

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & h_k(U \cap V, A) & \longrightarrow & h_k(V, A) & \longrightarrow & h_k(V, U \cap V) & \xrightarrow{\partial_k^{(V, U \cap V, A)}} & h_{k-1}(U \cap V, A) \longrightarrow \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \\
\cdots & \longrightarrow & h_k(U, A) & \longrightarrow & h_k(X, A) & \longrightarrow & h_k(X, U) & \xrightarrow[\partial_k^{(X, U, A)}]{} & h_{k-1}(U, A) \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

anwenden, deren Zeilen die langen exakten Tripelsequenzen zu $(V, U \cap V, A)$ bzw. (X, U, A) sind.

Analog folgt der zweite Teil, indem wir Proposition E.8 auf die kommutative Leiter, die entsprechend von den langen exakten Tripelsequenzen zu $(X, V, U \cap V)$ und $(X, U \cup V, U)$ gebildet werden, anwenden. □

Beispiel 3.28 (Homologie des Torus)**.** Sei $\big((h_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k \in \mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$. Wir bestimmen nun die Homologie des Torus $T := S^1 \times S^1$: Die Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung in Abbildung (3.27) liefert die exakte Sequenz (wobei $A := \{x_0\}$)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\Delta_{k+1}} & h_k(U \cap V, A) & \longrightarrow & h_k(U, A) \oplus h_k(V, A) & \longrightarrow & h_k(T, A) & \xrightarrow{\Delta_k} & h_{k-1}(U \cap V, A) \longrightarrow \cdots \\
 & & \uparrow \cong & & \uparrow \cong & & & & \uparrow \cong \\
 & & h_k(S^1, \{e_1^2\}) & - \xrightarrow{0} & h_k(\textstyle\bigvee^2 S^1, \{e_1^2\}) \oplus 0 & & & & h_{k-1}(S^1, \{e_1^2\}) - \xrightarrow{0} \cdots
\end{array}$$

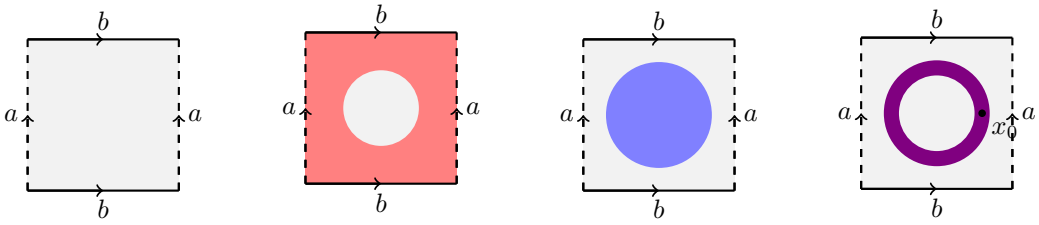


Abbildung (3.27): Zerlegung des Torus

Warum ist der gestrichelte Homomorphismus trivial? Nach der Berechnung der Homologie von Sphären, genügt es, h_1 zu betrachten. Die Inklusion $U \cap V \hookrightarrow U$ entspricht dabei der folgenden Abbildung $S^1 \longrightarrow \bigvee^2 S^1$:

- den ersten Kreis durchlaufen,
- danach den zweiten Kreis rückwärts durchlaufen,
- danach den ersten Kreis rückwärts durchlaufen,
- danach den zweiten Kreis vorwärts durchlaufen.

Mit Korollar 3.20 und Lemma 3.21 folgt, dass dies in h_1 den trivialen Homomorphismus induziert.

Daraus erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$h_k\big(T, \{x_0\}\big) \cong \begin{cases} h_1\big(S^1, \{e_1^2\}\big) \cong \mathbb{Z} & \text{falls } k = 2 \\ h_1\big(\bigvee^2 S^1, \{e_1^2\}\big) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{1, 2\} \end{cases}$$

bzw. (Proposition 3.6)

$$h_k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = 2 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\}. \end{cases}$$

Die Homologie in Grad 1 stammt dabei von $S^1 \times \{e_1^2\} \cup \{e_1^2\} \times S^1 \cong \bigvee^2 S^1$.

Analog kann man die Homologie aller kompakten Flächen berechnen.

Wir betrachten nun die Homologie von Abbildungskegeln (Abbildung (3.29)):

Definition 3.30 (Abbildungskegel)**.** Sei X ein topologischer Raum.

- Der *Kegel über* X ist definiert als

$$\mathrm{Cone}(X) := X \times [0, 1] \,/\, X \times \{0\},$$

falls $X \neq \emptyset$. Ist $X = \emptyset$, so definieren wir $\mathrm{Cone}(X) := \bullet$ (sozusagen nur die Kegelspitze).

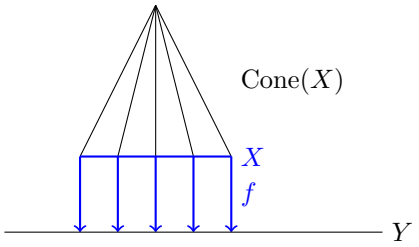


Abbildung (3.29): Abbildungskegel, schematisch

– Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so definieren wir den *Abbildungskegel von* f durch das Pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cone}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f) \end{array}$$

in Top, wobei die linke Abbildung die Inklusion $X \hookrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow \mathrm{Cone}(X)$ ist.

Beispiel 3.31 (Abbildungskegel)**.**

– Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X) \cong X$.
– Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $\mathrm{Cone}(f)$ kontraktibel. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*.
– Es ist

$$\mathrm{Cone}(f_2) \cong \mathbb{R}P^2,$$

wobei $f_2\colon S^1 \longrightarrow S^1$ wie in Korollar 3.20 definiert ist.

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz erhalten wir die folgenden langen exakten Sequenzen für Abbildungskegel:

Satz 3.32 (lange exakte Homologiesequenz von Abbildungskegeln)**.** *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 . Dann gibt es (natürliche) lange exakte Sequenzen*

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{h}_k(X) \xrightarrow{\widetilde{h}_k(f)} \widetilde{h}_k(Y) \xrightarrow{\widetilde{h}_k(Y\hookrightarrow \mathrm{Cone}(f))} \widetilde{h}_k\big(\mathrm{Cone}(f)\big) \longrightarrow \widetilde{h}_{k-1}(X) \xrightarrow{\widetilde{h}_{k-1}(f)} \cdots$$

bzw.

$$\cdots \longrightarrow h_k(X) \xrightarrow{h_k(f)} h_k(Y) \xrightarrow{h_k(Y\hookrightarrow \mathrm{Cone}(f))} \widetilde{h}_k\big(\mathrm{Cone}(f)\big) \longrightarrow h_{k-1}(X) \xrightarrow{h_{k-1}(f)} \cdots$$

(Für die erste Sequenz wird $X \neq \emptyset$ benötigt.)

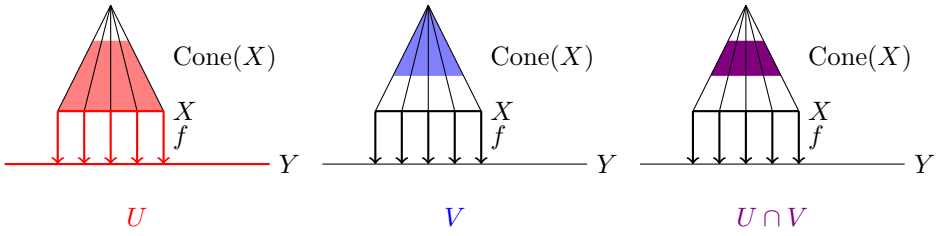


Abbildung (3.33): Zerlegung des Abbildungskegels im Beweis der langen exakten Homologiesequenz

Beweisskizze. Ohne Einschränkung sei $X \neq \emptyset$ und sei $x_0 \in X$. Wir betrachten die Zerlegung des Abbildungskegels von f in Abbildung (3.33). Dies liefert die entsprechende Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_k(U \cap V, A) & \longrightarrow & h_k(U, A) \oplus h_k(V, A) & \longrightarrow & h_k\big(\mathrm{Cone}(f), A\big) & \longrightarrow & h_{k-1}(U \cap V, A) & \longrightarrow \cdots \\
& \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & \\
& h_k(X, \{x_0\}) & \xrightarrow[h_k(f)]{} & h_k(Y, \{f(x_0)\}) \oplus 0 & \xrightarrow[h_k(\mathrm{Inkl})]{} & h_k(\mathrm{Cone}(f), \{f(x_0)\}) & & h_{k-1}(X, \{x_0\}) & \xrightarrow{} \cdots \\
& \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & \\
& \widetilde{h}_k(X) & \xrightarrow[\widetilde{h}_k(f)]{} & \widetilde{h}_k(Y) & \xrightarrow[\widetilde{h}_k(\mathrm{Inkl})]{} & \widetilde{h}_k(\mathrm{Cone}(f)) & & \widetilde{h}_{k-1}(X) & \xrightarrow{} \cdots
\end{array}$$

Dabei ist $A := \{[x_0, 1/2]\} \subset U \cap V$ und die vertikalen Homomorphismen sind von den Inklusionen induziert.

Dies zeigt die Existenz der ersten (natürlichen) langen exakten Sequenz. Addieren wir (via $\oplus$) zur mittleren exakten Sequenz die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow h_k\big(\{x_0\}\big) \xrightarrow[\cong]{h_k(f|_{\{x_0\}})} h_k\big(\{f(x_0)\}\big) \longrightarrow 0 \longrightarrow h_{k-1}\big(\{x_0\}\big) \xrightarrow[\cong]{h_k(f|_{\{x_0\}})} \cdots$$

so erhalten wir mithilfe von Proposition 3.6 die zweite (natürliche) lange exakte Sequenz. □

Aus der langen exakten Homologiesequenz erhalten wir insbesondere die folgende Charakterisierung von Homologieisomorphismen:

Korollar 3.34 (Abbildungskegel-Trick)**.** *Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Dann sind äquivalent:*

1. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $h_k(f)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(Y)$ ein Isomorphismus.*
2. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $\widetilde{h}_k(\mathrm{Cone}(f)) \cong 0$.*
3. *Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $\widetilde{h}_k(f)\colon \widetilde{h}_k(X) \longrightarrow \widetilde{h}_k(Y)$ ein Isomorphismus.*

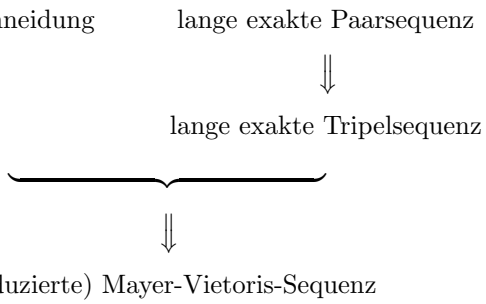


Abbildung (3.36): Eigenschaften von Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}^2$

Man kann die lange exakte Homologiesequenz von Abbildungskegeln auch verwenden, um Realisierungsresultate für Homologietheorien zu beweisen (dies führt zum Beispiel zu sogenannten *Moore-Räumen*).

Außerdem können wir Abbildungskegel verwenden, um relative Homologie durch absolute (reduzierte) Homologie darzustellen:

Proposition 3.35 (relative Homologie via Abbildungskegel)**.** *Sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine Homologietheorie auf* Top^2*, sei* (X, A) *ein Raumpaar und sei* $i\colon A \hookrightarrow X$ *die Inklusion. Dann induzieren die Inklusionen*

$$(X, A) \longrightarrow \big(\mathrm{Cone}(i), \mathrm{Cone}(A)\big) \longleftarrow \big(\mathrm{Cone}(i), \text{Kegelspitze}\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ *natürliche Isomorphismen*

$$h_k(X, A) \cong \widetilde{h}_k\big(\mathrm{Cone}(i)\big).$$

Beweisskizze. Dies folgt aus Ausschneidung, Proposition 3.5 und Bemerkung 3.7. □

Wir erhalten somit die Beziehungen für $\mathbb{Z}$-Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}^2$ in Abbildung (3.36). Umgekehrt erhalten wir für $\mathbb{Z}$-Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ die Beziehungen in Abbildung (3.37). Dies zeigt, dass man die Eilenberg-Steenrod-Axiome alternativ auch äquivalent für Homologietheorien auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ statt $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}^2$ formulieren kann.

3.5. Ausblick: Existenz und Eindeutigkeit von Homologietheorien

- *Existenz.*
  - Beispiele gewöhnlicher Homologietheorien:
    - singuläre Homologie auf Top^2 (Kapitel 4)
    - zelluläre Homologie auf der Kategorie der relativen CW-Komplexe (Kapitel 5)
    - simpliziale Homologie auf der Kategorie der simplizialen Komplexe bzw. der triangulierten topologischen Räume (Seminar „Simplicial Topology“ im WS 2015/16)

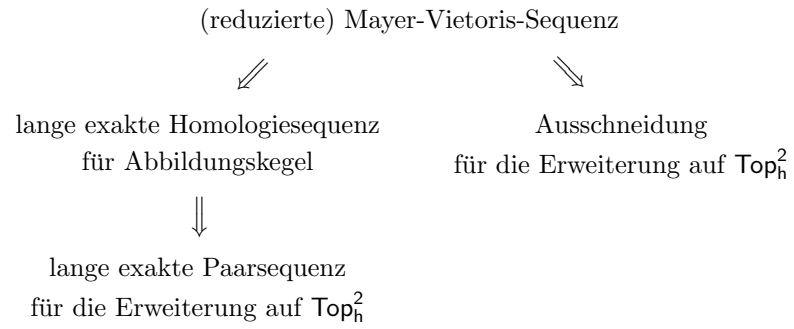


Abbildung (3.37): Eigenschaften von Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$

    - Maßhomologie auf Top^2
    - ...
  - Beispiele für Homologietheorien, die *nicht* gewöhnlich sind:
    - Bordismus
    - K-Homologie
    - ...
- *Eindeutigkeit.*
  - Eindeutigkeit gewöhnlicher Homologietheorien auf CW-Komplexen (Korollar 5.31)
  - Vergleichssatz für Homologietheorien auf Mannigfaltigkeiten
  - Auch die Atiyah-Hirzebruch-Spektralseqeunz liefert Eindeutigkeitsaussagen für Homologietheorien.
- *Klassifikation.* Eine Klassifikation von Homologietheorien kann in der stabilen Homotopietheorie mithilfe von sogenannten Spektren erhalten werden.

4. Singuläre Homologie

Wir zeigen nun wie man zu vorgegebenen Koeffizienten eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 konstruieren kann.

Wir geben zunächst eine anschauliche Skizze der Konstruktion von singulärer Homologie (Kapitel 4.1. Aufbauend auf dem Vokabular der homologischen Algebra (Anhang E.2) geben wir in Kapitel 4.2 die Konstruktion singulärer Homologie.

Im Anschluss daran weisen wir nach, dass singuläre Homologie die Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllt (Kapitel 4.3–4.4) und geben Anwendungen von singulärer Homologie (Kapitel 4.5), wie zum Beispiel Trennungssätze (Jordanscher Kurvensatz etc.).

4.1. Anschauliche Skizze der Konstruktion

Singuläre Homologie versucht topologische Räume durch einfache, an Simplizes angelehnte Bausteine, zu verstehen:

Definition 4.1 (singuläres Simplex)**.** Sei X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{N}$. Ein *singuläres k-Simplex* ist eine stetige Abbildung $\Delta^k \longrightarrow X$, wobei Δ^k das k-dimensionale Standardsimplex bezeichnet. Wir schreiben

$$S_k(X) := \mathrm{map}(\Delta^k, X)$$

für die Menge aller singulären k-Simplizes in X.

Die Grundidee ist nun, „Löcher“ in topologischen Räumen durch das „Umschließen“ mit singulären Simplizes zu entdecken.

Etwas genauer sieht das wie folgt aus (die präzise Konstruktion wird in Kapitel 4.2 gegeben):

- Da einzelne singuläre Simplizes für das „Umschließen“ von „Löchern“ im allgemeinen nicht ausreichen werden, betrachtet man stattdessen sogenannte *Ketten* von singulären Simplizes (Abbildung (4.2)).
- Kandidaten für Ketten, die ein „Loch“ entdecken, sind solche Ketten, die „keinen Rand“ haben, sogenannte *Zykel* (Abbildung (4.3)).
- Zykel entdecken nur dann ein „echtes Loch“, wenn sie nicht selbst Rand einer höherdimensionalen Kette sind (Abbildung (4.4)).

Man definiert daher für einen topologischen Raum X für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{singuläre Homologie von } X \text{ im Grad } k := \frac{\text{singuläre } k\text{-Zykel}}{\text{Ränder von singulären } k+1\text{-Ketten}}.$$

4.2. Konstruktion singulärer Homologie

Wir geben nun die Konstruktion singulärer Homologie. Dafür verwenden wir die Sprache der homologischen Algebra (Anhang E.2).

Setup 4.5. Sei im folgenden R ein Ring mit Eins und sei Z ein Links-R-Modul.

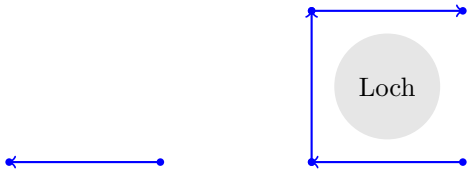


Abbildung (4.2): Singuläre Ketten, schematisch

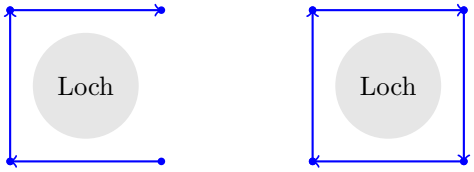


Abbildung (4.3): Singuläre Zykel, schematisch. Die linke Kette kann kein „Loch“ „umschließen“, die rechte schon.

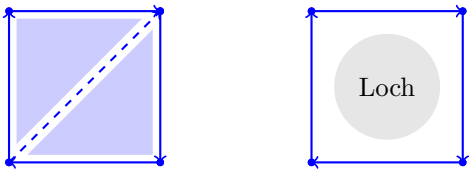


Abbildung (4.4): Singuläre Ränder, schematisch. Der linke Zykel ist Rand einer singulären Kette, kann also kein „Loch“ entdecken; der rechte Zykel ist *nicht* Rand einer singulären Kette (das „Loch“ ist im Weg).

Singuläre Ketten und ihre Ränder werden wie folgt algebraisch modelliert:

Proposition und Definition 4.6 (singulärer Kettenkomplex)**.**

1. *Sei X ein topologischer Raum. Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei*

$$C_k(X) := \begin{cases} \bigoplus_{\mathrm{map}(\Delta^k, X)} \mathbb{Z} = F\big(\mathrm{map}(\Delta^k, X)\big) & \text{falls } k \geq 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

   wobei $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ der freie Erzeugungsfunktor ist (Beispiel 1.34). Außerdem sei

$$\partial_k := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \partial_{k,j} & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{falls } k \leq 0 \end{cases} : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X),$$

   wobei für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $j \in \{0, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned} i_{k,j}\colon \Delta^{k-1} &\longrightarrow \Delta^k \\ (t_0, \ldots, t_{k-1}) &\longmapsto (t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{k-1}) \end{aligned}$$

   die Inklusion der j-ten Seite von Δ^k bezeichnet und

$$\begin{aligned} \partial_{k,j} := F\big(\mathrm{map}(i_{k,j}, X)\big)\colon C_k(X) &\longrightarrow C_{k-1} \\ \sigma &\longmapsto \sigma \circ i_{k,j} \end{aligned}$$

   (Abbildung (4.7)). Dann ist

$$C(X) := \big(C_*(X), \partial_*\big)$$

   ein Kettenkomplex abelscher Gruppen, der singuläre Kettenkomplex von X*.*

2. *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für $k \in \mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned} C_k(f) := F\big(\mathrm{map}(\Delta^k, f)\big)\colon C_k(X) &\longrightarrow C_k(Y) \\ \sigma &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

   und für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $C_k(f) := 0$. Dann ist $C(f) := \big(C_k(f)\big)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C(X) \longrightarrow C(Y)$.

3. *So erhält man einen Funktor $\mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.*

Beweisskizze. Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $j \in \{0, \ldots, k+1\}$ und alle $r \in \{0, \ldots, j-1\}$ ist

$$i_{k+1,j} \circ i_{k,r} = i_{k+1,r} \circ i_{k,j-1}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt dann für alle $\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^{k+1}, X)$, dass

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1}(\sigma) = &\sum_{j=0}^{k+1} \sum_{j=r+1}^{k+1} (-1)^{j+r} \cdot \sigma \circ i_{k+1,r} \circ i_{k,j-1} \\ &+ \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{r=j}^{k} (-1)^{j+r} \cdot \sigma \circ i_{k+1,j} \circ i_{k,r}; \end{aligned}$$

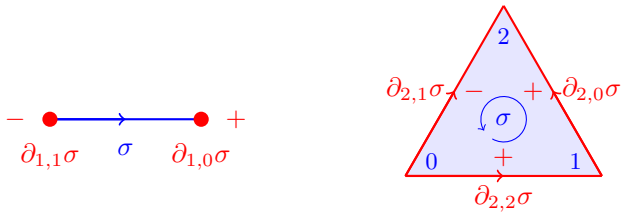


Abbildung (4.7): Der singuläre Randoperator in niedrigen Graden

da sich die beiden Summen nur um das Vorzeichen unterscheiden, folgt $\partial_k \circ \partial_{k+1}(\sigma) = 0$. Also ist $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.

Der zweite und der dritte Teil folgen durch einfaches Nachrechnen. □

Bemerkung 4.8 (singulärer Kettenkomplex via simpliziale Mengen)**.** Die obige Konstruktion stimmt mit der folgenden Konstruktion überein: Wir betrachten den Funktor

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Top} \xrightarrow{\Delta^{\mathrm{op}}_{\mathsf{Top}} \times \mathrm{id}_{\mathsf{Top}}} \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Top} \xrightarrow{\mathrm{map}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathsf{Set} \xrightarrow{F} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod},$$

wobei $\Delta_{\mathsf{Top}} \colon \Delta \longrightarrow \mathsf{Top}$ abstrakte Simplizes und monotone Abbildungen in Standardsimplizes und die entsprechenden affin linearen Abbildungen übersetzt. Die obige Komposition induziert einen Funktor $\mathsf{Top} \longrightarrow \Delta({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod})$ und damit einen Funktor

$$\mathsf{Top} \longrightarrow \Delta({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}) \xrightarrow{C} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$$

(Beispiel E.13 und E.17). Dieser Funktor ist genau der singuläre Kettenkomplexfunktor aus Proposition 4.6.

Wir könnten nun singuläre Homologie als algebraische Homologie dieses Kettenkomplexes definieren. Wir geben jedoch gleich die entsprechende Verallgemeinerung für Raumpaare und allgemeine (konstante) Koeffizienten an:

Definition 4.9 (singulärer Kettenkomplex mit (konstanten) Koeffizienten)**.**

– Ist (X, A) ein Raumpaar, so definieren wir

$$C(X, A; Z) := Z \otimes_{\mathbb{Z}} C(X) \,/\, \mathrm{im}(Z \otimes_{\mathbb{Z}} C(A \hookrightarrow X)) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$$

(wobei der Randoperator vom Randoperator auf $C(X)$ induziert wird).

– Ist $f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Raumpaaren, so definieren wir $C(f; Z) = (C_k(f; Z))_{k \in \mathbb{Z}}$ durch

$$\begin{aligned} C_k(f; Z) \colon C_k(X, A; Z) &\longrightarrow C_k(Y, B; Z) \\ [c] &\longmapsto \big[C(f)(c)\big] \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ (dies ist wohldefiniert).

Dies liefert einen Funktor $C(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$.

Beispiel 4.10 (singuläre Ketten mit Koeffizienten)**.**

– Wir betrachten S^1: Sei

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Delta^1 &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}\\ (1-t,t) &\longmapsto e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot t}.\end{aligned}$$

Dann ist $1\otimes\sigma \in C_1(S^1,\emptyset;\mathbb{Z})$ ein Zykel. Man schreibt dafür auch kurz $1\cdot\sigma$ oder einfach σ.

– Wir betrachten (D^1,S^0): Sei

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Delta^1 &\longrightarrow D^1\\ (1-t,t) &\longmapsto 2\cdot t-1.\end{aligned}$$

Dann ist $1\otimes\sigma \in C_1(D^1,\emptyset;\mathbb{Z})$ *kein* Zykel, aber $1\otimes\sigma$ repräsentiert einen Zykel in $C_1(D^1,S^0;\mathbb{Z})$.

Definition 4.11 (singuläre Homologie mit (konstanten) Koeffizienten)**.** Der Funktor

$$H_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) := H_*\big(C_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\big)\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$$

heißt *singuläre Homologie mit Koeffizienten in Z*.

Notation 4.12. Wir schreiben für topologische Räume X auch kurz

$$\begin{aligned}C(X;Z) &:= C(X,\emptyset;Z)\\ H_*(X;Z) &:= H_*(X,\emptyset;Z).\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Konstruktion von singulärer Homologie nicht nur in Raumpaaren funktoriell ist, sondern auch in den Koeffizienten. Man erhält einen Funktor $H_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top}^2\times_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$.

Beispiel 4.13 (singuläre Homologie der leeren Menge)**.** Nach Definition ist $C_k(\emptyset;Z)\cong 0$ für alle $k\in\mathbb{Z}$, und somit

$$H_k(\emptyset;Z)\cong 0$$

für alle $k\in\mathbb{Z}$.

Bemerkung 4.14 (singuläre Homologie in negativen Graden)**.** Nach Konstruktion gilt für alle Raumpaare (X,A) und alle $k\in\mathbb{Z}_{<0}$, dass $C_k(X,A;Z)\cong 0$, und somit

$$H_k(X,A;Z)\cong 0.$$

Beispiel 4.15 (singuläre Homologie des Einpunktraumes)**.** Der singuläre Kettenkomplex $C(\bullet;Z)$ des Einpunktraumes mit Koeffizienten in Z ist nach Konstruktion isomorph zu dem Kettenkomplex

$$\begin{array}{lccccccccccc}\text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\ \cdots & \xrightarrow[\mathrm{id}_Z]{} & Z & \xrightarrow[0]{} & Z & \xrightarrow[\mathrm{id}_Z]{} & Z & \xrightarrow[0]{} & Z & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \cdots\end{array}$$

Also erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$H_k(\bullet; Z) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus 0. \end{cases}$$

Beispiel 4.16. Sei

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Delta^1 &\longrightarrow S^1 \\ (1-t, t) &\longmapsto e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t} \end{aligned}$$

(Beispiel 4.10). Dann ist $\sigma \in C_1(S^1; \mathbb{Z})$ ein Zykel und die singuläre Kette $1 \cdot \tau \in C_2(S^1; \mathbb{Z})$ mit

$$\begin{aligned} \tau \colon \Delta^2 &\longrightarrow S^1 \\ (t_0, t_1, t_2) &\longmapsto e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (t_2 - t_0)} \end{aligned}$$

zeigt, dass

$$2 \cdot [\sigma] = \big[f_2 \circ \sigma\big]$$

in $H_1(S^1; \mathbb{Z})$ gilt; dabei ist $f_2 \colon S^1 \longrightarrow S^1$ wie in Korollar 3.20 definiert. Analog folgt auch $d \cdot [\sigma] = [f_d \circ \sigma]$ für alle $d \in \mathbb{Z}$.

Singuläre Homologie erfüllt die folgende starke Form von Additivität; man beachte dabei, dass Wegzusammenhangskomponenten im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen sind.

Proposition 4.17 (starke Additivität von singulärer Homologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_i)_{i \in I}$ die Familie der Wegzusammenhangskomponenten von X. Dann induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$\bigoplus_{i \in I} H_k(X_i; Z) \longrightarrow H_k(X; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist Δ^k wegzusammenhängend; also induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ eine Bijektion

$$\bigsqcup_{i \in I} \operatorname{map}(\Delta^k, X_i) \longrightarrow \operatorname{map}(\Delta^k, X).$$

Daher induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C(X_i; Z) \longrightarrow C(X; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ (die direkte Summe von Kettenkomplexen ist dabei durch die gradweise direkte Summe der Kettenmoduln und der Randoperatoren gegeben). Da Homologie von Kettenkomplexen mit direkten Summen verträglich ist, folgt die Behauptung. □

Satz 4.18 (singuläre Homologie im Grad 0)**.**

1. *Ist X ein wegzusammenhängender nicht-leerer topologischer Raum, so induziert die konstante Abbildung $c\colon X \longrightarrow \bullet$ einen Isomorphismus*

$$H_0(c;Z)\colon H_0(X;Z) \longrightarrow H_0(\bullet;Z)$$

   in ${}_R\mathsf{Mod}$.

2. *Also ist $H_0(\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph zu*

$$Z \otimes_{\mathbb{Z}} F \circ \pi_0^+\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod},$$

   wobei $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ der freie Erzeugungsfunktor (Beispiel 1.34) und

$$\pi_0^+ := [\bullet,\ \cdot\,]\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

   der Wegzusammenhangskomponentenfunktor ist.

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt aus dem ersten Teil und der starken Additivität von singulärer Homologie (Proposition 4.17).

Es genügt daher, den ersten Teil zu zeigen: Sei $x_0 \in X$ und sei $i\colon \bullet \longrightarrow \{x_0\} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Wegen $c \circ i = \mathrm{id}_\bullet$ liefert die Funktorialität von $H_0(\,\cdot\,;Z)$, dass $H_0(c;Z)$ surjektiv ist und dass $H_0(c;Z)$ injektiv ist, wenn $H_0(i;Z)$ surjektiv ist.

Es ist $H_0(i;Z)$ surjektiv, denn: Sei $c = \sum_{j=1}^m a_j \cdot x_j \in C_0(X;Z)$ ein 0-Zykel (mit $a_1,\dots,a_m \in Z$ und $x_1,\dots,x_m \in Z$; wir identifizieren hierbei singuläre 0-Simplizes in X mit Punkten in X). Da X wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem $j \in \{1,\dots,m\}$ einen Weg $\gamma_j\colon \Delta^1 \longrightarrow X$ mit

$$\partial_{1,0}(\gamma_j) = x_j \qquad \text{und} \qquad \partial_{1,1}(\gamma_j) = x_0$$

(Abbildung (4.19)). Dann gilt in $H_1(X;Z)$:

$$\begin{aligned}[c] &= \left[c - \partial_1\left(\sum_{j=1}^m a_j \otimes \gamma_j\right)\right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^m a_j \otimes x_0\right] \in \operatorname{im} H_0(i;Z).\end{aligned}$$

Also ist $H_0(i;Z)$ surjektiv, wie gewünscht. □

Singuläre Homologie kann also bei geeigneten Koeffizienten erkennen wieviele Wegzusammenhangskomponenten ein topologischer Raum hat. Dies ist zum Beispiel beim Beweis von Separationssätzen wie dem Jordanschen Kurvensatz relevant (Satz 4.44).

Satz 4.20 (lange exakte Paarsequenz in singulärer Homologie)**.** *Sei (X,A) ein Raumpaar und seien $i\colon A \hookrightarrow X$ bzw. $j\colon (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ die Inklusionen. Dann ist*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A;Z) \xrightarrow{H_k(i;Z)} H_k(X;Z) \xrightarrow{H_k(j;Z)} H_k(X,A;Z) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A;Z) \longrightarrow \cdots$$

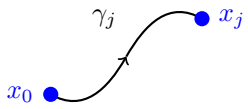


Abbildung (4.19): Verbindung von singulären 0-Simplizes in einem wegzusammenhängenden Raum durch ein singuläres 1-Simplex

eine natürliche lange exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$*, wobei für* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ *der Verbindungshomomorphismus die explizite Beschreibung*

$$\begin{aligned} \partial_k \colon H_k(X, A; Z) &\longrightarrow H_{k-1}(A; Z) \\ \big[c + Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im} C_k(i)\big] &\longmapsto \big[\partial_k(c)\big] \end{aligned}$$

besitzt. Die Natürlichkeit bezieht sich dabei sowohl auf Natürlichkeit in Raumpaaren als auch in Koeffizienten.

Insbesondere erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ *natürliche Transformationen*

$$\partial_k \colon H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,; Z) \Longrightarrow H_{k-1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,; Z) \circ U,$$

wobei $U \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ *der Unterraumfunktor ist (Definition 3.1).*

Beweisskizze. Die (natürliche) Sequenz

$$0 \longrightarrow C(A; Z) \xrightarrow{C(i;Z)} C(X; Z) \xrightarrow{\text{Projektion}} C(X, A; Z) \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ ist (gradweise) exakt; die (gradweise) Exaktheit an den Stellen $C(X, A; Z)$ bzw. $C(X; Z)$ folgt dabei direkt aus der Konstruktion, die (gradweise) Exaktheit an der Stelle $C(A; Z)$ folgt daraus, dass die Injektion $C(i) \colon C(A) \longrightarrow C(X)$ einen Spalt besitzt und somit nach Anwenden von $Z \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ injektiv bleibt.

Die Behauptung folgt nun aus der algebraischen langen exakten Homologiesequenz und der algebraischen Konstruktion der Verbindungshomomorphismen (Satz E.23). □

Unser nächstes Ziel ist nun, zu zeigen, dass

$$\big(\big(H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,; Z)\big)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$

eine additive gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) Z ist. Dazu fehlen noch der Beweis der Homotopieinvarianz und von Ausschneidung.

4.3. Homotopieinvarianz von singulärer Homologie

Wir zeigen nun, dass singuläre Homologie homotopieinvariant ist:

Satz 4.21 (Homotopieinvarianz von singulärer Homologie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Seien (X, A), (Y, B) Raumpaare und seien $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen von Raumpaaren mit $f \simeq_{\mathsf{Top}^2} g$.*

1. *Dann gilt*
$$C(f; Z) \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C(g; Z)\colon C(X, A; Z) \longrightarrow C(Y, B; Z).$$
2. *Insbesondere folgt*
$$H_k(f; Z) = H_k(g; Z)\colon H_k(X, A; Z) \longrightarrow H_k(Y, B; Z)$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir zeigen dies zunächst mit einem geometrischen Argument für den Modellfall der Inklusion von Boden bzw. Deckel in den Zylinder und leiten dann daraus die allgemeine Aussage ab: Die technische Hauptschwierigkeit besteht dabei darin, dass $\Delta^k \times [0, 1]$ für $k > 0$ *kein* Simplex ist; daher ist es nötig, solche Prismen systematisch in $(k + 1)$-Simplizes zu zerlegen:

Lemma 4.22 (Zerlegung von Prismen)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $(h_{X,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ mit*
$$h_{X,k}\colon C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}\big(X \times [0, 1]\big)$$
$$\mathrm{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma \longmapsto \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,j}$$
für alle $k \in \mathbb{N}$ und $h_{X,k} := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ eine Kettenhomotopie in ${}_\mathbb{Z}\mathsf{Ch}$ von $C(i_0)$ nach $C(i_1)$. Dabei sind $i_0, i_1\colon X \hookrightarrow X \times [0, 1]$ die Inklusionen des Bodens bzw. Deckels des Zylinders $X \times [0, 1]$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \ldots, k\}$ ist (Abbildung (4.23))
$$\tau_{k,j}\colon \Delta^{k+1} \longrightarrow \Delta^k \times [0, 1]$$
$$(t_0, \ldots, t_{k+1}) \longmapsto \big((t_0, \ldots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots, t_{k+1}), t_{j+1} + \cdots + t_{k+1}\big).$$
Diese Kettenhomotopie ist im folgenden Sinne natürlich: Für alle stetigen Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist
$$C_{k+1}(f \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ h_{X,k} = h_{Y,k} \circ C_k(f).$$

Beweisskizze. Die Natürlichkeit folgt direkt aus der Konstruktion.

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^k, X)$ gilt nach Definition
$$\begin{aligned}
\partial_{k+1} \circ h_{X,k}(\sigma) &= \sum_{r=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+r} \cdot (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,j} \circ i_{k,j} \\
&= (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,0} \circ i_{k+1,0} \\
&+ \sum \text{„innere“ Seiten} \\
&+ \sum \text{„äußere“ Seiten} \\
&+ (-1)^{k+k+1} \cdot (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,k} \circ i_{k+1,k+1}.
\end{aligned}$$

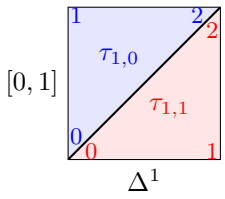


Abbildung (4.23): Triangulierung des Prismas $\Delta^k \times [0,1]$

Da jede „innere“ Seiten genau zweimal (und dann mit verschiedenen Vorzeichen) auftritt, ist der zweite Summand Null; der dritte Summand stimmt mit $-h_{X,k-1} \circ \partial_k(\sigma)$ überein. Insgesamt folgt damit

$$\partial_{k+1} \circ h_{X,k} = C_k(i_1) - h_{X,k-1} \circ \partial_k - C_k(i_0),$$

wie gewünscht. □

Beweisskizze von Satz 4.21. Wegen der Homotopieinvarianz von Homologie von Kettenkomplexen (Proposition E.37) genügt es, den ersten Teil zu zeigen.

Sei etwa $h\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ eine Homotopie in Top^2 von f nach g. Dann ist

$$\big(C_{k+1}(h) \circ h_{X,k}\colon C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(Y)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

nach Lemma 4.22 eine Kettenhomotopie in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ von

$$C(h) \circ C(i_0) = C(h \circ i_0) = C(f)$$

nach

$$C(h) \circ C(i_1) = C(h \circ i_1) = C(g).$$

Wegen der Natürlichkeit der Konstruktion in Lemma 4.22 gilt

$$\operatorname{im}\big(C_{k+1}(h) \circ h_{X,k} \circ C_k(A \hookrightarrow X)\big) \subset \operatorname{im}\big(C_{k+1}(B \hookrightarrow Y)\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Deshalb induziert die obige Kettenhomotopie durch Tensorprodukt- und Restklassenbildung eine Kettenhomotopie

$$C(f; Z) \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C(g; Z)\colon C(X, A; Z) \longrightarrow C(Y, B; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$. □

Caveat 4.24. Sei X ein topologischer Raum und sei $k \in \mathbb{N}$. Sind $c = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \sigma_j$ und $c' = \sum_{j=1}^m a_j \cdot \sigma'_j \in C_k(X)$ singuläre Zykel und gilt

$$\forall_{j\in\{1,\dots,m} \quad \sigma_j \simeq_{\mathsf{Top}} \sigma'_j,$$

Abbildung (4.25): Ein singuläres Simplex in X, das nicht in $X \setminus B$ oder A liegt und eine Unterteilung davon in „kleine“ Simplizes

so folgt im allgemeinen *nicht* $[c] = [c'] \in H_k(X)$. Die entsprechenden Homotopien der singulären Simplizes sind im allgemeinen auf $\partial\Delta^k$ *nicht* kompatibel und die Prismenzerlegung liefert somit *keine* Kette $b \in C_{k+1}(X)$ mit $\partial_{k+1}(b) = c - c'$.

Diese Tatsache ist essentiell für die Konstruktion singulärer Homologie: Da Δ^k kontraktibel ist, sind alle stetigen Abbildungen $\Delta^k \longrightarrow X$ homotop zueinander (falls X wegzusammenhängend ist) ...

Falls es in der obigen Situation „auf dem Rand kompatible“ Homotopien zwischen den singulären Simplizes gibt, kann man jedoch tatsächlich einen entsprechenden singulären Rand konstruieren. Dies ist z.B. nützlich, um glatte singuläre Ketten in glatten Mannigfaltigkeiten mit gewöhnlichen singulären Ketten zu vergleichen, oder um die Invarianz von singulärer Homologie unter sogenannten schwachen Äquivalenzen zu zeigen.

4.4. Ausschneidung in singulärer Homologie

Wir zeigen nun, dass singuläre Homologie Ausschneidung erfüllt, d.h., dass die Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ für alle Raumpaare (X, A) und alle $B \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ sowie alle Ringe R mit Eins, alle $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$H_k(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_k(X, A)$$

induziert.

Die technische Hauptschwierigkeit beim Beweis ist, dass singuläre Simplizes in X natürlich im allgemeinen *nicht* in $X \setminus B$ oder A liegen (Abbildung (4.25)).

Die Idee ist daher, singuläre Simplizes systematisch so in „kleine“ singuläre Simplizes zu unterteilen, dass diese „kleinen“ Simplizes jeweils in $X \setminus B$ oder A liegen. Wir verwenden dazu die baryzentrische Unterteilung (Abbildung (4.26)), wobei wir mit dem Fall von singulären Simplizes in konvexen Räumen beginnen:

Definition 4.27 (baryzentrische Unterteilung)**.** Sei $\Delta \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ eine konvexe Teilmenge (z.B. ein Standardsimplex).

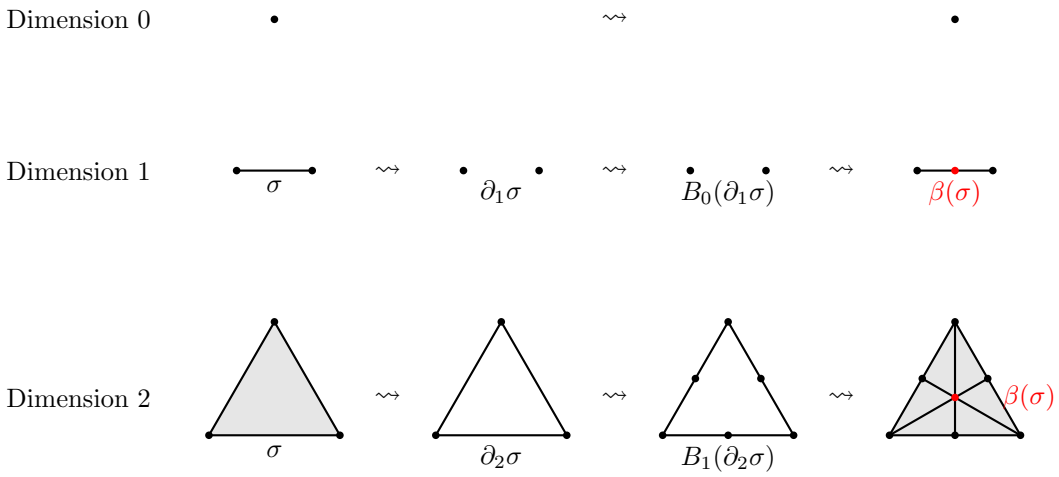


Abbildung (4.26): baryzentrische Unterteilung

– Der *Schwerpunkt* eines singulären Simplexes $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \Delta$ ist

$$\beta(\sigma) := \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^{k} \sigma(e_{j+1}^{k+1}) \in \Delta.$$

– Sei $v \in \Delta$. Dann definieren wir den *Kegeloperator zu* v durch

$$v * \cdot : C_k(\Delta) \longrightarrow C_{k+1}(\Delta)$$
$$\operatorname{map}(\Delta^k, \Delta) \ni \sigma \longmapsto \begin{pmatrix} \Delta^{k+1} & \longrightarrow & \Delta \\ (t_0, \ldots, t_{k+1}) & \longmapsto & t_0 \cdot v + (1-t_0) \cdot \sigma\left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{k+1}}{1-t_0}\right) \end{pmatrix}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (und durch $v * \cdot := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$).

– Die *baryzentrische Unterteilung* $B\colon C(\Delta) \longrightarrow C(\Delta)$ ist induktiv wie folgt definiert:
  – Für alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $B_k := 0$.
  – Es sei $B_0 := \mathrm{id}_{C_0(\Delta)}$.
  – Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$B_k\colon C_k(\Delta) \longrightarrow C_k(\Delta)$$
$$\operatorname{map}(\Delta^k, \Delta) \ni \sigma \longmapsto \beta(\sigma) * \big(B_{k-1}(\partial_k \sigma)\big).$$

– Außerdem definieren wir $(H_k\colon C_k(\Delta) \longrightarrow C_{k+1}(\Delta))_{k\in\mathbb{Z}}$ induktiv durch:
  – Für alle $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ sei $H_k := 0$.

– Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} H_k \colon C_k(\Delta) &\longrightarrow C_{k+1}(\Delta) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, \Delta) \ni \sigma &\longmapsto \beta(\sigma) * \big(B_k(\sigma) - \sigma - H_{k-1}(\partial_k \sigma)\big) \end{aligned}$$

Bemerkung 4.28. Die Konstruktionen aus Definition 4.27 sind im folgenden Sinne mit Inklusionen von konvexen Teilmengen von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ kompatibel: Sind $\Delta, \Delta' \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ konvex und ist $\Delta \subset \Delta'$, so gilt

$$C_k(\Delta \hookrightarrow \Delta') \circ B_k^{\Delta} = B_k^{\Delta'} \circ C_k(\Delta \hookrightarrow \Delta')$$

und

$$C_{k+1}(\Delta \hookrightarrow \Delta') \circ H_k^{\Delta} = H_k^{\Delta'} \circ C_k(\Delta \hookrightarrow \Delta')$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Daher verwenden wir für alle konvexen Teilmengen von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ für „B“ und „H“ dieselbe Notation und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \in C_k(\Delta^k) \quad \text{und} \quad H_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \in C_{k+1}(\Delta^k).$$

Für allgemeine topologische Räume definieren wir:

Definition 4.29 (baryzentrische Unterteilung in topologischen Räumen)**.** Sei X ein topologischer Raum.

– Wir definieren $B_X \colon C(X) \longrightarrow C(X)$ wie folgt: Für alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $B_{X,k} := 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} B_{X,k} \colon C_k(X) &\longrightarrow C_k(X) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma &\longmapsto C_k(\sigma) \circ B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}). \end{aligned}$$

– Zu $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $H_{X,k} := 0 \colon C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(X)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} H_{X,k} \colon C_k(X) &\longrightarrow C_{k+1}(X) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma &\longmapsto C_{k+1}(\sigma) \circ H_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}). \end{aligned}$$

Proposition 4.30 (algebraische Eigenschaften der baryzentrischen Unterteilung in topologischen Räumen)**.** *Sei X ein topologischer Raum.*

1. *Dann ist $B_X \colon C(X) \longrightarrow C(X)$ eine Kettenabbildung in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.*
2. *Die Familie $(H_{X,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ ist eine Kettenhomotopie $B_X \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(X)}$.*
3. *Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ stetig, so gilt*

$$C(f) \circ B_X = B_Y \circ C(f)$$

und

$$C_{k+1}(f) \circ H_{X,k} = H_{X,k} \circ C_k(f)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Für den Beweis verwenden wir die entsprechenden Eigenschaften im affinen Fall:

Lemma 4.31 (algebraische Eigenschaften der baryzentrischen Unterteilung; affiner Fall)**.** *Sei $\Delta \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ affin.*

0. Für alle $v \in \Delta$, alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, \Delta)$ gilt

$$\partial_{k+1}(v * \sigma) = \begin{cases} \sigma - \operatorname{const}_v & \text{falls } k = 0 \\ \sigma - v * \partial_k(\sigma) & \text{falls } k > 0. \end{cases}$$

Ist $f\colon \Delta \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ affin linear, so gilt außerdem

$$f \circ (v * \sigma) = f(v) * (f \circ \sigma).$$

1. Es ist $B\colon C(\Delta) \longrightarrow C(\Delta)$ eine Kettenabbildung.

2. Die Familie $(H_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine Kettenhomotopie $B \simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(\Delta)}$.

3. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle affin linearen Abbildungen $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ gilt

$$B_k(\sigma) = C_k(\sigma) \circ B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k})$$

und

$$H_k(\sigma) = C_{k+1}(\sigma) \circ H_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}).$$

Beweisskizze. Teil 0 folgt mti einer einfachen Rechnung aus der Definition des Kegeloperators (Definition 4.27).

Teil 1 und Teil 2 lassen sich per vollständiger Induktion anhand der Definitionen von B und H nachrechnen.

Teil 3 folgt mit einer kleinen Rechnung induktiv aus Teil 0. □

Beweisskizze von Proposition 4.30. Wir zeigen nur Teil 1 (Teil 2 geht analog und Teil 3 folgt direkt aus der Konstruktion).

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ gilt nach Konstruktion (und da $C(\sigma)$ und B Kettenabbildungen sind)

$$\begin{aligned} \partial_k \circ B_{X,k}(\sigma) &= \partial_k \circ C_k(\sigma) \circ B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \\ &= C_{k-1}(\sigma) \circ B_{k-1}(\partial_k \mathrm{id}_{\Delta^k}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_{k-1}(\sigma) \circ B_{k-1}(i_{k,j}). \end{aligned}$$

Da $i_{k,j}\colon \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ für alle $j \in \{0, \dots, k\}$ affin linear ist, erhalten wir aus dem dritten Teil von Lemma 4.31, dass

$$\begin{aligned} \partial_k \circ B_{X,k}(\sigma) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_{k-1}(\sigma) \circ C_{k-1}(i_{k,j}) \circ B_{k-1}(\mathrm{id}_{\Delta^{k-1}}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_{k-1}(\sigma \circ i_{k,j}) \circ B_{k-1}(\mathrm{id}_{\Delta^{k-1}}) \\ &= B_{X,k-1} \circ \partial_k(\sigma), \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Als nächsten Schritt zeigen wir mithilfe der baryzentrischen Unterteilung, dass „kleine“ Simplizes singuläre Homologie berechnen:

Setup 4.32. Für den Rest des Abschnitts sei R ein Ring und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$.

Definition 4.33 (kleine Simplizes)**.** Sei X ein topologischer Raum und sei $U = (U_i)_{i\in I}$ eine *starke Überdeckung von X* (d.h. für alle $i \in I$ ist $U_i \subset X$ und es gilt $\bigcup_{i\in I} U_i^\circ = X$).

- Der *Kettenkomplex $C^U(X)$ der U-kleinen singulären Simplizes in X* ist definiert durch

$$C_k^U(X) := \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ F(\bigcup_{i\in I} \mathrm{map}(\Delta^k, U_i)) = \bigoplus_{\bigcup_{i\in I} \mathrm{map}(\Delta^k, U_i)} \mathbb{Z} & \text{falls } k \geq 0 \end{cases}$$

  zusammen mit der Einschränkung der Randoperatoren von $C(X)$ (dies ist wohldefiniert!).
- Wir schreiben dann
$$H_*^U(X) := H_*\big(C_*^U(X)\big).$$
- Ist $A \subset X$, so definieren wir
$$C^U(X, A; Z) := Z \otimes_R C^U(X) \,/\, Z \otimes_R \mathrm{im}(C^{U\cap A}(A) \hookrightarrow C^U(X)) \in {}_R\mathsf{Ch}$$
  (wobei $U \cap A := (U_i \cap A)_{i\in I}$) und
$$H_*^U(X, A; Z) := H_*\big(C^U(X, A; Z)\big) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Grad}),$$
  sowie $C^*(X; Z) := C^U(X, \emptyset; Z)$ bzw. $H_*^U(X; Z) := H_*^U(X, \emptyset; Z)$.

Satz 4.34 (kleine Simplizes berechnen singuläre Homologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum, sei U eine starke Überdeckung von X und sei $j\colon C^U(X) \longrightarrow C(X)$ die Inklusion. Dann ist*
$$H_*(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j)\colon H_*^U(X; Z) \longrightarrow H_*(X; Z)$$
ein R-Isomorphismus.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf einer Größenabschätzung für die baryzentrische Unterteilung und dem Lebesgue-Lemma.

Proposition 4.35 (baryzentrische Unterteilung verkleinert affine Simplizes)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $\Delta \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ konvex.*

1. *Ist $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \Delta$ affin linear, so gilt für alle Summanden τ aus der Definition von $B_k(\sigma) \in C_k(\Delta)$ (Definition 4.27), dass*
$$\mathrm{diam}\big(\tau(\Delta^k)\big) \leq \frac{k}{k+1} \cdot \mathrm{diam}\big(\sigma(\Delta^k)\big).$$
2. *Insbesondere folgt: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle Summanden τ aus der n-fachen baryzentrischen Unterteilung von id_{Δ^k} bereits*
$$\mathrm{diam}\big(\tau(\Delta^k)\big) < \varepsilon$$
   gilt.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt induktiv mit elementaren Überlegungen aus der konvexen Geometrie. Der zweite Teil ist eine direkte Konsequenz aus dem ersten Teil. □

Korollar 4.36. *Ist X ein topologischer Raum, ist U eine starke Überdeckung von X, ist $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$(B_{X,k})^{\circ n}(\sigma) \in C_k^U(X).$$

Beweisskizze. Sei $U = (U_i)_{i \in I}$. Die Behauptung folgt aus Lemma 2.13, Proposition 4.35 und der Natürlichkeit aus Proposition 4.30, da Δ^k ein kompakter metrischer Raum und $(\sigma^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine starke Überdeckung von Δ^k ist. □

Wir beweisen nun Satz 4.34:

Beweisskizze von Satz 4.34. Wie in der Konstruktion der langen exakten Paarsequenz für singuläre Homologie (Satz 4.20) folgt, dass

$$Z \otimes_{\mathbb{Z}} j \colon C^U(X; Z) \longrightarrow C(X; Z)$$

gradweise injektiv ist. Wir fassen daher $C^U(X; Z)$ als Unterkomplex von $C(X; U)$ auf. Sei $k \in \mathbb{Z}$, ohne Einschränkung sei dabei $k \geq 0$.

- *Es ist $H_k(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j)$ surjektiv, denn:* Sei $c \in C_k(X; Z)$. Aus Korollar 4.36 erhalten wir (da c nur aus endlich vielen singulären Simplizes besteht) ein $n \in \mathbb{N}$ mit

  $$(Z \otimes_{\mathbb{Z}} (B_{X,k})^n)(c) \in C_k^U(X; Z).$$

  Wegen $Z \otimes_{\mathbb{Z}} (B_X)^n \simeq_{R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(X;Z)}$ (Proposition 4.30 und Proposition E.35) gilt in $H_k(X; Z)$, dass

  $$[c] = \left[(Z \otimes_{\mathbb{Z}} (B_{X,k})^n)(c)\right] \in \operatorname{im} H_k(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j).$$

- *Es ist $H_k(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j)$ injektiv, denn:* Dies folgt analog, indem man $(k+1)$-Ketten in $C(X; Z)$ hinreichend oft baryzentrisch unterteilt. Man beachte dabei, dass auch $Z \otimes B_X|_{C^U(X;Z)}$ zu $\mathrm{id}_{C^U(X;Z)}$ kettenhomotop ist (da die baryzentrische Unterteilung und die zugehörige Kettenhomotopie nach Proposition 4.30 natürlich sind). □

Korollar 4.37 (kleine Simplizes berechnen singuläre Homologie, relativer Fall)**.** *Sei (X, A) ein Raumpaar und sei U eine starke Überdeckung von X. Dann induziert die kanonische Abbildung $C^U(X, A; Z) \longrightarrow C(X, A; Z)$ einen R-Isomorphismus*

$$H_*^U(X, A; Z) \longrightarrow H_*(X, A; Z).$$

Beweisskizze. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{U \cap A}(A; Z) & \longrightarrow & C^U(X; Z) & \longrightarrow & C^U(X, A; Z) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C(A; Z) & \longrightarrow & C(X; Z) & \longrightarrow & C(X, A; Z) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ (wobei alle Kettenabbildungen die entsprechenden kanonischen Abbildungen sind). Die untere Zeile ist gradweise exakt (Beweis von Satz 4.20); analog sieht man auch, dass die obere Zeile gradweise exakt ist. Mit der natürlichen langen exakten Sequenz von Kettenkomplexen (Satz E.23) und dem Fünfer-Lemma (Proposition E.6) folgt die Behauptung aus Satz 4.34. □

Korollar 4.38 (Ausschneidung in singulärer Homologie)**.** *Sei (X, A) ein Raumpaar und sei $B \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ einen Isomorphismus*

$$H_*(X \setminus B, A \setminus B; Z) \longrightarrow H_*(X, A; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Grad}$.

Beweisskizze. Sei $U := (X \setminus B, A)$; wegen $\overline{B} \subset A^\circ$ ist U eine starke Überdeckung von X. Dann ist

$$\begin{aligned} C^U(X, A; Z) &= \frac{Z \otimes_{\mathbb{Z}} C^U(X)}{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im}(C^{U\cap A}(A) \hookrightarrow C^U(X))} \\ &= \frac{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \big(C(X \setminus B) + C(A)\big)}{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im}(C(A \setminus B) + C(A) \hookrightarrow C(X \setminus B) + C(A))} \\ &\cong \frac{Z \otimes_{\mathbb{Z}} C(X \setminus B)}{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im}(C(A \setminus B) \hookrightarrow C(X \setminus B))} \\ &= C(X \setminus B, A \setminus B; Z), \end{aligned}$$

wobei das Inverse dieses Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Ch}$ von der Inklusion induziert wird; dabei haben wir verwendet, dass $C(A) \cap C(X \setminus B) = C(A \setminus B)$ ist. Mit Korollar 4.37 folgt somit die Behauptung. □

4.5. Singuläre Homologie als gewöhnliche Homologietheorie

Wir fassen nun die bisherigen Ergebnisse nochmal zusammen:

Satz 4.39 (singuläre Homologie als gewöhnliche Homologietheorie)**.** *Sei R ein Ring und sei $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann ist singuläre Homologie*

$$\big(H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

zusammen mit den Verbindungshomomorphismen

$$\big(\partial_k\colon H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) \Longrightarrow H_{k-1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) \circ U\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

aus Satz 4.20 (wobei U der Unterraumfunktor aus Definition 3.1 ist) eine additive gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Koeffizienten (isomorph zu) Z.

Beweis. Die einzelnen Teile haben wir an den folgenden Stellen bewiesen:

– Funktorialität: (Proposition und) Definition 4.6, 4.9, 4.11
– Konstruktion der Verbindungshomomorphismen und ihre Natürlichkeit: Satz 4.20
– Homotopieinvarianz: Satz 4.21
– lange exakte Paarsequenz: Satz 4.20
– Ausschneidung: Korollar 4.38
– Dimensionsaxiom und Berechnung der Koeffizienten: Beispiel 4.15
– Additivität: Propositon 4.17 □

Als Konsequenz erhalten wir somit die folgenden Ergebnisse:
– Insbesondere existiert eine additive gewöhnliche Homologietheorie mit vorgegebenen Koeffizienten.
– Berechnung singulärer Homologie von Sphären und Abbildungsgrade für Selbstabbildungen von Sphären
(Korollar 3.18 und 3.20)
– Insbesondere sind Sphären *nicht* kontraktibel.
– Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren
(Satz 1.59 und Korollar 3.24)
– Invarianz der Dimension I und II
(Korollar 1.60, Korollar 3.19)
– Satz vom Igel
(Satz 1.65)
– Fundamentalsatz der Algebra
(Bonusaufgabe von Blatt 4; dasselbe Argument funktioniert auch mit Homologie statt π_1)
– Brouwerscher Fixpunktsatz
(Korollar 1.61)
– Existenz von Nash-Gleichgewichten
(Bonusaufgabe von Blatt 3)
– Alle aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen abgeleiteten Aussagen treffen auch auf singuläre Homologie zu (z.B. Mayer-Vietoris-Sequenz, ...)
(Kapitel 3)

Wir können nun auch bestätigen, dass unsere ursprüngliche Idee zur Konstruktion singulärer Homologie in Kapitel 4.1 korrekt umgesetzt ist:

Beispiel 4.40 (singuläre Homologie von Sphären, explizit)**.** Sei R ein Ring mit Eins.
– Eine sorgfältige induktive Analyse zeigt zusammen mit den Berechnungen aus Korollar 3.18: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt:
  – Es ist $1 \cdot \mathrm{id}_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n; R)$ eine singuläre Kette, deren zugehörige relative Homologieklasse von $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong_{\mathsf{Top}^2} (D^n, S^{n-1})$ den Modul

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong H_n(D^n, S^{n-1}; R) \cong R$$

  erzeugt.
  – Es ist $1 \cdot \partial_n \mathrm{id}_{\Delta^n} \in C_{n-1}(\partial\Delta^n; R)$ ein Zykel (Abbildung (4.41)), dessen Homologieklasse

$$H_{n-1}(\partial\Delta^n; R) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; R) \cong R$$

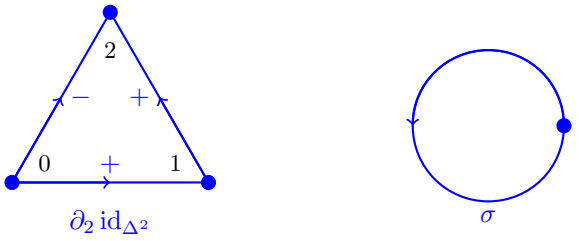


Abbildung (4.41): Der 1-Zykel $\partial_2 \operatorname{id}_{\Delta^2}$ erkennt das Loch in $\partial\Delta^2$; ebenso auch der Zykel σ für $S^1 \cong \partial\Delta^2$

erzeugt.

- Insbesondere liefert dies auch explizite, geometrische Erzeuger für $H_{n-1}(S^{n-1}; R)$ und $H_n(D^n, S^{n-1}; R)$.
- Sei

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Delta^1 &\longrightarrow S^1 \\ (1-t, t) &\longmapsto e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot t}. \end{aligned}$$

  Dann erzeugt $[1 \cdot \sigma]$ die Homologie $H_1(S^1; R) \cong R$, da man leicht eine explizite singuläre 2-Kette konstruieren kann, deren Rand $\sigma -$ „$\partial_2 \operatorname{id}_{\Delta^2}$“ ist (und diese Zykel somit dieselbe Homologieklasse repräsentieren).

Beispiel 4.42 (singuläre Homologie des Torus, explizit)**.** Geht man durch die Berechnung gewöhnlicher Homologie des Torus $S^1 \times S^1$ mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in Beispiel 3.28 und kombiniert dies mit dem obigen Beispiel 4.40, so sieht man (wobei die Notation in Abbildung (4.43) eingeführt wird):

- Die Klassen $[\sigma_a]$ und $[\sigma_b]$ in $H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ bilden eine Basis von $H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
- Es ist $\tau_1 - \tau_0 \in C_2(S^1 \times S^1)$ ein Zykel und die Klasse $[\tau_1 - \tau_0]$ erzeugt $H_2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Außerdem können wir nun mithilfe von singulärer Homologie die folgende Version des Jordanschen Kurvensatzes beweisen:

Satz 4.44 (Jordanscher Kurvensatz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$.*

1. *Ist $f\colon D^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so ist $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ wegzusammenhängend.*

1'. *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu D^n, so ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ wegzusammenhängend.*

2 *Ist $f\colon S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so besitzt $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.*

2' *Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1}, so besitzt $\mathbb{R}^n \setminus S$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.*

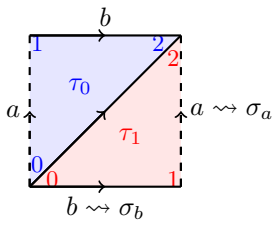


Abbildung (4.43): Singuläre Homologie des Torus, explizit

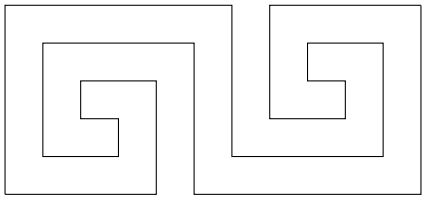


Abbildung (4.47): Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die zu S^1 homöomorph ist

Der Fall stetiger injektiver Abbildungen $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist der klassische Jordansche Kurvensatz; der Satz mag zunächst offensichtlich erscheinen, man bedenke aber, dass Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die zu S^1 homöomorph sind, durchaus „kompliziert aussehen“ können (Abbildung (4.47)).

Bemerkung 4.45. Mit etwas mehr Aufwand kann man folgende Verfeinerung des obigen Jordanschen Kurvensatzes zeigen: Ist $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und ist $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1}, so ist eine der beiden Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus S$ beschränkt, die andere unbeschränkt, und S ist der Rand der beiden Wegzusammenhangskomponenten.

Caveat 4.46 (gehörnte Alexander-Sphäre)**.** Ist $n \in \mathbb{N}_{>2}$ und ist $D \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu D^n, so ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ im allgemeinen *nicht* homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus D^n$; ein Beispiel für eine solche Situation in $\mathbb{R}^3$ ist die sogenannte *gehörnte Alexander-Sphäre* (Abbildung (4.49)). Im Fall $n = 2$ ist diese Aussage jedoch wahr – nach dem Satz von Jordan-Schönflies.

Um den Jordanschen Kurvensatz zu beweisen nutzen wir aus, dass $H_0(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ (und damit auch $\widetilde{H}_0(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$) die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten bestimmt (Satz 4.18). Wir verwenden dazu die folgende Berechnung (die auch mit anderen Koeffizienten gilt):

Lemma 4.48. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Ist $f\colon D^m \longrightarrow S^n$ stetig und injektiv, so gilt*

$$\widetilde{H}_k\big(S^n \setminus f(D^m);\mathbb{Z}\big) \cong 0$$

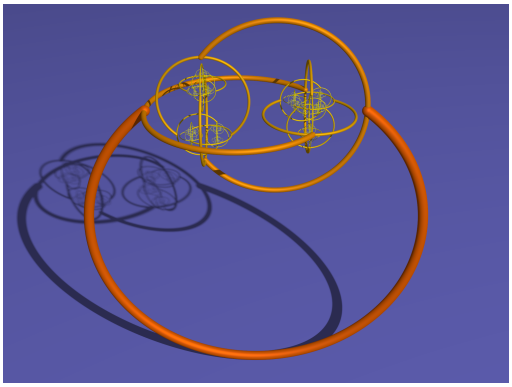


Abbildung (4.49): die gehörnte Alexander-Sphäre
(http://en.wikipedia.org/wiki/File:Alexander_horned_sphere.png)

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

2. *Ist* $m < n$ *und ist* $f\colon S^m \longrightarrow S^n$ *stetig und injektiv, so gilt*

$$\widetilde{H}_k\big(S^n \setminus f(S^m);\mathbb{Z}\big) \cong \widetilde{H}_k(S^{n-m-1};\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = n-m-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweisskizze. Zu 1: Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $m \in \mathbb{N}$ und verwenden $I^m := [0,1]^m \cong_{\mathsf{Top}} D^m$ statt D^m, weil das notationell etwas günstiger ist.

– *Induktionsanfang.* Im Fall $m = 0$ gilt

$$S^n \setminus f(D^0) \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n \simeq_{\mathsf{Top}} \bullet,$$

woraus die Behauptung in diesem Fall folgt.

– *Indukionsschritt.* Sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und die Behauptung für $m-1$ bereits bewiesen; dann gilt sie auch für m, denn:
Sei $f\colon I^m \longrightarrow S^n$ stetig und injektiv und $k \in \mathbb{Z}$. *Angenommen,* es gibt ein $\alpha \in \widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^m);\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$; insbesondere ist dann $k \geq 0$. Wir betrachten

$$U := S^n \setminus f\big(I^{m-1} \times [0,1/2]\big)$$
$$V := S^n \setminus f\big(I^{m-1} \times [1/2,1]\big).$$

Dann ist $U \cap V = S^n \setminus f(I^m)$ und $U \cup V = S^n \setminus f(I^{m-1} \times \{1/2\})$ und die Voraussetzungen für die Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 3.26) sind erfüllt. Da f injektiv ist und $I^m \not\cong_{\mathsf{Top}} S^n$ ist, ist dabei insbesondere $U \cap V$ nicht leer, und wir erhalten daher eine Mayer-Vietoris-Sequenz für reduzierte singuläre Homologie (Bemerkung 3.7). Diese liefert zusammen mit der Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $U \cup V$), dass

– das Bild von α in $\widetilde{H}_k(U;\mathbb{Z})$ nicht 0 ist
– oder dass das Bild von α in $\widetilde{H}_k(V;\mathbb{Z})$ nicht 0 ist.

Induktiv erhalten wir so eine Folge $[0,1] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$ von Intervallen, deren Durchschnitt nur einen Punkt t enthält und so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ das Bild von α in $\widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^{m-1} \times I_j;\mathbb{Z})$ nicht 0 ist. Andererseits ist

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} S^n \setminus f(I^{m-1} \times I_j) = S^n \setminus f\big(I^{m-1} \times \{t\}\big)$$

und

$$\widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^{m-1} \times \{t\});\mathbb{Z}) \cong 0$$

nach Induktionsvoraussetzung. Dies widerspricht jedoch dem Verhalten von singulärer Homologie unter aufsteigenden Vereinigungen (Proposition 4.50). Also ist $\widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^m);\mathbb{Z}) \cong 0$.

Zu 2: Auch den zweiten Teil zeigen wir induktiv über $m \in \{0,\dots,n-1\}$:

– *Induktionsanfang.* Im Fall $m = 0 < n$ ist

$$S^n \setminus f(S^0) \cong_{\mathsf{Top}} S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq_{\mathsf{Top}} S^{n-1},$$

woraus die Behauptung in diesem Fall folgt.

– *Induktionsschritt.* Sei nun $m \in \{1,\dots,n-1\}$ und die Behauptung für $m-1$ bereits bewiesen; dann gilt sie auch für m, denn:
Wir betrachten die Zerlegung

$$S^m = D^m_+ \cup D^m_-$$

in die obere bzw. untere Hemisphäre; man beachte dabei, dass $D^m_+ \cong_{\mathsf{Top}} D^m \cong_{\mathsf{Top}} D^m_-$ und dass $D^m_+ \cap D^m_- = S^{m-1} \subset S^m$ ist. Sei

$$\begin{aligned} U &:= S^n \setminus f(D^m_+) \\ V &:= S^n \setminus f(D^m_-). \end{aligned}$$

Dann ist $U \cap V = S^n \setminus f(S^m)$ und $U \cup V = S^n \setminus f(S^{m-1})$; da f injektiv, da $m < n$ und $S^m \ncong_{\mathsf{Top}} S^n$ ist, ist $U \cap V \neq \emptyset$. Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 3.26) für reduzierte singuläre Homologie zusammen mit dem ersten Teil (angewendet auf U bzw. V) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned} \widetilde{H}_k\big(S^n \setminus f(S^m);\mathbb{Z}\big) &\cong \widetilde{H}_k(U \cap V;\mathbb{Z}) \\ &\cong \widetilde{H}_{k+1}(U \cup V;\mathbb{Z}) \\ &\cong \widetilde{H}_{k+1}\big(S^n \setminus f(S^{m-1});\mathbb{Z}\big) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit die Behauptung. □

Im Beweis haben wir folgendes verwendet (für reduzierte singuläre Homologie):

Proposition 4.50 (singuläre Homologie und aufsteigende Vereinigungen)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei Z ein Links-R-Modul. Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen von X mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^\circ = X$. Dann gilt: Die Inklusionen $(X_n \hookrightarrow X)_{n\in\mathbb{N}}$ induzieren für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z) \longrightarrow H_k(X; Z).$$

Dabei ist

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z) := \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z)\Big) \Big/ \sim,$$

wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation ist, die von

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{m\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad \forall_{\alpha\in H_k(X_n;Z)} \quad \alpha \sim H_k(i_{n,m})(\alpha) \in H_k(X_m; Z)$$

erzeugt wird, wobei $i_{n,m}\colon X_n \longrightarrow X_m$ die entsprechende Inklusion bezeichnet.

Beweisskizze. Dies ist ein einfaches Kompaktheitsargument. □

Beweisskizze (des Jordanschen Kurvensatzes (Satz 4.44)). Offenbar sind 1' und 2' direkte Konsequenze von 1 bzw. 2. Wir zeigen daher nur die Teile 1 und 2.

Wir beginnen mit dem ersten Teil: Ist $f\colon D^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so ist $f(D^n)$ kompakt; betrachten wir die stetige und injektive Abbildung

$$\overline{f}\colon D^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \text{„}\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}\text{“} \cong_{\mathsf{Top}} S^n,$$

so haben also $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ und $S^n \setminus \overline{f}(D^n)$ dieselbe Anzahl an Wegzusammenhangskomponenten. Mit Lemma 4.48 und der Berechnung von singulärer Homologie in Grad 0 (Satz 4.18) folgt somit, dass $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ genau

$$\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} H_0\big(S^n \setminus \overline{f}(D^n); \mathbb{Z}\big) = \operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} \widetilde{H}_0\big(S^n \setminus \overline{f}(D^n); \mathbb{Z}\big) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Wegzusammenhangskomponenten besitzt.

Der zweite Teil folgt analog aus der Tatsache, dass nach Lemma 4.48

$$\operatorname{rk}_{\mathbb{Z}} \widetilde{H}_0\big(S^n \setminus \overline{f}(S^{n-1}); \mathbb{Z}\big) = 1$$

für alle stetigen und injektiven Abbildungen $\overline{f}\colon S^{n-1} \longrightarrow S^n$ gilt. □

Aus dem Jordanschen Kurvensatz erhalten wir unter anderem:

Korollar 4.51 (Gebietsinvarianz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweisskizze. Dies folgt mit einer geeigneten lokalen Betrachtung (da mit jedem $x \in U$ auch ein kleiner Ball um x in U enthalten ist) und grundlegenden Eigenschaften von (Weg)Zusammenhang in $\mathbb{R}^n$ aus dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 4.44). □

Korollar 4.52 (Nicht-Einbettbarkeit)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Es gibt keine stetige und injektive Abbildung $S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*
2. *Ist $m \in \mathbb{N}_{>n}$, so gibt es keine stetige und injektive Abbildung $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt wegen $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m$ aus dem ersten Teil.

Wir zeigen nun den ersten Teil: Ohne Einschränkung sei $n > 0$. *Angenommen,* es gibt eine injektive und stetige Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist die Komposition

$$\overline{f}\colon S^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

stetig und injektiv; nach dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 4.44) hat $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{f}(S^n)$ somit genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Andererseits sieht man der Konstruktion von $\overline{f}$ jedoch an, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{f}(S^n)$ wegzusammenhängend ist (indem man die hinzugefügte Koordinate nutzt), was ein Widerspruch ist. Also gibt es keine stetige und injektive Abbildung $S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. □

Was zeichnet singuläre Homologie gegenüber anderen Konstruktionen von gewöhnlicher Homologie aus?

- Die Konstruktion singulärer Homologie ist sehr geometrisch und trotzdem flexibel genug um alle wesentlichen Aspekte mit naheliegenden Argumenten diskutieren zu können.
- Singulärer Homologie trägt in offensichtlicher Weise eine zusätzliche Struktur, die sogenannte ℓ^1-Halbnorm. Diese ermöglicht ein interessantes Zusammenspiel mit Starrheitsaussagen aus der riemannschen Geometrie. Man beachte, dass diese Zusatzstruktur nur sehr schwer auf anderen, moderneren, Konstruktionen von singulärer Homologie zu erkennen ist.

4.6. Singuläre Homologie und Homotopiegruppen

Wir werden im folgenden singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten mit Homotopiegruppen vergleichen. Dazu verwenden wir den Hurewicz-Homomorphismus aus Bemerkung 3.23. Wir geben zunächst eine konkrete Beschreibung des Hurewicz-Homomorphismus in singulärer Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten:

Definition 4.53 (Hurewicz-Homomorphismus in singulärer Homologie)**.** Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus*

$$h_{\,\cdot\,,k}\colon \pi_k \Longrightarrow H_k(\,\cdot\,;\mathbb{Z}) \circ P$$

(wobei $P\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der den Basispunkt durch den leeren Unterraum ersetzt) *im Grad k* gegeben durch: Für jeden punktierten topologischen Raum (X, x_0) sei

$$\begin{aligned} h_{(X,x_0),k}\colon \pi_k(X,x_0) &\longrightarrow H_k(X;\mathbb{Z}) \\ [f]_* &\longmapsto H_k(f;\mathbb{Z})\big([S^k]\big); \end{aligned}$$

dabei ist $[S^k] \in H_k(S^k;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ der Erzeuger, der dem Element $[\partial_{k+1}\,\mathrm{id}_{\Delta^{k+1}}] \in H_k(\partial\Delta^k;\mathbb{Z})$ entspricht (Beispiel 4.40).

Beispiel 4.54.
- Im Grad 1 ist der Hurewicz-Homomorphismus im allgemeinen *kein* Isomorphismus, denn $H_1(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ ist abelsch, aber $\pi_1(\,\cdot\,)$ ist im allgemeinen *nicht* abelsch.
- Auch in höheren Graden ist der Hurewicz-Homomorphismus im allgemeinen *kein* Isomorphismus.

Der Satz von Hurewicz besagt jedoch, dass der Hurewicz-Homomorphismus für gewisse topologische Räume für gewisse Grade ein Isomorphismus ist. Bevor wir den Satz formulieren, führen wir zwei Begriffe ein – höhere Zusammenhangsbegriffe und die Abelianisierung von Gruppen:

Definition 4.55 (höhere Zusammenhangsbegriffe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein punktierter topologischer Raum (X, x_0) heißt *n-zusammenhängend*, falls

$$\forall_{k\in\{0,\dots,n\}} \quad \pi_k(X, x_0) \cong 0$$

ist.

Beispiel 4.56.
- Wegzusammenhang punktierter topologischer Räume entspricht 0-Zusammenhang.
- Einfach zusammenhängend entspricht 1-zusammenhängend.

Proposition und Definition 4.57 (Abelianisierung)**.**
1. *Sei G eine Gruppe. Die* Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ *von G ist die von*

$$\{g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} \mid g, h \in G\} \subset G$$

erzeugte Untergruppe von G. Die Kommutatoruntergruppe $[G, G]$ von G ist ein Normalteiler und die Quotientengruppe

$$G_{\mathrm{ab}} := G/[G, G]$$

ist abelsch. Die Gruppe G_{ab} heißt Abelianisierung[8] von G.
2. *Ist $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist*

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{ab}}\colon G_{\mathrm{ab}} &\longrightarrow H_{\mathrm{ab}} \\ [g] &\longmapsto \big[f(g)\big] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Dadurch wird

$$\cdot_{\mathrm{ab}}\colon \mathsf{Group} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$$

zu einem Funktor.

Beweisskizze. All diese Eigenschaften folgen durch einfache Rechnungen aus den Definitionen. □

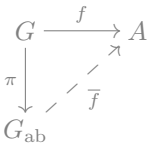
[8] Oder „Abelisierung“ oder „Abelung“ (und entsprechend „abeln“) ...

Außerdem besitzt die Abelianisierung eine alternative Charakterisierung über eine universelle Eigenschaft:

Proposition 4.58 (alternative Charakterisierung der Abelianisierung)**.** *Sei G eine Gruppe.*

1. *Dann ist $[G,G] \subset G$ der bezüglich Inklusion kleinste Normalteiler N mit der Eigenschaft, dass der Quotient G/N abelsch ist.*
2. *Die kanonische Projektion $\pi\colon G \longrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ besitzt die folgende universelle Eigenschaft: Die Gruppe G_{ab} ist abelsch und für alle abelschen Gruppen A und alle Gruppenhomomorphismen $f\colon G \longrightarrow A$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{f}\colon G_{\mathrm{ab}} \longrightarrow A$ mit*

$$\overline{f} \circ \pi = f.$$



Dadurch ist die Abelianisierung $\pi\colon G \longrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

Beweisskizze. Auch dies lässt sich mit einfachen Rechnungen anhand der Definitionen nachvollziehen. □

Beispiel 4.59.

- Ist G eine abelsche Gruppe, so ist die kanonische Projektion $G \longrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ ein Isomorphismus.
- Mithilfe der universellen Eigenschaft von freien Erzeugendensystemen von Gruppen bzw. Basen von $\mathbb{Z}$-Moduln sieht man leicht, dass $(F_2)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^2$ ist.
- Ist $n \in \mathbb{N}_{>1}$, so induziert die Signumsabbildung $S^n \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ einen Isomorphismus $(S_n)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2$.

Nun können wir den Satz von Hurewicz formulieren:

Satz 4.60 (Satz von Hurewicz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei (X, x_0) ein $(n-1)$-zusammenhängender punktierter topologischer Raum.*

1. *Ist $n = 1$, so induziert $h_{(X,x_0),1}\colon \pi_1(X,x_0) \longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z})$ einen natürlichen Isomorphismus*
$$\pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}} \cong_{\mathbb{Z}} H_1(X;\mathbb{Z}).$$
2. *Ist $n > 1$, so ist*
$$H_k(X;\mathbb{Z}) \cong 0 \cong \pi_k(X,x_0)$$
für alle $k \in \{1,\dots,n-1\}$ und $h_{(X,x_0),n}\colon \pi_n(X,x_0) \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$ ist ein natürlicher $\mathbb{Z}$-Isomorphismus.

Beweisskizze. Als ersten Schritt ersetzen wir den singulären Kettenkomplex $C(X)$ durch einen Unterkomplex, in dem nur spezielle singuläre Simplizes erlaubt sind: Zu $k \in \mathbb{N}$ sei

$$S_k := \big\{\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X) \;\big|\; \text{für alle Seiten } \Delta \subset \Delta^k \text{ der Dimension} \leq n-1 \text{ ist } \sigma|_\Delta = x_0\big\}.$$

Sei $C^{x_0,n}(X) \subset C(X)$ der Unterkettenkomplex, der für $k \in \mathbb{N}$ im Grad k von S_k (statt $\operatorname{map}(\Delta^k, X)$) erzeugt wird. Insbesondere kann man die Elemente von S_n wegen $\Delta^n/\partial\Delta^n \cong S^n$ auch als stetige Abbildungen $(S^n, e_1^{n+1}) \longrightarrow (X, x_0)$ auffassen. Dies macht bereits den Zusammenhang mit den Homotopiegruppen von (X, x_0) deutlich.

Da (X, x_0) ein $(n-1)$-zusammenhängender Raum ist, können wir induktiv kompatible Homotopien wie in Lemma 4.61 konstruieren.

Lemma 4.61 (induktive Homotopien)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k \subset \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ eine Teilmenge; dabei gelte $\sigma \circ i_{k,j} \in S_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $\sigma \in S_k$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$. Außerdem gebe es eine Familie $(h_\sigma \colon \Delta^k \times [0,1] \longrightarrow X)_{k \in \mathbb{N}, \sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)}$ stetiger Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:*

- *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ ist h_σ eine Homotopie von σ zu einem singulären Simplex in S_k.*
- *Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$ gilt*

$$h_{\sigma \circ i_{k,j}} = h_\sigma \circ (i_{k,j} \times \mathrm{id}_{[0,1]}).$$

- *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in S_k$ ist*

$$h_\sigma = \big((x,t) \mapsto \sigma(x)\big).$$

Sei $C^S(X) \subset C(X)$ der Unterkettenkomplex abelscher Gruppen, der in jedem Grad $k \in \mathbb{N}$ von S_k statt von $\operatorname{map}(\Delta^k, X)$ erzeugt wird.

Dann ist die Inklusion $C^S(X) \hookrightarrow C(X)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ und induziert somit einen Isomorphismus $H_*\big(C^S(X)\big) \longrightarrow H_*(X)$.

Beweisskizze von Lemma 4.61. Dies folgt ähnlich wie im Beweis der Homotopieinvarianz (Satz 4.21) von singulärer Homologie durch Zerlegung von Prismen. □

Wir fahren nun mit dem Beweis von Satz 4.60 fort. Aus dem Lemma folgt, dass die Inklusion

$$C^{x_0,n}(X) \hookrightarrow C(X)$$

eine Kettenhomotopieäquivalenz ist.

Nach Konstruktion stimmt $C^{x_0,n}(X)$ bis zum Grad $n-1$ mit $C(\{x_0\})$ überein und auch die Mengen der Ränder im Grad $n-1$ stimmen überein. Also gilt für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$H_k(X; \mathbb{Z}) \cong H_k\big(C^{x_0,n}(X)\big) = H_k\big(\{x_0\}; \mathbb{Z}\big) \cong 0.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass

$$h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}} \colon \pi_n(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \longrightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus ist: Dazu konstruieren wir zunächst einen „inversen“ Homomorphismus $\overline{\varphi}\colon H_n(C^{x_0,n}(X)) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$: Sei

$$\begin{aligned}\varphi\colon S_n &\longrightarrow \pi_n(X,x_0)\\ \sigma &\longmapsto [f_\sigma]_*,\end{aligned}$$

wobei $f_\sigma\colon (S^n, e_1^{n+1}) \longrightarrow (X,x_0)$ unter der kanonischen Identifikation $S^n \cong_{\mathsf{Top}} \partial\Delta^{n+1}$ der Abbildung entspricht, die auf der 0-ten Seite σ ist, und sonst überall konstant x_0 ist (dies ist möglich, da $\sigma \in S_n$ auf $\partial\Delta^n$ konstant x_0 ist). Daraus erhalten wir einen Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi}\colon C_n^{x_0,n}(X) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Mithilfe der Definition der Verknüpfung auf $\pi_n(X,x_0)$ sieht man, dass (in $\pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$)

$$\sum_{j=0}^{n+1}(-1)^j \cdot [f_{\sigma\circ i_{n+1,j}}]_{*,\mathrm{ab}} = 0$$

für alle $\sigma \in S_{n+1}$ gilt. Also induziert $\widetilde{\varphi}$ einen Homomorphismus

$$\overline{\varphi}\colon H_n\big(C^{x_0,n}(X)\big) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Man beachte dabei, dass nach Konstrukion

$$h_{(X,x_0),n}([f_\sigma]_*) = \big[\sigma + (1+(-1)^n)\cdot \mathrm{const}_{x_0}\big]$$

in $H_n(X;\mathbb{Z})$ für alle $\sigma \in S_n$ gilt. Damit lässt sich leicht nachrechnen, dass $h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}}$ ein Isomorphismus ist. □

Zum Beispiel kann man mithilfe des Satzes von Hurewicz die (niedrigen) Homotopiegruppen $\pi_k(S^n, e_1^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \{2,\dots,n\}$ berechnen.

Bemerkung 4.62 (Darstellungssätze von Brown)**.** Es gibt noch einen weiteren wichtigen Zusammenhang zwischen Homologietheorien und Homotopiegruppen: die Darstellungssätze von Brown. Diese beschreiben wie man Homologietheorien aus Homotopiegruppen geeigneter Objekte konstruieren kann.

5. Zelluläre Homologie

Da der singuläre Kettenkomplex sehr „groß“ ist, ist es im allgemeinen schwierig, konkret damit zu rechnen. Wir suchen daher geeignete „kleinere“ Kettenkomplexe zur Berechnung singulärer Homologie. Klassische Beispiele dafür sind:

- simpliziale Homologie für simpliziale Komplexe; mit simplizialen Komplexen lässt sich gut maschinell rechnen, aber simpliziale Komplexe sind manchmal nicht flexibel genug, um bequem damit zu arbeiten.[9]
- zelluläre Homologie für CW-Komplexe; dies ist eine etwas flexiblere Variante, die für Modellierung und Berechnung gut geeignet sind.

Wir werden in diesem Kapitel die folgenden Aspekte behandeln:

- CW-Komplexe
- zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie
- Vergleich von zellulärer Homologie und singulärer Homologie
- Euler-Charakteristik und ihre Anwendungen

5.1. CW-Komplexe

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in CW-Komplexe. Bei CW-Komplexen handelt es sich um topologische Räume, die induktiv aus einfachen, flexiblen Bausteinen, sogenannten Zellen, zusammengesetzt sind:

Definition 5.1 ((relativer) CW-Komplex)**.**

- Sei (X, A) ein Raumpaar. Eine *relative CW-Struktur auf* (X, A) ist eine Folge

$$A =: X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$$

von Unterräumen mit den folgenden Eigenschaften:

- Es ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
- Die Topologie auf X stimmt mit der Kolimestopologie des Systems $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots$ überein (d.h. eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ gilt, dass $U \cap X_n$ in X_n offen ist).
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ entsteht X_n aus X_{n-1} durch Ankleben von n-dimensionalen Zellen, d.h. es existiert eine Menge I_n und ein Pushout der Form

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{I_n} S^{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \text{Inklusion}\downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{I_n} D^n & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

in Top; wir verwenden dabei die Konvention $S^{-1} := \emptyset$. Man nennt X_n auch das *n-Skelett von X*. (Die Anzahl $|I_n|$ ist die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von $X_n \setminus X_{n-1}$, aber die Wahl der Pushouts ist *nicht* Teil der Struktur.)

[9] s. Seminar „Simplicial Topology“ im WS 2015/16

– Ein *relativer CW-Komplex* ist ein Raumpaar (X, A) zusammen mit einer relativen CW-Struktur auf (X, A). Ist $A = \emptyset$, so spricht man auch von einem *CW-Komplex*.
– Ist (X, A) ein relativer CW-Komplex und ist $n \in \mathbb{N}$, so sind die Wegzusammenhangskomponenten von $X_n \setminus X_{n-1}$ homöomorph zu $D^{n\circ}$ und werden *offene n-Zellen von* (X, A) genannt.
– Ist (X, A) ein relativer CW-Komplex, so ist die *Dimension von* (X, A) definiert durch

$$\dim(X, A) := \min\big\{n \in \mathbb{N} \;\big|\; \forall_{m\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad X_m = X_n\big\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

– Ein (relativer) CW-Komplex ist *endlich*, wenn er aus nur endlich viele Zellen besteht. Ein (relativer) CW-Komplex ist *von endlichem Typ*, wenn er in jeder Dimension nur endlich viele Zellen hat.

Caveat 5.2 (Existenz und Eindeutigkeit von CW-Strukturen?!)**.**
– *Nicht* jeder topologische Raum ist zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent! (Zum Beispiel trifft dies auf den Warschauer Kreis zu; uns fehlen aber im Moment die Mittel, um dies nachzuweisen.)
– In der Notation erwähnt man im Normalfall die gewählte CW-Struktur eines (relativen) CW-Komplexes nicht explizit. Da es jedoch im allgemeinen viele mögliche CW-Strukturen auf einem Raumpaar geben kann, kann dies zu Missverständnissen führen. Die Tatsache, dass auf Raumpaaren verschiedene CW-Strukturen existieren können, ist jedoch wichtig – man kann daher für jedes Problem versuchen, eine entsprechende, passende CW-Struktur auszuwählen (z.B. eine mit möglichst wenigen Zellen oder eine, die „symmetrisch“ ist . . .).

Wir beginnen mit dem Modellfall des grundlegenden Bausteins von CW-Komplexen:

Beispiel 5.3 (CW-Struktur auf (D^n, S^{n-1}))**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist durch

$$\begin{aligned} X_{n-1} := X_{n-2} := \cdots := X_{-1} &:= S^{n-1} \\ \forall_{k\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad X_k &:= D^n \end{aligned}$$

eine relative CW-Struktur auf (D^n, S^{n-1}) definiert. Ein Pushout für den Übergang vom $(n-1)$-Skelett zum n-Skelett ist zum Beispiel (wobei die vertikalen Abbildungen die Inklusionen sind)

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{S^{n-1}}} & X_{n-1} = S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow[\mathrm{id}_{D^n}]{} & X_n = D^n. \end{array}$$

Beispiel 5.4 (CW-Strukturen)**.** Beispiele für CW-Strukturen auf dem Kreis, der zweidimensionalen Sphäre, auf dem zweidimensionalen Torus und auf $\mathbb{R}P^2$ sind in Abbildung (5.5) skizziert.

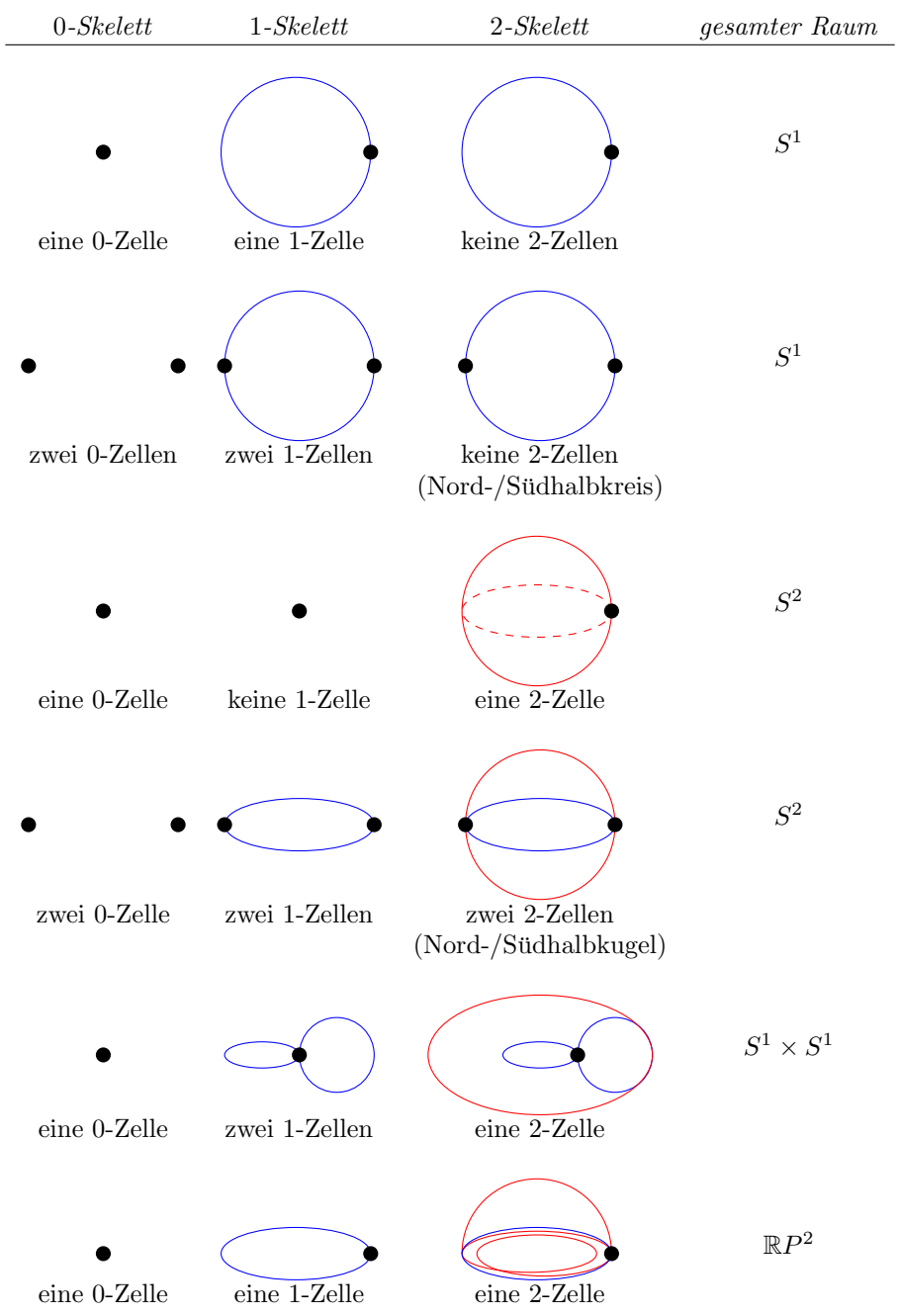


Abbildung (5.5): Beispiele für CW-Strukturen

Als nächsten Schritt führen wir einen geeigneten Morphismenbegriff für CW-Komplexe ein:

Definition 5.6 (zelluläre Abbildung)**.** Seien (X, A) und (Y, B) relative CW-Komplexe. Eine *zelluläre Abbildung* $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} \quad f(X_n) \subset Y_n$$

(wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ bzw. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ die relativen CW-Strukturen auf (X, A) bzw. (Y, B) sind).

Beispiel 5.7. Wir betrachten S^1 mit den ersten beiden CW-Strukturen aus Abbildung (5.5).

- Dann ist die Spiegelung $S^1 \longrightarrow S^1$ an der horizontalen Koordinatenachse eine zelluläre Abbildung, sowohl bezüglich der ersten CW-Struktur als auch bezüglich der zweiten CW-Struktur.
- Die Spiegelung $S^1 \longrightarrow S^1$ an der vertikalen Koordinatenachse ist bezüglich der ersten CW-Struktur *keine* zelluläre Abbildung (aber bezüglich der zweiten).

Dies liefert Kategorien von CW-Komplexen:

Definition 5.8 (Kategorien von CW-Komplexen)**.**

- Sei CW die Kategorie, die wie folgt gegeben ist:
  - Objekte: Die Klasse der Objekte ist die Klasse aller CW-Komplexe.
  - Morphismen: Die Morphismenmenge zwischen je zwei CW-Komplexen ist die Menge der zellulären Abbildungen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.
- Sei CW^2 die Kategorie, die wie folgt gegeben ist:
  - Objekte: Die Klasse der Objekte ist die Klasse aller relativen CW-Komplexe.
  - Morphismen: Die Morphismenmenge zwischen je zwei relativen CW-Komplexen ist die Menge der zellulären Abbildungen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Außerdem möchten wir einen zellulären Homotopiebegriff einführen. Dazu geben wir zunächst ein zelluläres Modell des Intervalls bzw. von Zylindern:

Beispiel 5.9 (CW-Struktur auf dem Einheitsintervall)**.** Im folgenden betrachten wir die CW-Struktur

$$\emptyset \subset \{0, 1\} \subset [0, 1] \subset [0, 1] \subset \cdots \subset [0, 1]$$

auf $[0, 1]$ (Abbildung (5.10)).

Proposition 5.11 (CW-Struktur auf dem Zylinder)**.** *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Dann ist $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ mit*

$$\begin{aligned} X'_{-1} &:= A \times [0, 1] \\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad X'_n &:= \big(X_n \times \{0, 1\}\big) \cup \big(X_{n-1} \times [0, 1]\big) \end{aligned}$$

eine relative CW-Struktur auf $(X \times [0, 1], A \times [0, 1])$.

Abbildung (5.10): Eine CW-Struktur auf $[0,1]$

Beweisskizze. Wählt man Pushouts für die relative CW-Struktur auf (X, A), so kann man explizit entsprechende Pushouts für $(X \times [0,1], X \times [0,1])$ konstruieren. □

Caveat 5.12. Sind X und Y CW-Komplexe, so ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ mit $Z_{-1} := \emptyset$ und

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad Z_n := \bigcup_{k\in\{0,\dots,n\}} X_k \times Y_{n-k}$$

im allgemeinen *keine* CW-Struktur auf $X \times Y$.

Die CW-Struktur aus Proposition 5.11 gibt uns eine Möglichkeit, zelluläre Homotopie zu definieren:

Definition 5.13 (zellulär homotop)**.** Seien (X, A) und (Y, B) relative CW-Komplexe und seien $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ zelluläre Abbildungen. Wir nennen f und g *zellulär homotop*, wenn es eine zelluläre Abbildung $h\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ mit

$$h \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad h \circ i_1 = g$$

gibt. Dabei betrachten wir die relative CW-Struktur aus Proposition 5.11 auf dem Zylinder $(X \times [0,1], A \times [0,1])$ und $i_0, i_1\colon (X, A) \longrightarrow (X \times [0,1], A \times [0,1])$ bezeichnen die Inklusion von „Boden“ bzw. „Deckel“ des Zylinders.

Man kann leicht nachprüfen, dass dieser Homotopiebegriff die üblichen Vererbungseigenschaften erfüllt. Insbesondere erhalten wir so entsprechende Homotopiekategorien von CW-Komplexen:

Definition 5.14 (Homotopiekategorien von CW-Komplexen)**.**

- Die Kategorie CW_h ist wie folgt gegeben:
  - Objekte: Die Objekte von CW_h sind alle CW-Komplexe.
  - Morphismen: Morphismen zwischen CW-Komplexen sind zelluläre Homotopieklassen von zellulären Abbildungen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch repräsentantenweise Abbildungskomposition gegeben.
- Die Kategorie CW^2_h ist wie folgt gegeben:
  - Objekte: Die Objekte von CW^2_h sind alle relativen CW-Komplexe.
  - Morphismen: Morphismen zwischen relativen CW-Komplexen sind zelluläre Homotopieklassen von zellulären Abbildungen von relativen CW-Komplexen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch repräsentantenweise Abbildungskomposition gegeben.

5.2. Zelluläre Homologie

Wir wollen nun die zelluläre Struktur von CW-Komplexen nutzen, um Homologie geeignet berechnen zu können. Dazu führen wir zelluläre Homologie ein und vergleichen diese dann mit (gewöhnlichen) Homologietheorien.

Setup 5.15. Im folgenden sei R ein Ring und sei $h := \big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Wir geben zunächst die abstrakte Definition des zellulären Kettenkomplexes zu h an und erklären dann, wie man ihn (im Fall einer gewöhnlichen Homologietheorie) bequem von der zellulären Struktur ablesen kann.

Proposition und Definition 5.16 (zellulärer Kettenkomplex)**.** *Der Funktor*

$$C^h\colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$$

ist wie folgt definiert:

1. *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit relativer CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei*
$$C_n^h(X, A) := h_n(X_n, X_{n-1})$$
und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $C_n^h(X, A) := 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir $\partial_n^{h,(X,A)}$ durch
$$\begin{array}{ccccc} C_n^h(X,A) & = & h_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n^{(X_n,X_{n-1})}} & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_n^{h,(X,A)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_n^{(X_n,X_{n-1},X_{n-2})}} & & h_{n-1}(X_{n-1}) \\ C_{n-1}^h(X,A) & = & h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \xrightarrow{h_{n-1}(\text{Inklusion})} & \end{array}$$
Dann ist $C^h(X, A) := \big((C_n^h(X, A))_{n\in\mathbb{Z}}, (\partial_n^{h,(X,A)})_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ ein Kettenkomplex in ${}_R\mathsf{Ch}$, der zelluläre Kettenkomplex von (X, A) bezüglich h.
2. *Ist $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine zelluläre Abbildung relativer CW-Komplexe, so definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$*
$$C_n^h(f) := h_n(f|_{X_n})\colon C_n^h(X, A) = h_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow h_n(Y_n, Y_{n-1}) = C_n^h(Y, B)$$
und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ definieren wir $C_n^h(f) := 0$. Dann ist $C^h(f) := \big(C_n^h(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C^h(X, A) \longrightarrow C^h(Y, B)$.

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist

$$\partial_n^{h,(X,A)} \circ \partial_{n+1}^{h,(X,A)} = 0,$$

denn in dieser Komposition treten nach Definition zwei aufeinanderfolgende Terme der langen exakten Paarsequenz von (X_n, X_{n-1}) auf.

Der zweite Teil folgt aus der Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus der langen exakten Tripelsequenz (Proposition 3.8), welche eine Konsequenz der Funktorialität von h und der Natürlichkeit der Verbindungshomomorphismen $(\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist.

Dass C^h tatsächlich einen Funktor definiert, kann man leicht anhand der Definition nachvollziehen. □

Definition 5.17 (zelluläre Homologie)**.** Wir definieren *zelluläre Homologie bezüglich h* als den Funktor

$$H_*^h := H_* \circ C^h \colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$

Bemerkung 5.18 (zelluläre Homotopieinvarianz)**.** Da h_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ homotopieinvariant ist, ist der Funktor H_*^h in dem Sinne zellulär homotopieinvariant, dass er über den Homotopieklassenfunktor $\mathsf{CW}^2 \longrightarrow \mathsf{CW}^2_\mathsf{h}$ faktorisiert.

Die Definition des zellulären Kettenkomplexes mag zunächst kompliziert erscheinen; tatsächlich lässt er sich aber aus der CW-Struktur einfach explizit berechnen:

Beispiel 5.19 (zelluläre Homologie des Einheitsintervalls)**.** Wir betrachten die CW-Struktur auf $[0,1]$ aus Beispiel 5.9:

$$\emptyset \subset \{0,1\} \subset [0,1] = [0,1] = \cdots\,.$$

Sei h singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten. Mithilfe der konkreten Berechnung von $H_1([0,1],\{0,1\};\mathbb{Z}) \cong H_1(D^1,S^0;\mathbb{Z})$ (Beispiel 4.40) und der expliziten Beschreibung des Verbindungshomomorphismus in singulärer Homologie (Satz 4.20) folgt, dass $C^h([0,1)$ zum folgenden Kettenkomplex (in ${}_\mathbb{Z}\mathsf{Ch}$) isomorph ist:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\
\cdots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \cdots \\
 & & & & & & & x & \longmapsto & (-x,x) & & & & &
\end{array}$$

Dieser Kettenkomplex ist der Komplex I aus Definition E.25.

Es folgt

$$H_k^h\big([0,1]\big) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \end{cases} \cong H_k\big([0,1];\mathbb{Z}\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 5.20 (zelluläre Homologie von Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, der Einfachheit halber sei $n \geq 2$ und wir schreiben $Z := h_0(\bullet)$. Wir betrachten S^n mit der CW-Struktur

$$\emptyset \subset \{e_1^{n+1}\} = \{e_1^{n+1}\} = \cdots = \{e_1^{n+1}\} \subset S^n = S^n = \cdots\,,$$

die aus genau einer 0-Zelle und genau einer n-Zelle besteht (analog zum dritten Beispiel in Abbildung (5.5)). Mit Korollar 3.18 folgt dann, dass $C^h(S^n)$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ zum folgenden Kettenkomplex isomorph ist:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{Grad} & & & n+1 & & n & & n-1 & \cdots & 1 & & 0 & & -1 & \\
\cdots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Wegen $n \geq 2$ ist bei jedem der Randoperatoren von $C^h(S^n)$ der Start- oder Zielraum trivial. D.h. $\partial_k^{h,S^n} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere liefert dies

$$H_k^h(S^n) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Falls h eine gewöhnliche Homologietheorie ist, stimmt dies mit $h(S^n)$ überein (Korollar 3.18).

Diese beiden Beispiele legen nahe, dass zelluläre Kettenmoduln im wesentlichen durch die Anzahl der Zellen in der entsprechenden Dimension bestimmt sind. Wir werden dies nun präzise formulieren:

Bemerkung 5.21 (Homologie von angeklebten Zellen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei (Y, X) ein Raumpaar, für das es ein Pushout der Form

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_I S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_I D^n & \xrightarrow[\Phi]{} & Y \end{array}$$

in Top gibt (wobei die vertikalen Abbildungen die Inklusionen sind). Falls die Homologietheorie h *nicht* additiv ist, nehmen wir hierbei zusätzlich an, dass die Menge I endlich ist.

1. a) Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist $k \in \mathbb{Z}$, so ist die folgende Komposition ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$:

$$h_k(Y,X) \xleftarrow[h_k(\Phi)]{\cong} h_k\Big(\bigsqcup_I D^n, \bigsqcup_I S^{n-1}\Big) \xleftarrow[\bigoplus_I h_k(\mathrm{Inkl})]{\cong} \bigoplus_I h_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-1}\big(S^{n-1}, \{e_1^n\}\big) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-n}(\bullet)$$

   Der erste Isomorphismus ist dabei eine Konsequenz von Ausschneidung (nach Aufdicken von X), der zweite folgt aus Ausschneidung bzw. Additivität, den dritten erhält man aus der langen exakten Tripelsequenz des Tripels $(D^n, S^{n-1}, \{e_1^n\})$, und der letzte ist ein iterierter Einhänungsisomorphismus (Korollar 3.18).

   b) Im Fall $n = 0$ ist analog

$$h_k(Y,X) \xleftarrow[h_k(\Phi)]{\cong} h_k\Big(\bigsqcup_I D^n, \bigsqcup_I S^{n-1}\Big) \xleftarrow[\bigoplus_I h_k(\mathrm{Inkl})]{\cong} \bigoplus_I h_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_I h_k\big(\bullet, \emptyset\big) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-n}(\bullet)$$

   für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

2. a) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $X \neq \emptyset$. Der Standard-Homöomorphismus $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ induziert zusammen mit dem obigen Pushout einen Homöomorphismus

$$(Y/X, X/X) \cong_{\mathsf{Top}_*} \bigvee_I (S^n, e_1^n).$$

   Dann stimmt

$$h_k(Y,X) \xrightarrow[h_k(\text{Proj})]{} h_K(Y/X,\bullet) \xrightarrow[h_k(\text{s.o.})]{\cong} h_k\Big(\bigvee^I S^n, \{e_1^{n+1}\}\Big) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_I h_k\big(S^n,\{e_1^n\}\big) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-n}(\bullet)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit dem obigen Isomorphismus überein.

b) Ist $n = 0$, so induzieren $D^0 \longrightarrow \{-1\} \subset S^0$ und $X \longrightarrow \{1\} \subset S^0$ eine stetige Abbildung $Y/X \longrightarrow \bigvee^I S^0$; diese ist ein Homöomorphismus, wenn $X \neq \emptyset$ ist.

Proposition 5.22 (zellulärer Kettenkomplex, explizit)**.** *Sei h eine gewöhnliche Homologietheorie und sei $Z := h_0(\bullet)$. Sei (X,A) ein relativer CW-Komplex mit CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$; ist h* keine *additive Homologietheorie, so nehmen wir zusätzlich an, dass es sich dabei um einen CW-Komplex von endlichem Typ handelt. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein Pushout*

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{I_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi=\bigsqcup_{i\in I_n}\varphi_i} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{I_n} D^n & \xrightarrow[\Phi=\bigsqcup_{i\in I_n}\Phi_n]{} & X_n \end{array}$$

in Top *(wobei die vertikalen Abbildungen die Inklusionen sind).*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ liefern dann die Abbildungen aus Bemerkung 5.21 einen Isomorphismus*
$$C_n^h(X,A) \cong \bigoplus_{I_n} Z$$
und für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ ist $h_k(X_n, X_{n-1}) \cong 0$.
2. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zu $i \in I_n$ und $j \in I_{n-1}$ sei $f_{i,j}^{(n)}$ die Komposition*
$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_i} X_{n-1} \xrightarrow{\text{Proj}} X_{n-1}/X_{n-2} \longrightarrow \bigvee^{I_{n-1}} S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$
wobei die vorletzte Abbildung wie in Bemerkung 5.21 definiert ist und die letzte Abbildung die Projektion auf den j-ten Summanden ist.

   a) *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Dann entspricht $\partial_n^{h,(X,A)} \colon C_n^h(X,A) \longrightarrow C_{n-1}^h(X,A)$ unter den Isomorphismen aus dem ersten Teil der „Matrix“*
   $$F_n := \big((\sigma^{n-1})^{-1} \circ h_{n-1}(f_{i,j}^{(n)}) \circ \sigma^{n-1}\big)_{j\in I_{n-1}, i\in I_n} \in M_{I_{n-1}\times I_n}\big(\text{Hom}_R(Z,Z)\big),$$
   wobei $\sigma^{n-1} \colon Z = h_0(\bullet) \longrightarrow h_{n-1}(S^{n-1},\{e_1^n\}) \cong h_{n-1}(S^{n-1})$ den iterierten Einhängungsisomorphismus bezeichnet (Korollar 3.18).
   Insbesondere: Ist $Z \cong_{R\text{Mod}} R$, so können wir F_n als Matrix in $M_{I_{n-1}\times I_n}(R)$ auffassen und man nennt die Einträge dieser Matrix Inzidenzzahlen.

   b) *Der Randoperator $\partial_1^{h,(X,A)}$ entspricht analog der Matrix*
   $$F_1 := \big(d_{i,j}^{(1)} \cdot \text{id}_Z\big)_{j\in I_0, i\in I_1}$$

wobei

$$d_{i,j}^{(1)} := \begin{cases} 0 & \text{falls } f_{i,j}^{(1)}(1) = f_{i,j}^{(1)}(-1) \\ 1 & \text{falls } f_{i,j}^{(1)}(1) = -1 \neq f_{i,j}^{(1)}(-1) \\ -1 & \text{falls } f_{i,j}^{(1)}(1) = 1 \neq f_{i,j}^{(1)}(-1) \end{cases}$$

für alle $i \in I_n$, $j \in I_{n-1}$ ist.

Beweisskizze von Proposition 5.22. Der erste Teil ist eine direkte Konsequenz von Bemerkung 5.21.

Wir beweisen nun den zweiten Teil im Fall $n \in \mathbb{N}_{>1}$ (die Beschreibung für $\partial_1^{h,(X,A)}$ kann man analog zeigen). Dazu betrachten wir das Diagramm in Abbildung (5.23); da das Diagramm kommutiert und die obere bzw. untere Zeile nach Bemerkung 5.21 mit den Isomorphismen aus dem ersten Teil übereinstimmen, folgt daraus die behauptete Beschreibung für $\partial_n^{h,(X,A)}$. □

Bemerkung 5.24 (Inzidenzzahlen)**.** Wir verwenden die Notation aus Proposition 5.22. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} [S^{n-1}, S^{n-1}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f] &\longmapsto \deg_{H_{n-1}(\,\cdot\,;\mathbb{Z})} f \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Insbesondere können wir Inzidenzzahlen immer als ganze Zahlen auffassen.

Man kann die obigen Bijektion auch formulieren und beweisen, ohne singuläre Homologie zu verwenden. Daher kann man mithilfe von Korollar 3.20 den zellulären Kettenkomplex zu einer gewöhnlichen Homologietheorie (mit Ringkoeffizienten) aus den Koeffizienten direkt konstruieren (und damit auch zelluläre Homologie), indem man die Beschreibung des zellulären Kettenkomplexes aus Proposition 5.22 verwendet. Es ist jedoch technisch etwas aufwendig, die Konstruktion so zu modifizieren, dass sie nicht von der Wahl von Pushouts, sondern nur von relativen CW-Strukturen abhängt.

Man kann den zellulären Kettenkomplex also nach Proposition 5.22 berechnen, indem man

- Pushouts in allen Dimensionen wählt,
- die Anzahl der Zellen pro Dimension bestimmt,
- und dann untersucht, wie die anheftenden Abbildungen die Zellen an die Zellen niedrigerer Dimension ankleben.

Dies ist für ein einfaches Beispiel in Abbildung (5.25) illustriert.

Beispiel 5.26 (zelluläre Homologie reell-projektiver Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Induktiv kann man zeigen, dass

$$\emptyset \subset \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^n = \cdots$$

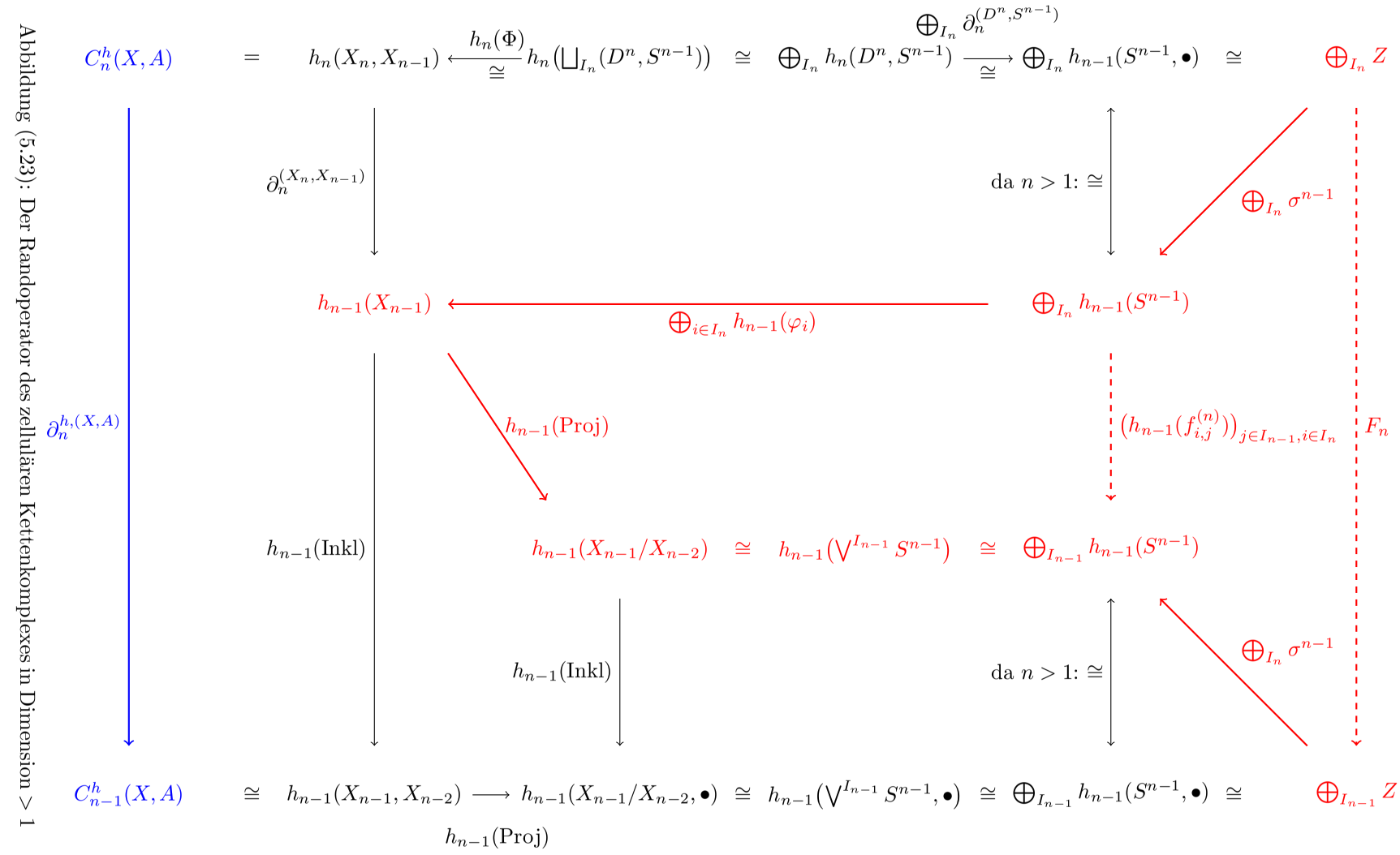


Abbildung (5.23): Der Randoperator des zellulären Kettenkomplexes in Dimension > 1

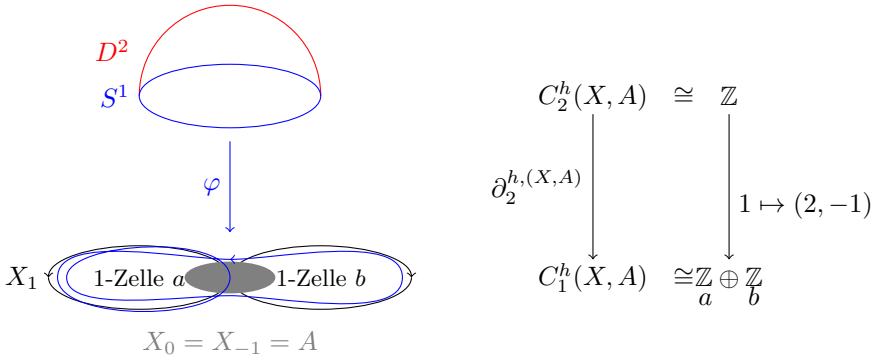


Abbildung (5.25): Der zelluläre Kettenkomplex nach Proposition (5.25); als gewöhnliche Homologietheorie h betrachten wir dabei singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.

eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ definiert, da

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

ein Pushout in Top ist; dabei sind die vertikalen Abbildungen die Inklusionen, die obere Abbildung ist die kanonische Projektion, die untere Abbildung ist die Inklusion $D^n \subset S^n$ als nördliche Hemisphäre gefolgt von der kanonischen Projektion $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. Insbesondere hat diese CW-Struktur nur in den Dimensionen $0, \ldots, n$ Zellen und dort jeweils genau eine.

Sei h eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(\bullet) \cong_{R\mathsf{Mod}} R$. Dann ist der zelluläre Kettenkomplex $C^h(\mathbb{R}P^n)$ zu einem Kettenkomplex (in ${}_R\mathsf{Ch}$) der folgenden Form isomorph:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{n}{R} \xrightarrow{\partial_n} \underset{n-1}{R} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow \underset{2}{R} \xrightarrow{\partial_2} \underset{1}{R} \xrightarrow{\partial_1} \underset{0}{R} \longrightarrow \underset{-1}{0} \longrightarrow \cdots$$

Die Randoperatoren $\partial_1, \ldots, \partial_n$ können wir durch die entsprechenden Inzidenzzahlen bestimmen: Da die CW-Struktur nur genau eine 0-Zelle hat, ist $\partial_1 = 0$. Sei $k \in \{2, \ldots, n\}$. Dann ist das Diagramm in Abbildung (5.27) bis auf Homotopie kommutativ; dies lässt sich zum Beispiel nachvollziehen, indem man verfolgt, was mit Punkten auf den beiden Hemisphären von S^{k-1} geschieht. In h_{n-1} induziert diese Abbildung somit (Lemma 3.21 und Korollar 3.20)

$$\big(1 + (-1)^k\big) \cdot \mathrm{id}_{h_{k-1}(S^{k-1})}\,.$$

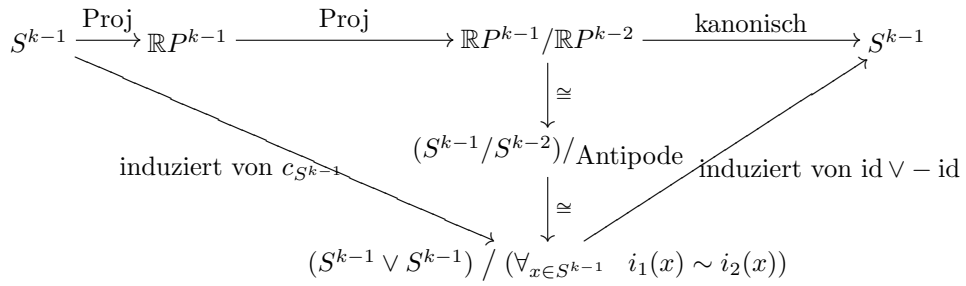


Abbildung (5.27): Bestimmung der Inzidenzzahlen für $\mathbb{R}P^n$

Nach Proposition 5.22 ist $C^h(X, A)$ somit zum folgenden Kettenkomplex isomorph:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{n}{R} \xrightarrow{1+(-1)^n} \underset{n-1}{R} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{0} \underset{2}{R} \xrightarrow{2} \underset{1}{R} \xrightarrow{0} \underset{0}{R} \longrightarrow \underset{-1}{0} \longrightarrow \cdots$$

Also ist

$$H_k^h(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} R & \text{falls } k = 0 \\ R/2 \cdot R & \text{falls } k \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ ungerade ist} \\ \{x \in R \mid 2 \cdot x = 0\} & \text{falls } k \in \{2, \ldots, n\} \text{ gerade ist} \\ R & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten daher zum Beispiel:

	$H_k^h(\mathbb{R}P^n)$		
R	$k \in \{1, \ldots, n-1\}$ ungerade	$k \in \{2, \ldots, n\}$ gerade	falls $k = n$ ungerade
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
$\mathbb{Q}$	0	0	$\mathbb{Q}$

5.3. Vergleich von Homologietheorien auf CW-Komplexen

Wir werden nun Homologietheorien auf CW-Komplexen miteinander vergleichen. Wir beginnen mit gewöhnlichen Homologietheorien (und insbesondere dem Vergleich mit singulärer Homologie) und gehen danach kurz auf den allgemeinen Fall ein.

Satz 5.28 (zelluläre Homologie einer gewöhnlichen Homologietheorie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei $h := \big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann sind die Funktoren*

$$H_n^h\colon \mathsf{CW}^2_{\mathit{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod},$$
$$h_n\colon \mathsf{CW}^2_{\mathit{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$

natürlich isomorph, wobei $\mathsf{CW}^2_{\mathit{fin}}$ die Kategorie der endlichen relativen CW-Komplexe bezeichnet. Genauer gilt:

1. *Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex und $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, so ist*

$$H_n^h(X, A) \cong 0 \cong h_n(X, A).$$

2. *Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex, so induzieren die von den Inklusionen induzierten Abbildungen*

$$C_n^h(X, A) = h_n(X_n, X_{n-1}) \longleftarrow h_n(X_n, A) \longrightarrow h_n(X, A)$$

einen Isomorphismus $H_n^h(X, A) \cong h_n(X, A)$.

Bemerkung 5.29. Ist die Homologietheorie h im obigen Satz zusätzlich additiv, so gilt die analoge Aussage auch für die Kategorie CW^2 aller relativen CW-Komplexe. Im Fall von singulärer Homologie folgt dies aus einem Kompaktheitsargument (analog zu Proposition 4.50), im allgemeinen Fall benötigt man ein allgemeines (Homotopie)Kolimesargument.

Insbesondere können wir singuläre Homologie durch die zugehörige zelluläre Homologie berechnen. D.h. die Berechnungen für zelluläre Homologie im vorigen Abschnitt liefern auch die entsprechenden Ergebnisse für singuläre Homologie, zum Beispiel für reell-projektive Räume (Beispiel 5.26).

Beweisskizze von Satz 5.28. Sei (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex mit relativer CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Wir beginnen mit ein paar einfachen Vorüberlegungen zu den auftretenden relativen Homologiegruppen:

a. Nach Bemerkung 5.21 gilt (da h eine *gewöhnliche* Homologietheorie ist)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}} \quad h_k(X_n, X_{n-1}) \cong 0.$$

b. Induktiv folgt daraus

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\dots,n\}} \quad h_k(X_n, A) \cong 0$$

c. bzw.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} \quad \forall_{N\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad \forall_{k\in\mathbb{Z}_{\leq n}} \quad h_k(X_N, X_n) \cong 0.$$

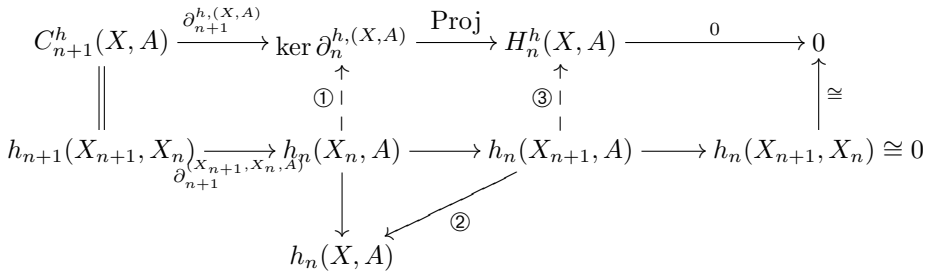
Da (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$X_N = X.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Sei $n < 0$. Dann ist (nach Vorüberlegung b bzw. der Definition von zellulärer Homologie)
$$h_n(X, A) = h_n(X_N, A) \cong 0 \cong H_n^h(X, A).$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das folgende Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen:



   Der Homomorphismus ② ist dabei ein Isomorphismus (dies folgt aus Vorüberlegung c und der langen exakten Tripelsequenz für $(X = X_N, X_{n+1}, A)$).
   Wie wird der Homomorphismus ① konstruiert? aus der langen exakten Tripelsequenz von (X_n, X_{n-1}, A) und Vorüberlegung b folgt, dass die Inklusion einen Isomorphismus
$$h_n(X_n, A) \cong \ker \partial_n^{(X_n, X_{n-1}, A)}$$
   induziert. Außerdem kann man sich mit der langen exakten Tripelsequenz des Tripels (X_{n-1}, X_{n-2}, A) und Vorüberlegung b leicht überlegen, dass
$$\ker \partial_n^{(X_n, X_{n-1}, A)} = \ker \partial_n^{h,(X,A)}$$
   gilt. Dies liefert den Isomorphismus ①.
   Da das linke Quadrat des obigen Diagramms kommutiert, induziert ① einen wohldefinierten Homomorphismus ③. Nach dem Fünfer-Lemma (Proposition E.6) ist ③ dabei ein Isomorphismus.
   Also liefern ② und ③ zusammen den gewünschten Isomorphismus $H_n^h(X, A) \cong h_n(X, A)$. Dieser ist natürlich. □

Korollar 5.30 (Endlichkeits-/Verschwindungsresultate für gewöhnliche Homologietheorien)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex der Dimension N.*

1. *Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, N\}$*
$$h_k(X, A) \cong H_k^h(X, A) \cong 0.$$

2. *Ist R noethersch (z.B. $\mathbb{Z}$ oder ein Körper) und ist $h_0(\bullet) \cong_{{}_R\mathsf{Mod}} R$, so gilt: Für alle $k \in \{0, \dots, N\}$ ist $h_k(X, A) \cong H_k^h(X, A)$ ein endlich erzeugter R-Modul.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem obigen Satz bzw. aus der expliziten Beschreibung der Kettenmoduln (Proposition 5.22). □

Korollar 5.31 (Eindeutigkeit gewöhnlicher Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}}$)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$, und sei $Z := h_0(\bullet)$. Sei außerdem $n \in \mathbb{Z}$.*

1. *Ist k eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und ist $k_0(\bullet) \cong Z$, so sind h_n und k_n als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.*
2. *Insbesondere sind h_n und $H_n(\,\cdot\,; Z)$ als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.*

(Sind die betrachteten Homologietheorien additiv, so gelten die analogen Aussagen für CW^2 statt $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}}$.)

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten. Wir skizzieren nun den Beweis des ersten Teils: Aus der Diskussion der Beschreibung der zellulären Kettenkomplexe mithilfe von Inzidenzzahlen (Bemerkung 5.24) folgt: Die zellulären Kettenkomplexe C^h und C^k sind als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$ natürlich isomorph. Daher sind auch $H^h_n = H_n \circ C^h$ und $H^k_n = H_n \circ C^k$ als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph. Mit Satz 5.28 folgt somit die Behauptung. □

Caveat 5.32. Es gibt gewöhnliche Homologietheorien h auf Top^2 mit Werten in ${}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{R}$, für die es topologische Räume X und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$h_n(X) \ncong_{\mathbb{R}} H_n(X; \mathbb{R})$$

gibt (z.B. sogenannte Maßhomologie). Diese Beispiele von topologischen Räumen sind aber keine CW-Komplexe.

Caveat 5.33. Ist h eine Homologietheorie auf Top^2, die *nicht* gewöhnlich ist, so ist die zelluläre Homologie zu h *nicht* isomorph zu h (man betrachte etwa den Einpunktraum).

Es gibt aber dennoch auch im Falle allgemeiner Homologietheorien einen systematischen Zusammenhang zwischen der betrachteten verallgemeinerten Homologietheorie und singulärer Homologie:

Satz 5.34 (Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei h eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex, so gibt es eine (in (X, A) und h) natürliche, konvergente Spektralsequenz*

$$E^1_{pq} = h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Longrightarrow h_{p+q}(X, A)$$

bzw.

$$E^2_{pq} = H_p\big(X, A; h_q(\bullet)\big) \Longrightarrow h_{p+q}(X, A).$$

Was sind Spektralsequenzen? Spektralsequenzen sind eine Verallgemeinerung von langen exakten Sequenzen und bestehen aus einer Folge $(E^r, d^r)_{r \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ von bigraduierten Kettenkomplexen (den *Seiten* der Spektralsequenz), wobei der Randoperator d^r den Grad $(-r, r-1)$ besitzt und E^{r+1} aus E^r durch Homologie bezüglich d^r entsteht (Abbildung (5.35)). Im Beispiel der Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz ist die Zeile von E^1, die zu „$q = 0$“ gehört, gerade der zelluläre Kettenkomplex $C^h(X, A)$.

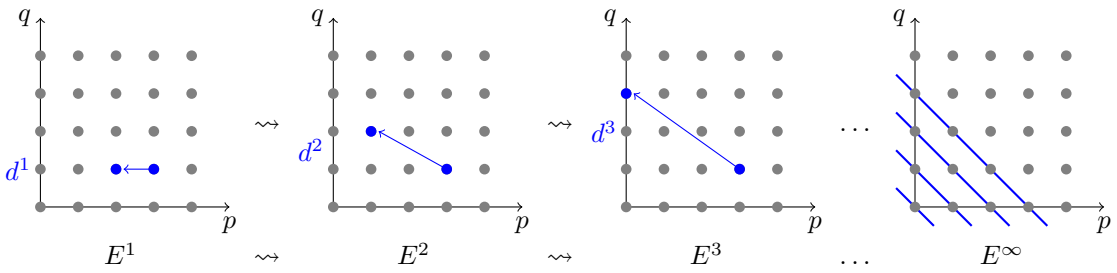


Abbildung (5.35): Seiten einer homologischen Spektralsequenz

In günstigen Fällen, stabilisiert dieser Prozess und liefert die sogenannte ∞-Seite E^∞ der Spektralsequenz. Falls Konvergenz

$$E^1_{pq} \Longrightarrow B_{p+q}$$

der Spektralsequenz vorliegt, so bedeutet dies, dass E^∞ in einem gewissen Sinne eine Approximation an B liefert; genauer liefert die Folge $(E^\infty_{p,n-p})_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Approximation an B_n. Im allgemeinen lässt sich der „Grenzwert“ B aber nicht genau aus E^∞ bestimmen, sondern nur bis auf sogenannte Erweiterungsprobleme. Außerdem ist zu bedenken, dass die Randoperatoren in den höheren Seiten einer Spektralsequenz im allgemeinen nicht vernünftig berechenbar sind. Dennoch können Spektralsequenzen und die zugehörige Trickkiste in vielen Fällen helfen, allerlei Rückschlüsse über den Grenzwert zu ziehen.[10]

Wir werden auf die Begrifflichkeiten und den Beweis hier nicht weiter eingehen.

5.4. Die Euler-Charakteristik

Die Euler-Charakteristik ist eine der ältesten topologischen Invarianten. Sie hat den Vorteil, dass sie leicht aus einer Zellenstruktur berechnet werden kann, aber den Nachteil, dass sie nicht funktoriell ist. Wir geben eine kurze Einführung in die grundlegenden Eigenschaften und Anwendungen der Euler-Charakteristik.

Definition 5.36 (Euler-Charakteristik eines endlichen CW-Komplexes)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex.

- Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $c_n(X)$ die Anzahl der offenen n-Zellen von X.
- Die *Euler-Charakteristik von* X ist definiert als (die endliche Summe!)

$$\chi(X) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot c_n(X) \in \mathbb{Z}.$$

[10] Eine kurze Einführung in Spektralsequenzen, Literaturangaben und die einfachsten Techniken finden Sie im Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III aus dem WS 2009/10
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie3_ws0910/prelim.pdf

Beispiel 5.37. Eine kleine Sammlung von ersten Beispielen findet sich in Abbildung (5.38).

Das kleine Wunder der algebraischen Topologie, dass die Euler-Charakteristik *nicht* von der CW-Struktur abhängt (und sogar eine Homotopieinvariante ist), wurde von Poincaré entdeckt (Satz 5.42). Zur Formulierung führen wir den klassischen Begriff der Betti-Zahlen ein:

Definition 5.39 (Betti-Zahlen)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei R ein noetherscher Ring mit Eins, der einen geeigneten Rangbegriff rk_R für endlich erzeugte Links-R-Moduln besitzt.[11] Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$b_n(X;R) := \mathrm{rk}_R\, H_n(X;R) \in \mathbb{N}$$

die *n-te Betti-Zahl von X bezüglich R* (diese ist nach Korollar 5.30 wohldefiniert); wir schreiben

$$b_n(X) := b_n(X;\mathbb{Z})$$

und nennen dies die *n-te Betti-Zahl von X*.

Beispiel 5.40. Es gilt (nach Beispiel 5.26 und Satz 5.28)

$$b_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}) = 0 \neq 1 = b_2(\mathbb{R}P^2;\mathbb{Z}/2).$$

Frage 5.41. *Wie hängen die Bett-Zahlen unterschiedlicher Koeffizienten zusammen? In der Algebraischen Topologie II wird diese Frage beantwortet werden.*

Wir können nun den Satz von Poincaré formulieren. Aufgrund dieses Satzes bezeichnet man singuläre Homologie auch als Kategorifizierung der Euler-Charakteristik (eine Begriffsbildung, die z.B. in der Knotentheorie verwendet wird).

Satz 5.42 (Homotopieinvarianz der Euler-Charakteristik)**.** *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei R ein noetherscher Ring mit Eins, der einen geeigneten Rangbegriff (im Sinne der obigen Definition) besitzt.*

1. *Dann gilt*
$$\chi(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot b_n(X;R)$$
(und diese Summe ist nach Korollar 5.30 endlich).
2. *Insbesondere gilt: Ist Y ein endlicher CW-Komplex mit $X \simeq_{\mathsf{Top}} Y$, so folgt*
$$\chi(X) = \chi(Y).$$
Also ist die Euler-Charakteristik insbesondere unabhängig von der betrachteten endlichen CW-Struktur(!).

[11] D.h. für alle $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{rk}_R\, R^d = d$ und rk_R ist unter kurzen exakten Sequenzen endlich erzeugter R-Moduln additiv; einen solchen Rangbegriff gibt es zum Beispiel für Hauptidealringe (und Körper).

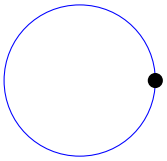
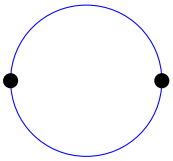
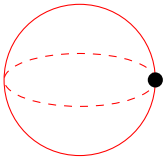
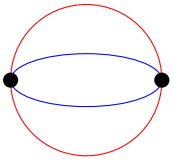
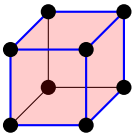
Raum	*CW-Struktur*	*Euler-Charakteristik*
		1
$[0,1]$		$2-1=1$
S^1		$1-1=0$
S^1		$2-2=0$
S^2		$1-0+1=2$
S^2		$2-2+2=2$
S^2		$8-12+6=2$

Abbildung (5.38): Erste Beispiele für die Euler-Charakteristik

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten Teil (da singuläre Homologie und somit auch Betti-Zahlen homotopieinvariant sind). Den ersten Teil erhalten wir aus (wobei wir h für die singuläre Homologietheorie mit R-Koeffizienten schreiben):

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot c_n(X) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{rk}_R C_n^h(X) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{rk}_R H_n\big(C_n^h(X)\big) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{rk}_R H_n(X;R) \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot b_n(X;R);\end{aligned}$$

die zweite Gleichheit folgt aus Proposition 5.22, die dritte aus einer konsequenten Anwendung der „Dimensionsformel“ (Additivität von rk_R für kurze exakte Sequenze von endlich erzeugten R-Moduln), die vierte aus Satz 5.28. □

Beispiel 5.43. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases}$$

$$\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases}$$

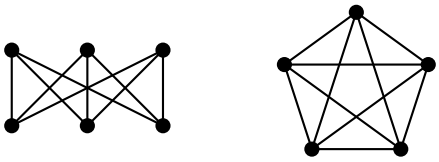
Frage 5.44. *Haben alle kompakten Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension die Euler-Charakteristik* 0 *? In der Algebraischen Topologie II wird diese Frage beantwortet werden.*

Beispiel 5.45 (Eulersche Polyederformel für CW-Strukturen)**.** Für jede (endliche) (zweidimensionale) CW-Struktur auf S^2 mit e Ecken (0-Zellen), k Kanten (1-Zellen) und f Flächen (2-Zellen) gilt

$$e - k + f = 2.$$

Die Eulersche Polyederformel hat zahlreiche klassische Anwendungen:
- Bestimmung der kombinatorischen Struktur regulärer Polyeder.
- Nicht-Planaritätsresultate für gewisse Graphen, z.B. für die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ (Abbildung (5.47)).
- Färbungssätze für planare Graphen.

Korollar 5.46 (Kombinatorik der regulären Polyeder)**.** *Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes, reguläres dreidimensionales Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen. Dann ist (e, k, f) eines der folgenden Tripel:*



$K_{3,3}$ K_5

Abbildung (5.47): Die (nicht-planaren) Graphen $K_{3,3}$ und K_5

e	k	f
4	6	4
6	12	8
8	12	6
20	30	12
12	30	20

Mithilfe von euklidischer Geometrie folgt außerdem, dass es zu jedem kombinatorischen Typ nur das jeweils angegebene reguläre Polyeder gibt.

Korollar 5.48 (Nicht-Planarität von K_5 bzw. $K_{3,3}$)**.** *Die in Abbildung (5.47) dargestellten eindimensionalen CW-Komplexe K_5 bzw. $K_{3,3}$ können nicht in S^2 (bzw. $\mathbb{R}^2$) eingebettet werden.*

Beweisskizze. Wir betrachten nur $K_{3,3}$; der Beweis für K_5 funktioniert ähnlich. *Angenommen* es gibt eine stetige injektive Abbildung $f\colon K_{3,3} \longrightarrow S^2$. Dann erhält man mit dem Satz von Jordan-Schönflies (Caveat 4.46):

- Die Wegzusammenhangskomponenten von $S^2 \backslash f(K_{3,3})$ (die sogenannten *Facetten* der Einbettung f) sind homöomorph zu D^2.
- Jede Facette wird von einem graphentheoretischen geschlossenen Weg in $K_{3,3}$ (und somit von mindestens vier 1-Zellen) berandet.
- Jede 1-Zelle von $K_{3,3}$ liegt auf dem Rand von genau zwei Facetten.

Sei n die Anzal der Facetten von S. Somit erhalten wir also eine zweidimensionale CW-Struktur auf S^2 und es folgt

$$2 = \chi(S^2) = 6 - 9 + n$$

bzw. $n = 5$. Daher erhalten wir

$$9 = \text{Anzahl der 1-Zellen} = \frac{\text{Summe der Kanten aller Facetten}}{2} \geq \frac{n \cdot 4}{2} = 10,$$

was nicht sein kann. □

Zur Berechnung der Euler-Charakteristik sind die folgenden Eigenschaften nützlich:

Proposition 5.49 (Euler-Charakteristik, Vererbungseigenschaften)**.**

1. *Seien X und Y endliche CW-Komplexe. Dann liefert*

$$\Big(\bigcup_{k=0}^{n} X_k \times Y_{n-k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine endliche CW-Struktur auf $X \times Y$ und

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

2. *Sei*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

ein Pushout in Top*, wobei A, B und X endliche CW-Komplexe sind, $i\colon A \longrightarrow X$ die Inklusion eines Unterkomplexes und $f\colon A \longrightarrow B$ zellulär ist. Dann liefert*

$$\big(g(X_n) \cup j(B_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine endliche CW-Struktur auf Y und es gilt

$$\chi(Y) = \chi(X) + \chi(B) - \chi(A)$$

3. *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine endliche Überlagerung mit $d \in \mathbb{N}$ Blättern. Dann liefert*

$$\big(p^{-1}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine endliche CW-Struktur auf Y und es gilt

$$\chi(Y) = d \cdot \chi(X).$$

Eine gemeinsame Verallgemeinerung der Multiplikatvität der Euler-Charakteristik bezüglich Produkten und endlichen Überlagerungen ist die Multiplikativität für gewisse Faserungen (was mithilfe einer geeigneten Spektralsequenz gezeigt werden kann).

Beweisskizze. Dass die angegebenen Filtrierungen tatsächlich CW-Strukturen liefern, folgt durch die Betrachtung geeigneter Pushouts. In den drei Fällen erhalten wir dabei für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Relationen zwischen den Anzahlen der offenen n-Zellen:

$$\begin{aligned} c_n(X \times Y) &= \sum_{k=0}^{n} c_k(X) \cdot c_{n-k}(Y), \quad \text{bzw.} \\ c_n(Y) &= c_n(X) + c_n(B) - c_n(A), \quad \text{bzw.} \\ c_n(Y) &= d \cdot c_n(X). \end{aligned}$$

Daraus folgen dann die entsprechenden Zusammenhänge zwischen den Euler-Charakteristiken. □

Frage 5.50. *Wie kann man die Homologie eines Produktes aus der Homologie der Faktoren berechnen? In der Algebraischen Topologie II wird diese Frage beantwortet werden.*

Mithilfe dieser Vererbungseigenschaften erhalten wir zum Beispiel die folgende Verfeinerung des Satzes von Nielsen-Schreier (Satz 2.83):

Korollar 5.51 (Satz von Nielsen-Schreier, quantitative Version)**.** *Sei F eine freie Gruppe von endlichem Rang $n \in \mathbb{N}$ und sei $G \subset F$ eine Untergruppe von endlichem Index. Dann ist G frei vom Rang*

$$[F : G] \cdot (n-1) + 1.$$

Beweisskizze. Sei $S \subset F$ ein freies Erzeugendensystem. Wir betrachten den Raum

$$(X, x_0) := \bigvee_S (S^1, 1)$$

mit der offensichtlichen CW-Struktur. Wegen $|S| = n$ ist diese CW-Struktur endlich. Dann ist $\pi_1(X, x_0) \cong F$ (Beispiel 2.29 und Proposition C.9). Nach dem Klassifikationssatz für Überlagerungen (Satz 2.74) gibt es eine Überlagerung $p\colon (Y, y_0) \longrightarrow (X, x_0)$ zu der Untergruppe von $\pi_1(X, x_0)$, die $G \subset F$ entspricht; insbesondere ist $\pi_1(Y, y_0) \cong G$ und die Überlagerung p ist $[F : G]$-blättrig.

Mit X ist auch Y ein eindimensionaler CW-Komplex und aus den Vererbungseigenschaften der Euler-Charakteristik folgt

$$\chi(Y) = [F : G] \cdot \chi(X) = [F : G] \cdot (1 - n).$$

Andererseits zeigt die Berechnung von Fundamentalgruppen eindimensionaler CW-Komplexe, dass $\pi_1(Y, y_0)$ frei vom Rang $1 - \chi(Y)$ ist. Daraus folgt die Behauptung. □

Dass Wechselsummen (wie in der Definition der Euler-Charakteristik) bessere topologische Invarianzeigenschaften besitzen als die entsprechenden vorzeichenlosen Varianten, ist ein allgemeines Prinzip der Topologie und spielt zum Beispiel auch bei der Lefschetz-Zahl und Indexsätzen eine Rolle.

A. Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie

Wir sammeln die wichtigsten Grundbegriffe und Aussagen aus der mengentheoretische Topologie aus den Grundvorlesungen. Detailliertere Erklärungen, sowie Beispiele finden sich in allen Büchern über mengentheoretische Topologie.

A.1. Topologische Räume

Die Grundidee topologischer Räume ist, Nähe nicht durch Abstände, sondern durch Systeme von Teilmengen auszudrücken – den sogenannten offenen Mengen:

Definition A.1 (topologischer Raum, Topologie)**.** Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, T), wobei X eine Menge und T eine *Topologie auf* X ist, d.h. T ist eine Teilmenge der Potenzmenge $P(X)$ von X mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $\emptyset \in T$ und $X \in T$.
- Ist $U \subset T$, so ist $\bigcup U \in T$.
- Ist $U \subset T$ endlich, so ist $\bigcap U \in T$.

Die Elemente von T heißen *offene Mengen* (bezüglich T); ist $A \subset X$ und $X \setminus A \in T$, so heißt A *abgeschlossen* (bezüglich T).

Warum man gerade diese Axiome für offene Mengen betrachtet, kann man gut anhand des Beispiels metrischer Räume illustrieren:

Proposition A.2 (die von einer Metrik induzierte Topologie)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist*

$$T := \big\{U \subset X \;\big|\; \forall_{x\in U} \quad \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} \quad U(x,\varepsilon) \subset U\big\}$$

eine Topologie auf X. Man nennt T die von d auf X induzierte Topologie*. Dabei verwenden wir für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ die Notation*

$$U(x,\varepsilon) := \big\{y \in X \;\big|\; d(y,x) < \varepsilon\big\}.$$

Bemerkung A.3.

- Der Begriff offener Mengen bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ stimmt also mit dem Begriff aus der Analysis I überein.
- Die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ heißt *Standardtopologie auf* $\mathbb{R}^n$.
- Ist (X, d) ein metrischer Raum, ist $x \in X$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist $U(x, \varepsilon)$ in X offen. D.h. offene Bälle sind tatsächlich offene Mengen bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie.
- Analog zum Fall von Teilmengen von $\mathbb{R}$ kann Abgeschlossenheit in metrischen Räumen auch durch Konvergenz von Folgen ausgedrückt werden. Daraus folgt, dass abgeschlossene Bälle tatsächlich bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie abgeschlossen sind.

Caveat A.4. Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar! (Korollar A.26).

Bemerkung A.5 (Klumpentopologie, diskrete Topologie)**.** Sei X eine Menge.
- Dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, die sogenannte *Klumpentopologie auf X*.
- Außerdem ist $P(X)$ eine Topologie auf X, die sogenannte *diskrete Topologie auf X*; iese stimmt mit der von der diskreten Metrik induzierten Topologie überein.

Zwei elementare Konstruktionen topologischer Räume sind Teilräume und Produkte:

Bemerkung A.6 (Teilraumtopologie)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist

$$\{U \cap Y \mid U \in T\}$$

eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraumtopologie*. Ist T auf X von einer Metrik d auf X induziert, so stimmt die Teilraumtopologie auf Y mit der von d auf Y induzierten Metrik induzierten Topologie überein.

Bemerkung A.7 (Produkttopologie)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Dann ist

$$\left\{U \subset X \times Y \;\middle|\; \forall_{x \in U} \quad \exists_{U_X \in T_X} \quad \exists_{U_Y \in T_Y} \quad x \in U_X \times U_Y \subset U\right\}$$

eine Topologie auf $X \times Y$, die sogenannte *Produkttopologie*.

Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stimmt dabei mit der Produkttopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ überein. Die Produkttopologie erfüllt auch die universelle Eigenschaft des Produkts im kategorientheoretischen Sinne.

Außerdem ist es oft nützlich, die folgenden Begriffe zur Verfügung zu haben:

Definition A.8 ((offene) Umgebung)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.
- Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine *offene Umgebung von x*, wenn U offen ist und $x \in U$ ist.
- Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine *Umgebung von x*, wenn es eine offene Umgebung $V \subset X$ von x mit $V \subset U$ gibt.

Definition A.9 (Abschluss, Inneres, Rand)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$.
- Das *Innere von Y* ist

  $$Y^\circ := \bigcup \{U \mid U \in T \text{ und } U \subset Y\}.$$

  D.h. Y° ist die (bezüglich Inklusion) größte in X offene Menge, die in Y enthalten ist.
- Der *Abschluss von Y* ist

  $$\overline{Y} := \bigcap \{A \mid X \setminus A \in T \text{ und } Y \subset A\}.$$

  D.h. $\overline{Y}$ ist die (bezüglich Inklusion) kleinste in X abgeschlossene Menge, die Y enthält.
- Der *Rand von Y* ist

  $$\partial Y := \overline{Y} \cap \overline{(X \setminus Y)}.$$

A.2. Stetige Abbildungen

Stetige Abbildungen spielen die Rolle der strukturverträglichen Abbildungen in der Welt der topologischen Räume:

Definition A.10 (stetig)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist *stetig* (bezüglich T_X und T_Y), wenn

$$\forall_{U \in T_Y} \quad f^{-1}(U) \in T_X,$$

d.h., wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Bemerkung A.11.

- Für Abbildungen vom Typ $X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ stimmt dieser Begriff von Stetigkeit mit dem aus der Analysis I überein.
- Dasselbe Argument über das ε-δ-Kriterium zeigt: Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen stimmt dieser Begriff von Stetigkeit mit dem bereits zuvor definierten überein.
- Sei X eine Menge und seien T bzw. T' Topologien auf X. Dann ist die Identität $\mathrm{id}_X\colon (X, T) \longrightarrow (X, T')$ genau dann stetig, wenn $T' \subset T$ ist, d.h. wenn T' gröber als T ist.
- Die Abbildungen $+, \cdot, -\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $/\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind bezüglich der Standardtopologie stetig.
- Ist (X, T) ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Inklusion $Y \hookrightarrow X$ bezüglich der Teilraumtopologie auf Y stetig.
- Konstante Abbildungen sind stetig.

Proposition A.12 (Vererbungseigenschaften stetiger Abbildungen)**.** *Seien (X, T_X), (Y, T_Y) und (Z, T_Z) topologische Räume und seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.*

1. *Sind f und g stetig, so ist auch $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ stetig.*
2. *Ist f stetig und ist $A \subset X$, so ist auch die Einschränkung $f|_A\colon A \longrightarrow Y$ stetig (bezüglich der Teilraumtopologie auf A).*
3. *Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f\colon X \longrightarrow f(X)$ bezüglich der Teilraumtopologie auf $f(X)$ stetig ist.*

Proposition A.13 (Verkleben stetiger Funktionen)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume, seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $A \cup B = X$ und seien $f\colon A \longrightarrow Y$ und $g\colon B \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen (bezüglich der Teilraumtopologie auf A bzw. B) mit $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Dann ist die (wohldefinierte) Abbildung*

$$\begin{aligned} f \cup_{A\cap B} g\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ g(x) & \text{falls } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

stetig.

Der Isomorphiebegriff in der Kategorie der topologischen Räume ist Homöomorphie:

Definition A.14 (Homöomorphismus)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist ein *Homöomorphismus*, wenn sie stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt. Falls es einen Homöomorphismus $X \longrightarrow Y$ gibt, heißen X und Y *homöomorph*.

Caveat A.15. *Nicht* jede stetige bijektive Abbildung ist ein Homöomorphismus!

Anschaulich gesprochen sind topologische Räume genau dann homöomorph, wenn man sie durch „verbiegen“ und „aufblasen/schrumpfen“ ineinander überführen kann, ohne zu „schneiden“ oder zu „kleben“.

A.3. (Weg-)Zusammenhang

Einer der zentralen Sätze über stetige Funktionen vom Typ $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der Zwischenwertsatz. Im allgemeineren Kontext der topologischen Räume kann man dieses Phänomen durch die Begriffe Wegzusammenhang und Zusammenhang beschreiben.

Definition A.16 (Weg, wegzusammenhängend)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum.
- Ein *Weg in X* ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ (bezüglich der Standardtopologie auf $[0, 1] \subset \mathbb{R}$). Man nennt $\gamma(0)$ den *Startpunkt* und $\gamma(1)$ den *Endpunkt von γ*. Der Weg γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist.
- Der Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Für alle $x, y \in X$ gibt es einen Weg $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Bemerkung A.17.
- Das Einheitsintervall ist (bezüglich der Standardtopologie) wegzusammenhängend.
- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend (bezüglich der Standardtopologie).
- Ist X eine Menge mit $|X| \geq 2$, so ist X bezüglich der diskreten Topologie *nicht* wegzusammenhängend.

Proposition A.18 (Stetigkeit und Wegzusammenhang)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so ist auch $f(X)$ bezüglich der Teilraumtopologie wegzusammenhängend.*

Insbesondere gilt: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn Y wegzusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Wegzusammenhang ist eine topologische Invariante.

Zum Beispiel kann man diese Eigenschaft (und einen kleinen Trick) verwenden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ nur dann zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist (bezüglich der Standardtopologie), wenn $n = 1$ ist.

Eine Abschwächung des Wegzusammenhangsbegriffs ist Zusammenhang:

Definition A.19 (zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum (X, T_X) ist *zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Für alle $U, V \in T_X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$ ist bereits $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. (D.h. X lässt sich nur trivial in offene Mengen zerlegen).

Bemerkung A.20. Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist bezüglich der Standardtopologie zusammenhängend.

Proposition A.21 (Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang)**.** *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

Caveat A.22. Es gibt topologische Räume, die zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend sind!

In diesem allgemeinen Kontext lautet der verallgemeinerte Zwischenwertsatz nun wie folgt:

Proposition A.23 (Verallgemeinerter Zwischenwertsatz)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend (bezüglich der Teilraumtopologie).*

Insbesondere: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Zusammenhang ist eine topologische Invariante.

In der algebraischen Topologie studiert man außer Zusammenhang und Wegzusammenhang auch noch höhere Zusammenhangsbegriffe.

A.4. Hausdorffräume

Die Klumpentopologie zeigt bereits, dass es viele exotische und unintuitive Topologien gibt. Daher gibt es viele Begriffe für topologische Räume, die sicherstellen, dass Räume hinreichend gutartig sind. Ein Beispiel ist der folgende Begriff, der zu den sogenannten Trennungseigenschaften gehört:

Definition A.24 (hausdorffsch)**.** Ein topologischer Raum (X, T) ist *hausdorffsch*, wenn folgendes gilt: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. (D.h. je zwei Punkte können durch offene Mengen getrennt werden.)

Proposition A.25 (metrische Räume sind hausdorffsch)**.** *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist X bezüglich der von der Metrik d auf X induzierten Topologie hausdorffsch.*

Korollar A.26. *Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$. Dann gibt es keine Metrik auf X, die die Klumpentopologie auf X induziert.*

Bemerkung A.27. Sind (X, T_X) und (Y, T_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist X genau dann hausdorffsch, wenn Y hausdorffsch ist.

Es gibt noch weitere Trennungseigenschaften topologischer Räume, sowie sogenannte Abzählbarkeitseigenschaften; die Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen sind etwas unübersichtlich und können gut in dem Buch *Counterexamples in Topology* von L.A. Steen und J.A. Seebach Jr nachgelesen werden.

A.5. Kompaktheit

Einer der wichtigsten und nützlichsten topologischen Begriffe ist Kompaktheit; grob gesprochen ist Kompaktheit eine Art topologische Endlichkeitsbedingung. Wir beginnen mit der abstrakten Definition als Endlichkeitsbedingung von Überdeckungen und zeigen später, dass dieser Begriff den bisherigen Kompaktheitsbegriff in $\mathbb{R}$ verallgemeinert (Satz A.36).

Definition A.28 (kompakt)**.** Ein topologischer Raum (X, T) ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., wenn folgendes gilt: Für alle $U \subset T$ mit $\bigcup U = X$ gibt es eine endliche Teilmenge $V \subset U$ mit $\bigcup V = X$.

Bemerkung A.29. Sei X eine Menge. Dann ist X bezüglich der Klumpentopologie kompakt. Außerdem ist X genau dann bezüglich der diskreten Topologie kompakt, wenn X endlich ist.

Wir werden später eine Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ geben und zunächst allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen aus der Definition ableiten:

Proposition A.30 (Verallgemeinertes Extremalprinzip)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt (bezüglich der Teilraumtopologie).*

Korollar A.31 (Kompaktheit ist eine topologische Invariante)**.** *Insbesondere gilt: Sind (X, T_X) und (Y, T_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist X genau dann kompakt, wenn Y kompakt ist.*

Proposition A.32 (Abgeschlossenheit und Kompaktheit)**.** *Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$.*

1. *Ist X kompakt und Y in X abgeschlossen, so ist Y bezüglich der Teilraumtopologie kompakt.*
2. *Ist X hausdorffsch und Y bezüglich der Teilraumtopologie kompakt, so ist Y in X abgeschlossen.*

Korollar A.33. *Sei (X, T_X) ein kompakter topologischer Raum, sei (Y, T_Y) ein Hausdorffraum und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f bereits ein Homöomorphismus(!).*

Zum Abschluss des Abschnitts über allgemeine Kompaktheitseigenschaften betrachten wir noch die Verträglichkeit von Kompaktheit mit Produkten:

Proposition A.34 (Produkt zweier kompakter Räume)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) kompakte topologische Räume. Dann ist das Produkt $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie kompakt.*

Bemerkung A.35 (Satz von Tychonoff)**.** Der *Satz von Tychonoff*

> Beliebige (auch unendliche!) Produkte kompakter topologischer Räume sind kompakt.

ist äquivalent zum Auswahlaxiom (!), und damit auch äquivalent zum Zornschen Lemma bzw. dem Wohlordnungssatz.

In euklidischen Räumen gibt es eine einfache Charakterisierung kompakter Mengen:

Satz A.36 (Satz von Heine-Borel)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten auf A die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Teilraumtopologie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Menge A ist kompakt.*
2. *Die Menge A ist in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt und abgeschlossen.*
3. *Die Menge A ist bezüglich der euklidischen Metrik* folgenkompakt*, d.h. jede Folge in A besitzt eine bezüglich der euklidischen Metrik konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in A liegt.*

Etwas allgemeiner gilt auch:

Proposition A.37. *Kompakte Mengen in metrischen Räumen sind beschränkt und abgeschlossen.*

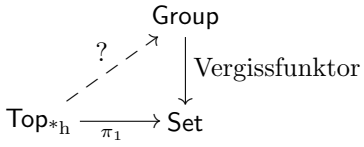
Caveat A.38. Die Umkehrung der obigen Proposition gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. es gibt beschränkte und abgeschlossene Mengen in gewissen (sogar vollständigen) metrischen Räumen, die *nicht* kompakt sind (zum Beispiel sind unendliche Mengen bezüglich der diskreten Metrik in sich selbst beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt).

B. Kogruppenobjekte und induzierte Gruppenstrukturen

Wir skizzieren im folgenden einen konzeptionelleren Zugang zur Gruppenstruktur auf π_1 mithilfe des kategorientheoretischen Konzepts der Kogruppenobjekte.

Der Beweis, dass die in Proposition 2.4 angegebene Verknüpfung durch Verkettung von Schleifen eine Gruppenstruktur auf π_1 liefert, beruht im wesentlichen auf entsprechenden Eigenschaften von $(S^1, 1)$. Genauer gesagt liegt dies daran, dass $(S^1, 1)$ ein sogenanntes Kogruppenobjekt in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ ist, was wir nun im Detail erklären werden:

Eine „Gruppenstruktur auf π_1“ ist in der Sprache der Kategorientheorie einer Faktorisierung des Funktors $\pi_1 \colon \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ über die Kategorie Group der Gruppen und den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$:



Eine solche Faktorisierung entspricht dabei einer Kogruppenobjektstruktur auf $(S^1, 1)$: Den Begriff des Kogruppenobjekts erhält man, indem man den Begriff der Gruppe elementfrei formuliert (dies führt zu sogenannten Gruppenobjekten) und dann dualisiert (Abbildung (B.3)):

Definition B.4 (Kogruppenobjekt)**.** Sei C eine Kategorie, die ein Objekt $*$ enthält, das sowohl initial als auch terminal ist (d.h. C ist eine *punktierte Kategorie*). Ein *Kogruppenobjekt in* C ist ein Tripel (G, c, i), wobei G ein Objekt in C ist, für das die Koprodukte $G \sqcup G$ und $G \sqcup G \sqcup G$ in C existieren, $c \in \mathrm{Mor}_C(G, G \sqcup G)$ (die sogenannte *Komultiplikation*), und $i \in \mathrm{Mor}_C(G, G)$ ist, das folgende Eigenschaften erfüllt (Abbildung (B.5)):

- Es ist $(\mathrm{id}_G \sqcup e) \circ c = \mathrm{id}_G = (e \sqcup \mathrm{id}_G) \circ c$, wobei $e \in \mathrm{Mor}_C(G, G)$ den eindeutigen Morphismus bezeichnet, der über $*$ faktorisiert.
- Es ist $(\mathrm{id}_G \sqcup i) \circ c = e = (i \sqcup \mathrm{id}_G) \circ c$.
- (*Koassoziativität*). Es ist $(c \sqcup \mathrm{id}_G) \circ c = (id_G \sqcup c) \circ c$.

(Die durch „$\sqcup$“ zusammengesetzten Morphismen sind dabei jeweils durch die universelle Eigenschaft des entsprechenden Koproduktes gegeben).

Kogruppenobjektstrukturen entsprechen im folgenden Sinne Gruppenstrukturen auf den entsprechenden darstellbaren Funktoren:

Satz B.6 (Kogruppenobjekte und funktorielle Grupenstrukturen)**.** *Sei C eine punktierte Kategorie und sei G ein Objekt in C, für das die Koprodukte $G \sqcup G$ und $G \sqcup G \sqcup G$ in C existieren. Dann faktorisiert* $\mathrm{Mor}_C(G, \cdot) \colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ *genau dann über den Vergissfunktor* $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$*, wenn G eine Kogruppenobjektstruktur in C zulässt.*

Beweisskizze. Falls $\mathrm{Mor}_C(G, \cdot)$ über Group faktorisiert, so ist G zusammen mit den Morphismen

$$m_{G \sqcup G}(i_1, i_2) \in \mathrm{Mor}_C(G, G \sqcup G)$$
$$i_G \in \mathrm{Mor}_C(G, G)$$

Definition B.1 (Gruppe)**.** Eine *Gruppe* ist ein Paar (G, m), wobei G eine Menge und $m\colon G \times G \longrightarrow G$ eine Abbildung ist, mit folgenden Eigenschaften:

- Es gibt ein $e \in G$ mit

$$\forall_{g\in G} \quad m(g, e) = g = m(e, g).$$

  (Dadurch ist e bereits eindeutig bestimmt.)
- Für alle $g \in G$ existiert ein $i(g)$ mit

$$m\big(g, i(g)\big) = e = m\big(i(g), g\big).$$

  (Zusammen mit der Assoziativität ist $i(g)$ dadurch eindeutig bestimmt.)
- (*Assoziativität*). Für alle $g, h, k \in G$ gilt

$$m\big(m(g, h), k\big) = m\big(g, m(h, k)\big).$$

Mit anderen Worten, es gilt

$$\begin{aligned} m \circ (\mathrm{id}_G, e) &= \mathrm{id}_G = m \circ (e, \mathrm{id}_G) \\ m \circ (\mathrm{id}_G, i) &= e = m \circ (i, \mathrm{id}_G) \\ m \circ (m \times \mathrm{id}_G) &= m \circ (\mathrm{id}_G \times m). \end{aligned}$$

Definition B.2 (Gruppenobjekt)**.** Sei C eine Kategorie, die ein Objekt $*$ enthält, das sowohl initial als auch terminal ist. Ein *Gruppenobjekt in* C ist ein Tripel (G, m, i), wobei G ein Objekt in C ist, für das die Produkte $G \times G$ und $G \times G \times G$ in C existieren, $m \in \mathrm{Mor}_C(G \times G, G)$ und $i \in \mathrm{Mor}_C(G, G)$ ist, mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $m \circ (\mathrm{id}_G, e) = \mathrm{id}_G = m \circ (e, \mathrm{id}_G)$, wobei $e \in \mathrm{Mor}_C(G, G)$ den eindeutigen Morphismus bezeichnet, der über $*$ faktorisiert.
- Es ist $m \circ (\mathrm{id}_G, i) = e = m \circ (i, \mathrm{id}_G)$.
- (*Assoziativität*). Es ist $m \circ (m \times \mathrm{id}_G) = m \circ (\mathrm{id}_G \times m)$.

(Die durch „$(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$“ bzw. „$\times$“ zusammengesetzten Morphismen sind dabei jeweils durch die universelle Eigenschaft des entsprechenden Produkts gegeben.) D.h. die folgenden Diagramme sind kommutativ:

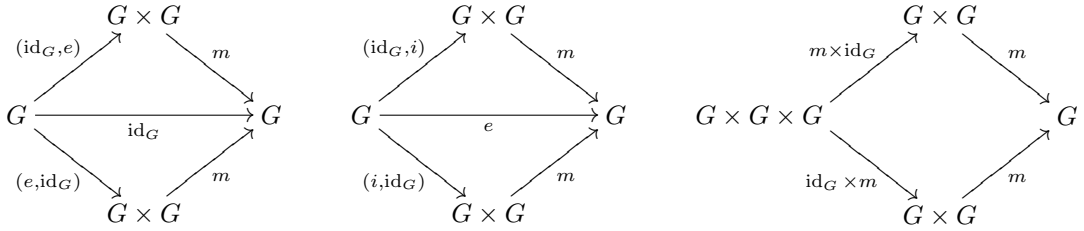


Abbildung (B.3): Der Begriff der Gruppe und des Gruppenobjekts

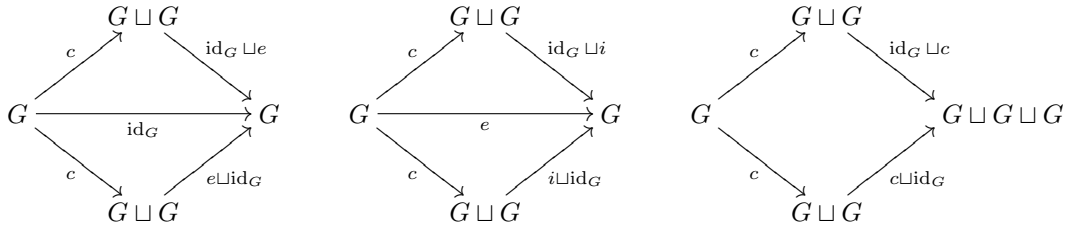


Abbildung (B.5): Die kommutativen Diagramme, die den Kogruppenobjektaxiomen entsprechen

ein Kogruppenobjekt in C. Dabei bezeichnen $i_1, i_2 \colon G \longrightarrow G \sqcup G$ die Strukturmorphismen des Koprodukts $G \sqcup G$, es bezeichnet $m_{G \sqcup G}$ die durch die Faktorisierung über Group gelieferte Gruppenverknüpfung auf $\mathrm{Mor}_C(G, G \sqcup G)$ und i_G bezeichnet die durch die Faktoriserung über Group gelieferte Inversenabbildung der Gruppe $\mathrm{Mor}_C(G, G)$.

Ist umgekehrt (G, c, i) ein Kogruppenobjekt in C, so ist für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ die Morphismenmenge $\mathrm{Mor}_C(G, X)$ bezüglich der Verknüpfung

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(G, X) \times \mathrm{Mor}_C(G, X) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(G, X) \\ (g, h) &\longmapsto (g \sqcup h) \circ c \end{aligned}$$

eine Gruppe (und die von Morphismen in C induzierten Abbildungen sind Gruppenhomomorphismen). Dadurch erhält man die gewünschte Faktorisierung von $\mathrm{Mor}_C(G, \cdot\,)$ über den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$. □

Wir wenden dies nun auf π_1 an:

Proposition B.7 ($(S^1, 1)$ als Kogruppenobjekt in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$)**.** *Seien* $i_1, i_2 \colon (S^1, 1) \longrightarrow (S^1, 1) \vee (S^1, 1)$ *die kanonischen Inklusionen der Summanden, sei*

$$\begin{aligned} c \colon (S^1, 1) &\longrightarrow (S^1, 1) \vee (S^1, 1) \\ [t] &\longmapsto \begin{cases} i_1([2 \cdot t]) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ i_2([2 \cdot t - 1]) & \text{falls } t \in [1/2, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

und sei

$$\begin{aligned} i \colon (S^1, 1) &\longrightarrow (S^1, 1) \\ [t] &\longmapsto [1 - t]. \end{aligned}$$

Dann sind c und i wohldefinierte punktierte stetige Abbildungen und $(S^1, [c]_*, [i]_*)$ ist ein Kogruppenobjekt in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$.

Beweisskizze. Das Koprodukt in der Kategorie $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ ist durch die Einpunktvereinigung (und die punktierten Homotopieklassen der kanonischen Inklusionen) gegeben. Insbesondere existieren alle Koprodukte in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$.

Sei $e\colon (S^1,1) \longrightarrow (S^1,1)$ die konstante punktierte Abbildung. Dann gilt

$$(\mathrm{id}_{(S^1,1)} \vee e) \circ c \simeq_* \mathrm{id}_{(S^1,1)} \simeq_* (e \vee \mathrm{id}_{(S^1,1)}) \circ c,$$
$$(\mathrm{id}_{(S^1,1)} \vee i) \circ c \simeq_* e \simeq_* (i \vee \mathrm{id}_{(S^1,1)}) \circ c,$$
$$(\mathrm{id}_{(S^1,1)} \vee c) \circ c \simeq_* (c \vee \mathrm{id}_{(S^1,1)}) \circ c;$$

entsprechende punktierte Homotopien können explizit angegeben werden. □

Korollar B.8 (Fundamentalgruppe)**.** *Also faktorisiert der Funktor* $\pi_1\colon \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}$ *über den Vergissfunktor* $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$*. Wir bezeichnen den zugehörigen Funktor* $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Group}$ *auch mit* π_1*. Dabei stimmen die Gruppenstruktur aus Proposition 2.4 und Proposition B.7 überein.*

Indem man Kogruppenobjektstrukturen auf $(S^1,1)$ in $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ mithilfe von π in die Sprache der Gruppentheorie übersetzt, kann man außerdem einsehen, dass die Kogruppenobjektstruktur auf $(S^1,1)$ im wesentlichen eindeutig bestimmt ist. Ähnlich sieht man außerdem, dass S^1 *keine* Kogruppenobjektstruktur in $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ zulässt.

C. Freie (amalgamierte) Produkte von Gruppen

Wir stellen im folgenden Konzepte aus der Gruppentheorie vor, die es erlauben Koprodukte und Pushouts in der Kategorie der Gruppen explizit anzugeben, und die eine Beschreibung von Gruppen durch sogenannte Erzeuger und Relationen liefern.

C.1. Freie (amalgamierte) Produkte

Wir beginnen mit dem freien Produkt von Gruppen; das freie Produkt einer Familie von Gruppen ist grob gesagt eine Gruppe, die von den gegebenen Gruppen erzeugt wird, in der aber außer den durch den Gruppenaxiomen vorgegebenen Relationen keine weiteren Beziehungen zwischen den Elementen aus verschiedenen Gruppen der Familie bestehen. Dies kann z.B. durch reduzierte Wörter konstruiert werden:

Definition C.1 (freies Produkt von Gruppen)**.** Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen (deren paarweiser Schnitt jeweils nur das neutrale Element sei); zu $g \in \bigcup_{i\in I} G_i \setminus \{1\}$ sei $i(g) \in I$ der Index mit $g \in G_{i(g)}$.

- Eine endliche (potentiell leere) Folge $(s_1, \ldots, s_n)$ mit $n \in \mathbb{N}$ von nicht-trivialen Elementen aus $\bigcup_{i\in I} G_i$ ist ein *reduziertes Wort (über der Familie $(G_i)_{i\in I}$)*, wenn für alle $j \in \{1, \ldots, n-1\}$ gilt, dass $i(s_j) \neq i(s_{j+1})$ ist.
- Wir schreiben $\bigstar_{i\in I} G_i$ für die Menge aller reduzierten Wörter über der Familie $(G_i)_{i\in I}$.
- Auf $\bigstar_{i\in I} G_i$ definieren wir wie folgt eine Verknüpfung (durch Hintereinanderschreiben und Reduzieren an der Schnittstelle der Wörter):

$$\bigstar_{i\in I} G_i \times \bigstar_{i\in I} G_i \longrightarrow \bigstar_{i\in I} G_i$$

$$\big(s = (s_1, \ldots, s_n), t = (t_1, \ldots, t_m)\big) \longmapsto \begin{cases} (s_1, \ldots, s_{n-k(s,t)}, t_{k(s,t)+1}, \ldots, t_m) & ① \\ (s_1, \ldots, s_{n-k(s,t)} \cdot t_{k(s,t)+1}, \ldots, t_m) & ② \end{cases}$$

  Dabei ist $k(s,t) \in \{0, \ldots, \min(n,m)\}$ das größte $k \in \{0, \ldots, \min(n,m)\}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\forall_{j\in\{1,\ldots,k\}} \quad i(s_{n-j+1}) = i(t_j) \wedge s_{n-j+1} = t_j^{-1}.$$

  Der Fall ① tritt ein, wenn $i(s_{n-k(s,t)}) \neq i(t_{k(s,t)+1})$ ist; der Fall ② tritt ein, wenn $i(s_{n-k(s,t)}) = i(t_{k(s,t)+1})$ ist.
- Man nennt $\bigstar_{i\in I}$ zusammen mit der obigen Verknüpfung das *freie Produkt der Gruppen* $(G_i)_{i\in I}$.

Bemerkung C.2. Das freie Produkt $\bigstar_{i\in I} G_i$ einer Familie $(G_i)_{i\in I}$ von Gruppen ist bezüglich der oben angegebenen Verknüpfung tatsächlich eine Gruppe. Die kanonischen Inklusionen $(G_i \longrightarrow \bigstar_{j\in I} G_j)_{i\in I}$, die durch Interpretation der Gruppenelemente als reduzierte Wörter der Länge 1 gegeben sind, sind Gruppenhomomorphismen.

Freie Produkte liefern ein explizites Modell von Koprodukten von Gruppen:

Proposition C.3 (Koprodukte von Gruppen)**.** *Sei $(G_i)_{i\in I}$ eine Familie von Gruppen. Dann ist $\bigstar_{i\in I} G_i$ zusammen mit den kanonischen Inklusionen $(G_i \longrightarrow \bigstar_{j\in I} G_j)_{i\in I}$ das Koprodukt der Familie $(G_i)_{i\in I}$ in der Kategorie der Gruppen.*

„Verklebt“ man zwei Gruppen über einer weiteren Gruppe, so gelangt man zum freien amalgamierten Produkt.

Definition C.4 (freies amalgamiertes Produkt von Gruppen)**.** Seien G_0, G_1 und G_2 Gruppen und seien $i_1 \colon G_0 \longrightarrow G_1$ und $i_2 \colon G_0 \longrightarrow G_2$ Gruppenhomomorphismen. Das zugehörige *freie amalgamierte Produkt von G_1 und G_2 über G_0* ist durch

$$G_1 *_{G_0} G_2 := (G_1 * G_2)/N$$

definiert, wobei $N \subset G_1 * G_2$ der bezüglich Inklusion kleinste Normalteiler von $G_1 * G_2$ ist, der die Menge $\{i_1(g) \cdot i_2(g)^{-1} \mid g \in G_0\}$ enthält.

Bemerkung C.5. Auch das freie amalgamierte Produkt besitzt eine explizite Beschreibung durch geeignete Normalformen.

Freie amalgamierte Produkte von Gruppen lieferen ein Modell für Pushouts in der Kategorie der Gruppen:

Proposition C.6 (Pushouts von Gruppen)**.** *Seien G_0, G_1 und G_2 Gruppen und seien $i_1 \colon G_0 \longrightarrow G_1$ und $i_2 \colon G_0 \longrightarrow G_2$ Gruppenhomomorphismen. Seien $j_1 \colon G_1 \longrightarrow G_1 *_{G_0} G_2$ und $j_2 \colon G_2 \longrightarrow G_1 *_{G_0} G_2$ die von den kanonischen Inklusionen $G_1 \longrightarrow G_1 * G_2$ bzw. $G_2 \longrightarrow G_1 * G_2$ induzierten Gruppenhomomorphismen. Dann ist*

$$\begin{array}{ccc} G_0 & \xrightarrow{i_1} & G_1 \\ {\scriptstyle i_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_1} \\ G_2 & \xrightarrow[j_2]{} & G_1 *_{G_0} G_2 \end{array}$$

ein Pushout in der Kategorie der Gruppen.

C.2. Freie Gruppen

Analog zu Basen in Vektorräumen gibt es auch für Gruppen einen Begriff für Erzeugendensysteme, über die sich leicht Gruppenhomomorphismen definieren lassen:

Definition C.7 (freies Erzeugendensystems, freie Gruppe, Rang freier Gruppen)**.**

- Sei G eine Gruppe. Eine Teilmenge $X \subset G$ ist ein *freies Erzeugendensystem von G*, wenn folgendes gilt: Die Menge X erzeugt G und für jede Gruppe H und jede Abbildung $\varphi \colon X \longrightarrow H$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{\varphi} \colon G \longrightarrow H$ mit $\widetilde{\varphi}|_X = \varphi$.
- Eine *freie Gruppe* ist eine Gruppe, die ein freies Erzeugendensystem besitzt; die Mächtigkeit eines freien Erzeugendensystems einer freien Gruppe wird auch als *Rang* der freien Gruppe bezeichnet.

Caveat C.8. Nicht jede Gruppe besitzt ein freies Erzeugendensystem! Zum Beispiel sind $\mathbb{Z}/2$ und $\mathbb{Z}^2$ *nicht* frei.

Durch Vergleich der entsprechenden universellen Eigenschaften erhält man:

Proposition C.9 (Existenz freier Gruppen)**.** *Sei X eine Menge, sei $G := \bigstar_X \mathbb{Z}$ das zugehörige freie Produkt und zu jedem $x \in X$ sei $i_x \colon \mathbb{Z} \longrightarrow G$ die Inklusion des x-ten Faktors. Dann ist $\{i_x(1) \mid x \in X\}$ ein freies Erzeugendensystem von G.*

Proposition C.10 (Isomorphie freier Gruppen und Rang)**.** *Sind G und G' freie Gruppen mit freien Erzeugendensystemen X bzw. X', so sind G und G' genau dann isomorph, wenn X und X' gleichmächtig sind. (Insbesondere ist somit der Rang freier Gruppen wohldefiniert und invariant unter Gruppenisomorphismen.)*

D. Gruppenoperationen

Wir erinnern kurz an die wichtigsten Begriffe über Gruppenoperationen (von diskreten Gruppen) – Gruppenoperationen sind eine Verallgemeinerung des Symmetriebegriffs:

Definition D.1 (Gruppenoperation)**.** Sei C eine Kategorie, sei X ein Objekt in C und sei G eine Gruppe.

- Die *Automorphismengruppe von X in C* ist die Gruppe $\mathrm{Aut}_C(X)$ (bezüglich Verknüpfung in C) der Isomorphismen von X nach X in der Kategorie C.
- Eine *Gruppenoperation von G auf X in C* ist ein Gruppenhomomorphismus

$$G \longrightarrow \mathrm{Aut}_C(X).$$

  Wir schreiben dafür kurz $G \curvearrowright X$.
- Eine *Rechtsoperation von G auf X in C* ist ein Gruppenantimorphismus

$$\varphi\colon G \longrightarrow \mathrm{Aut}_C(X)$$

  d.h. für alle $g, h \in G$ gilt $\varphi(g \cdot h) = \varphi(h) \circ \varphi(g)$. Wir schreiben dafür kurz $X \curvearrowleft G$.

Bemerkung D.2 (Gruppenoperationen in Set und Top)**.** Sei G eine Gruppe und X eine Menge [ein topologischer Raum]. Dass $\varphi\colon G \curvearrowright X$ eine Gruppenoperation von G auf X in Set [in Top] ist, ist äquivalent dazu, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x := \big(\varphi(g)\big)(x) \end{aligned}$$

die folgenden Eigenschaften besitzt:

- Für alle $g \in G$ ist die Abbildung $g \cdot \ \cdot : X \longrightarrow X$ eine Abbildung von Mengen [eine stetige Abbildung].
- Für alle $x \in X$ ist $e \cdot x = x$.
- Für alle $x \in X$ und alle $g, h \in G$ gilt

$$(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x).$$

[Gruppenoperationen in Top nennen wir auch *stetige Operationen*.]

Definition D.3 (freie Gruppenoperation, Standgruppe, Orbit, Bahnenraum, transitiv)**.** Sei $G \curvearrowright X$ eine Gruppenoperation von G auf X in Set [in Top].

- Diese Operation ist *frei*, falls für alle $x \in X$ und alle $g \in G \setminus \{e\}$ gilt, dass $g \cdot x \neq x$ ist.
- Sei $x \in X$. Die *Standgruppe* (auch *Stabilisator*) der Operation im Punkt x ist die Untergruppe

$$G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G.$$

- Ist $x \in X$, so ist

$$G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset X$$

  die *Bahn von x* (auch *Orbit von x*).

– Der Quotient
$$G \setminus X := \{G \cdot x \mid x \in X\}$$
ist der *Bahnenraum* dieser Operation. [Für Operationen in Top versehen wir den Bahnenraum mit der von der kanonischen Projektion $X \longrightarrow G \setminus X$ induzierten Quotiententopologie.]
– Diese Operation ist *transitiv*, wenn $|G \setminus X| = 1$ ist, d.h. wenn alle Punkte in X im selben Orbit liegen.

Analog sind die entsprechenden Begriffe für Rechtsoperationen definiert. Für den Bahnenraum einer Rechtsoperation $X \curvearrowleft G$ schreiben wir X/G.

Caveat D.4. Die Quotiententopologie auf Bahnenräumen von Gruppenoperationen in Top kann sehr schlechte Eigenschaften haben, selbst wenn die Gruppe und der Raum auf dem die Gruppe operiert gute Eigenschaften haben; um eine gute Quotiententopologie zu erhalten, muss die *Operation* gute Eigenschaften besitzen.

E. Homologische Algebra

Dieses Kapitel enthält die für die algebraische Topologie nötigen Grundlagen aus der homologischen Algebra. Homologische Algebra ist die Algebra von exakten bzw. nicht-exakten Sequenzen und Funktoren, die Exaktheit erhalten bzw. nicht erhalten.

Wir betrachten der Einfachheit halber nur homologische Algebra in Modulkategorien statt in allgemeinen sogenannten abelschen Kategorien; nach dem Einbettungssatz von Freyd-Mitchell ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung.

E.1. Exakte Sequenzen

Wir geben eine kurze Einführung in exakte Sequenzen; wir formulieren alles für Linksmoduln – analog geht dies natürlich auch für Rechtsmoduln.

Setup E.1. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition E.2 ((kurze) exakte Sequenz)**.**

- Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist *exakt an der Stelle* B, wenn $\operatorname{im} f = \ker g$ ist.
- Wir nennen eine Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

  in ${}_R\mathsf{Mod}$ eine *kurze exakte Sequenz in* ${}_R\mathsf{Mod}$, wenn die Sequenz an allen Stellen exakt ist (d.h. f ist injektiv, g ist surjektiv, und $\operatorname{im} f = \ker g$).
- Eine $\mathbb{N}$- oder $\mathbb{Z}$-indizierte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow A_k \xrightarrow{f_k} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-2} \longrightarrow \cdots$$

  in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist.

Beispiel E.3. Die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & (x,0) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (x,y) & \longmapsto & y & & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & 2 \cdot x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \longmapsto & [x] & & \end{array}$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} = \mathsf{Ab}$ sind exakt; man beachte dabei, dass die mittleren Moduln *nicht* isomorph sind, obwohl die äußeren isomorph sind. Die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \longmapsto & x & & \end{array}$$

ist *nicht* exakt.

Caveat E.4. Ist S ein Ring mit Eins, so bilden (sogar additive) Funktoren ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ im allgemeinen exakte Sequenzen *nicht* auf exakte Sequenzen ab.

Besonders einfache exakte Sequenzen sind die sogenannten spaltenden exakten Sequenzen (die sich außerdem auch unter Funktoren besser verhalten als allgemeine exakte Sequenzen):

Proposition E.5 (spaltende exakte Sequenzen)**.** *Sei*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt einen R-Modulhomomorphismus $r\colon C \longrightarrow B$ mit $p \circ r = \mathrm{id}_C$.*
2. *Es gibt einen R-Modulhomomorphismus $s\colon B \longrightarrow A$ mit $s \circ i = \mathrm{id}_A$.*

Falls diese Aussagen zutreffen, nennt man die obige Sequenz eine spaltende kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ *und in diesem Fall sind*

$$\begin{array}{ccccc} A \oplus C & & \longrightarrow & & B & & \longrightarrow & & A \oplus C \\ (a,c) & & \longmapsto & & (i(a), r(c)) & & & & \\ & & & & b & & \longmapsto & & (s(b), p(b)) \end{array}$$

Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$*.*

Beweisskizze. Wir zeigen die Implikation $2 \Longrightarrow 1$: Sei also $s\colon B \longrightarrow A$ ein Homomorphismus mit $s \circ i = \mathrm{id}_A$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \widetilde{r}\colon B &\longrightarrow B \\ b &\longmapsto b - i \circ s(b). \end{aligned}$$

Dann ist $\ker p \subset \ker \widetilde{r}$, denn: Sei $b \in \ker p$. Wegen der Exaktheit existiert also ein $a \in A$ mit $i(a) = b$ und es folgt

$$\widetilde{r}(b) = i(a) - i \circ s(i(a)) = i(a) - i(\mathrm{id}_A(a)) = 0.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten induziert $\widetilde{r}$ somit einen Homomorphismus $r\colon C \cong B/\ker p \longrightarrow B$ und dieser erfüllt nach Konstruktion $p \circ r = \mathrm{id}_C$.

Ähnlich zeigt man die Implikation $1 \Longrightarrow 2$.

Falls die Aussagen 1 und 2 erfüllt sind, rechnet man leicht nach, dass die angegebenen Homomorphismen zwischen B und $A \oplus C$ bijektiv (und somit Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$) sind. □

Beim Vergleich von exakten Sequenzen ist oft das Fünfer-Lemma nützlich:

Proposition E.6 (Fünfer-Lemma)**.** *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_D} & & \downarrow{\scriptstyle f_E} \\ A' & \xrightarrow[a']{} & B' & \xrightarrow[b']{} & C' & \xrightarrow[c']{} & D' & \xrightarrow[d']{} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Dann gilt:

1. *Sind f_B, f_D injektiv und ist f_A surjektiv, so ist f_C injektiv.*
2. *Sind f_B, f_D surjektiv und ist f_E injektiv, so ist f_C surjektiv.*
3. *Insbesondere gilt: Sind f_A, f_B, f_D, f_E Isomorphismen, so ist f_C ein Isomorphismus.*

Beweisskizze. Wir beweisen den ersten Teil mithilfe einer sogenannten Diagrammjagd (viele Aussagen in der homologischen Algebra werden auf diese Weise bewiesen). Der Beweis des zweiten Teils geht analog; der dritte Teil ist eine direkte Folgerung aus den ersten beiden Teilen.

Es seien also f_B und f_D injektiv und f_A sei surjektiv. Sei $x \in C$ mit $f_C(x) = 0$. Dann ist $x = 0$, denn (Abbildung (E.7)):

- Wegen $f_D \circ c(x) = c' \circ f_C(x) = c'(0) = 0$ und der Injektivität von f_D folgt $c(x) = 0$.
- Wegen $\operatorname{im} b = \ker c$ existiert ein $y \in B$ mit $b(y) = x$.
- Wegen $b' \circ f_B(y) = f_C \circ b(y) = f_C(x) = 0$ und $\operatorname{im} a' = \ker b'$ folgt: Es gibt ein $z' \in A'$ mit $a'(z') = f_B(y)$.
- Da f_A surjektiv ist, existiert ein $z \in A$ mit $f_A(z) = z'$.
- Dabei ist $a(z) = y$, denn: Es gilt

  $$f_B\big(a(z)\big) = a' \circ f_A(z) = a'(z') = f_B(y)$$

  und f_B ist injektiv.
- Also ist (wegen $\operatorname{im} a \subset \ker b$)

  $$x = b(y) = b \circ a(z) = 0,$$

  wie gewünscht. □

Für den Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 3.26) verwenden wir die folgende Konstruktion langer exakter Sequenzen:

Proposition E.8 (algebraische Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{c_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{a_k} & B_k & \xrightarrow{b_k} & C_k & \xrightarrow{c_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{a_{k-1}} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{A,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{B,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{C,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{A,k-1}} & & \\ \cdots & \xrightarrow[c'_{k+1}]{} & A'_k & \xrightarrow[a'_k]{} & B'_k & \xrightarrow[b'_k]{} & C'_k & \xrightarrow[c'_k]{} & A'_{k-1} & \xrightarrow[a'_{k-1}]{} & \cdots \end{array}$$

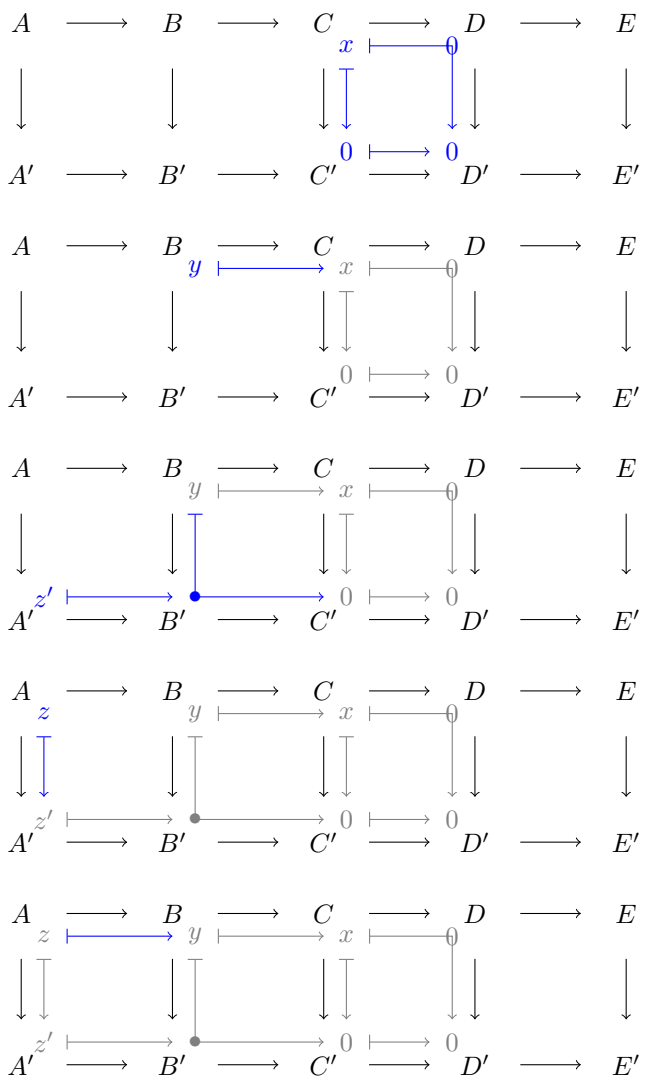


Abbildung (E.7): Die Diagrammjagd aus dem Fünfer-Lemma

ein ($\mathbb{Z}$-indiziertes) kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Außerdem sei $f_{C,k}\colon C_k \longrightarrow C'_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k\colon B'_k \longrightarrow A_{k-1}.$$

Dann ist die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} A_k \xrightarrow{(f_{A,k},-a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k \oplus f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\Delta_k} A_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

exakt.

Beweisskizze. Dies folgt aus einer Diagrammjagd. □

E.2. Kettenkomplexe und Homologie

Wir führen nun allgemeine algebraische Begrifflichkeiten zur Konstruktion von Homologie ein; diese beruhen historisch auf den ersten geometrischen Homologietheorien.

Setup E.9. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition E.10 (Kettenkomplex, Zykel, Rand)**.** Ein *Links-R-Modul-Kettenkomplex* ist eine Paar $C = (C_*, \partial_*)$, wobei $C_* = (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Links-R-Moduln (den sogenannten *Kettenmoduln*) und $\partial_* = (\partial_k\colon C_k \longrightarrow C_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von R-Modulhomomorphismen (den sogenannten *Randoperatoren* oder *Differentialen*) mit

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$.

- Die Elemente von C_k heißen *k-Ketten*.
- Die Elemente von $Z_kC := \ker \partial_k$ heißen *k-Zykel*.
- Die Elemente von $B_kC := \operatorname{im} \partial_{k+1}$ heißen *k-Ränder*.

Analog kann man z.B. auch $\mathbb{N}$-indizierte Kettenkomplexe definieren.

Beispiel E.11 (Kettenkomplexe)**.**

- Lange exakte Sequenzen liefern Kettenkomplexe, aber nicht alle Kettenkomplexe sind exakt.
- Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex und ist $Z \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so ist
$$Z \otimes_R C := \big((Z \otimes_R C_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\mathrm{id}_Z \otimes_R \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$
ein Kettenkomplex abelscher Gruppen.

Caveat E.12. Ist ein Kettenkomplex C exakt und ist $Z \in \mathsf{Mod}_R$, so ist $Z \otimes_R C$ im allgemeinen *nicht* exakt!

Beispiel E.13 (Kettenkomplexe simplizialer Moduln)**.** Sei $S\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein Funktor (ein sogenannter *simplizialer Links-R-Modul*); dabei bezeichnet Δ^{op} die duale

Kategorie der Simplexkategorie (die man durch „Umdrehen“ der Morphismen erhält). Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$C_k(S) := \begin{cases} S\big(\Delta(k)\big) & \text{falls } k \geq 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

$$\partial_k := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot S(d_j^k) & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{falls } k \leq 0; \end{cases}$$

dabei ist $d_j^k \in \mathrm{Mor}_\Delta(\Delta(k-1), \Delta(k))$ der Morphismus, dessen Bild $\{0, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ ist. Wir schreiben

$$C(S) := \big((C_k(S))_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big).$$

Dann ist $C(S)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex. Dies ist eine der zentralen Konstruktionen von Kettenkomplexen, die hinter vielen Homologietheorien steckt.

Die passenden strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Kettenkomplexen sind Kettenabbildungen:

Definition E.14 (Kettenabbildung)**.** Seien $C = (C_*, \partial_*^C)$ und $D = (D_*, \partial_*^D)$ Links-R-Modul-Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f\colon C \longrightarrow D$ ist eine Folge $(f_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\partial_k^D \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^C$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial_k^C} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_k} & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_k & \xrightarrow[\partial_k^D]{} & D_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Beispiel E.15 (Kettenabbildungen)**.**

- Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Kettenkomplex, so ist $\mathrm{id}_C := (\mathrm{id}_{C_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C \longrightarrow C$.
- Die gradweise Komposition von Kettenabbildungen ist eine Kettenabbildung.

Somit erhalten wir eine Kategorie von Kettenkomplexen:

Definition E.16 (Kategorie der Kettenkomplexe)**.** Die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Links-R-Kettenkomplexe besteht aus:

- Objekte: die Klasse aller Links-R-Kettenkomplexe,
- Morphismen: Kettenabbildungen von Links-R-Kettenkomplexen,
- Verknüpfungen: gradweise Komposition von Kettenabbildungen.

Beispiel E.17 (Kettenkomplexe von simplizialen Moduln, funktoriell)**.** Zum Beispiel lässt sich die Konstruktion aus Beispiel E.13 zu einem Funktor

$$\Delta({}_R\mathsf{Mod}) \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$$

erweitern. Dabei ist $\Delta({}_R\mathsf{Mod})$ die Kategorie, deren Objekte Funktoren $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ und deren Morphismen natürliche Transformationen zwischen solchen Funktoren sind.

Wir können nun Homologie für Kettenkomplexe definieren:

Definition E.18 (Homologie)**.** Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Die *Homologie von* C ist die Folge $H_*(C) := (H_k(C))_{k\in\mathbb{Z}}$, wobei wir für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(C) := \ker \partial_k \,/\, \operatorname{im} \partial_{k+1} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$$

definieren.

Homologie misst also die Abweichung von Exaktheit:

Bemerkung E.19 (Homologie vs. Exaktheit)**.** Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann sind äquivalent:

1. Die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

   ist exakt.
2. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $H_k(C) \cong 0$.

Beispiel E.20. Sei C der Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

abelscher Gruppen (wobei sich die nicht-trivialen Moduln im Grad 0, 1, 2 befinden). Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$H_k(C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}. \end{cases}$$

Caveat E.21. Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so gilt im allgemeinen für $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(Z \otimes_R C) \ncong Z \otimes_R H_k(C).$$

Proposition E.22 (Homologie als Funktor)**.**

1. *Sei $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kettenabbildung in ${}_R\mathsf{Ch}$. Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei*

$$\begin{aligned} H_k(f)\colon H_k(C) &\longrightarrow H_k(D) \\ [c] &\longmapsto \big[f_k(c)\big]. \end{aligned}$$

   Dann ist $H_k(f)$ ein wohldefinierter Links-R-Modul-Homomorphismus.
2. *Dies macht Homologie zu einem Funktor*

$$H_*\colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$

   Dabei ist ${}_R\mathsf{Grad}$ die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten Links-R-Moduln (d.h. $\mathbb{Z}$-Folgen von Links-R-Moduln mit Folgen von Homomorphismen und komponentenweiser Komposition).

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Aus der Definition von Kettenabbildungen folgt:

- Ist $c \in C_k$ ein Zykel, so ist auch $f_k(c)$ ein Zykel.
- Sind $c, c' \in C_k$ Zykel, die dieselbe Homologieklasse repräsentieren (d.h. sich um einen Rand in C unterscheiden), so unterscheiden sich auch $f_k(c)$ und $f_k(c')$ um einen Rand in D und liefern somit dieselbe Homologieklasse.

Also ist $H_k(f)$ wohldefiniert. Offenbar ist $H_k(f)$ mit der Modulstruktur verträglich.
Der zweite Teil folgt aus der Konstruktion im ersten Teil. □

Zum Abschluss dieser Einführung in die Grundbegriffe von Kettenkomplexen und Homologie leiten wir die wichtigste Quelle für lange exakte Homologieseuqenzen her:

Satz E.23 (algebraische lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Ch}$ (d.h. die entsprechenden Sequenzen in jedem Grad sind exakt in ${}_R\mathsf{Mod}$). Dann gibt es eine lange exakte Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(p)} H_k(C) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Diese ist im folgenden Sinne natürlich: Ist

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit exakten Zeilen, so ist das zugehörige Leiterdiagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(A) & \xrightarrow{H_k(i)} & H_k(B) & \xrightarrow{H_k(p)} & H_k(C) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_A)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_B)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_C)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{k-1}(f_A)} & & \\ \cdots & \xrightarrow[\partial_{k+1}]{} & H_k(A') & \xrightarrow[H_k(i')]{} & H_k(B') & \xrightarrow[H_k(p')]{} & H_k(C') & \xrightarrow[\partial_k]{} & H_{k-1}(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommutativ (mit exakten Zeilen).

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir konstruieren den Verbindungshomomorphismus

$$\partial_k \colon H_k(C) \longrightarrow H_{k-1}(A)$$

wie folgt: Sei $\gamma \in H_k(C)$; sei $c \in C_k$ ein Zykel, der γ repräsentiert. Da $p_k \colon B_k \longrightarrow C_k$ surjektiv ist, existiert ein $b \in B_k$ mit

$$p_k(b) = c.$$

Da p eine Kettenabbildung ist, ist $p_{k-1} \circ \partial_k^B(b) = \partial_k^C \circ p_k(b) = \partial_k^C(c) = 0$; aufgrund der Exaktheit im Grad k existiert somit ein $a \in A_{k-1}$ mit

$$i_{k-1}(a) = \partial_k^B(b).$$

Wir nennen in dieser Situation (a, b, c) ein *kompatibles Tripel für* γ und definieren

$$\partial_k(\gamma) := [a] \in H_{k-1}(A).$$

Mit einfachen Diagrammjagden zeigt man nun:

- Ist (a, b, c) ein kompatibles Tripel für γ, so ist $a \in A_{k-1}$ ein Zykel und repräsentiert somit tatsächlich eine Klasse in $H_{k-1}(A)$.
- Sind (a, b, c) und (a', b', c') kompatible Tripel für γ, so ist $[a] = [a']$ in $H_{k-1}(A)$.

Daran lässt sich leicht ablesen, dass ∂_k ein Homomorphismus ist und dass ∂_k natürlich ist.

Weitere Diagrammjagden liefern, dass die entstehende lange Sequenz exakt ist. □

E.3. Kettenhomotopie

Im folgenden studieren wir einen algebraischen Homotopiebegriff für Kettenabbildungen.

Setup E.24. In diesem Abschnitt sei R ein Ring mit Eins.

Wir erinnern uns zunächst an den Homotopiebegriff in Top: Stetige Abbildungen $f, g\colon X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen sind homotop, wenn es eine stetige Abbildung $h\colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit

$$h \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad h \circ i_1 = g$$

gibt; dabei bezeichnen $i_0\colon X \hookrightarrow X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ und $i_1\colon X \hookrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ die kanonische Inklusion als Boden bzw. Deckel des Zylinders über X.

Wir übersetzen dies nun in die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Kettenkomplexe: Als ersten Schritt modellieren wir das Intervall $[0,1]$ durch einen geeigneten Kettenkomplex (Abbildung (E.26)):

Definition E.25 (algebraisches Modell für $[0,1]$)**.** Sei $I \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ der Kettenkomplex

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\
\cdots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \cdots \\
 & & & & & & & x & \longmapsto & (-x, x) & & & & &
\end{array}$$

Das Produkt topologischer Räume ersetzen wir durch das Tensorprodukt von Kettenkomplexen; die Definition leitet sich dabei von dem Gedanken ab, dass die Kettenmoduln in Grad k Information über k-dimensionale Phänomene enthalten und sich daher die Grade der Tensorfaktoren jeweils auch zum entsprechenden Grad summieren sollten:

Grad 1		Grad 0
$\mathbb{Z}$	$\longrightarrow$	$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$
x	$\longmapsto$	$(-x, x)$

Abbildung (E.26): ein algebraisches Modell für $[0, 1]$

Definition E.27 (Tensorprodukt von Kettenkomplexen)**.** Sei $C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$ und $D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann definieren wir $C \otimes_R D \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ durch

$$(C \otimes_R D)_k := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C_j \otimes_R D_{k-j}$$

und die Randoperatoren

$$\begin{aligned}(C \otimes_R D)_k &\longrightarrow (C \otimes_R D)_{k-1} \\ C_j \otimes_R D_{k-j} \ni c \otimes d &\longmapsto \partial^C_j c \otimes d + (-1)^j \cdot c \otimes \partial^D_{k-j} d\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Dies ist tatsächlich ein Kettenkomplex!) Man beachte dabei: Trägt C auch noch eine Linksstruktur bezüglich einem Ring S, so vererbt sich diese Struktur auf das Tensorproduk $C \otimes_R D$.

Bemerkung E.28 (Wahl von Vorzeichen)**.** Wir halten uns bei der Wahl von Vorzeichen an die folgende Konvention: Wird ein Randoperator an einem Element „vorbeigezogen“, so führen wir das Vorzeichen

$$(-1)^{\text{Grad dieses Elements}}$$

ein. Man beachte jedoch, dass in der Literatur manchmal auch andere Vorzeichenkonventionen getroffen werden. Bei der Übernahme von Formeln ist also Vorsicht geboten.

Bemerkung E.29 (Funktorialität des Tensorprodukts)**.** Seien $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$, seien $D, D' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ch}_R}(C, C')$ und $g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, D')$. Dann ist

$$\begin{aligned}f \otimes_R G \colon C \otimes_R D &\longrightarrow C' \otimes_R D' \\ c \otimes d &\longmapsto f(c) \otimes g(d)\end{aligned}$$

eine wohldefinierte Kettenabbildung in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.

Als nächsten Schritt modellieren wir die Inklusionen von Boden und Deckel von Zylindern:

Definition E.30 (algebraisches Modell der Inklusionen von Boden und Deckel in Zylindern)**.** Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so definieren wir die Kettenabbildungen

$$\begin{aligned}i_0 \colon C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I \\ C_k \ni c &\longmapsto (c, 0, 0) \in C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \cong (C \otimes_{\mathbb{Z}} I)_k\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i_1 \colon C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I \\ C_k \ni c &\longmapsto (0, 0, c) \in C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \cong (C \otimes_{\mathbb{Z}} I)_k.\end{aligned}$$

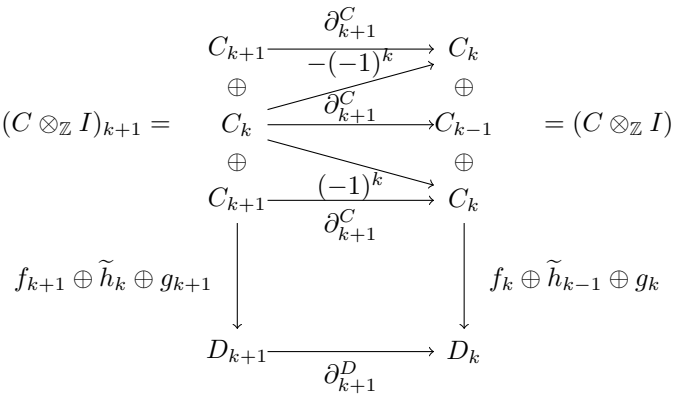


Abbildung (E.32): Herleitung des Begriffs der Kettenhomotopie

Bemerkung E.31. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Eine Kettenabbildung $h\colon C \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow D$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$ entspricht einer Familie $(\widetilde{h}_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_{k+1}))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\partial^D_{k+1} \circ \widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{k-1} \circ \partial^C_k + (-1)^k \cdot g_k - (-1)^k \cdot f_k$$

(Abbildung (E.32)) bzw.

$$\partial^D_{k+1} \circ (-1)^k \cdot \widetilde{h}_k + (-1)^{k-1} \cdot \widetilde{h}_{k-1} \circ \partial^C_k = g_k - f_k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Man definiert daher:

Definition E.33 (kettenhomotop, nullhomotop, kontraktibel)**.** Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.

- Kettenabbildungen $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ heißen *kettenhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, wenn es eine Folge $h = (h_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_{k+1}))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

  $$\partial^D_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial^C_k = g_k - f_k$$

  für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt. Man nennt dann h eine *Kettenhomotopie von f nach g (in ${}_R\mathsf{Ch}$)* und schreibt $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g$.
- Wir nennen $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ eine *Kettenhomotopieäquivalenz (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, falls es ein $g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, C)$ mit

  $$f \circ g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_D \quad \text{und} \quad g \circ d \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_C$$

  gibt. In diesem Fall schreiben wir auch $C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} D$.
- Kettenabbildungen, die (in ${}_R\mathsf{Ch}$) zur Nullabbildung kettenhomotop sind, heißen *nullhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*.

– Der Kettenkomplex C ist *kontraktibel (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, falls id_C nullhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$) ist (bzw. äquivalent, falls C zum Nullkomplex kettenhomotopieäquivalent ist). Homotopien (in ${}_R\mathsf{Ch}$) von id_C zur Nullabbildungen werden auch *Kettenkontraktionen (in ${}_R\mathsf{Ch}$) von C* genannt.

Beispiel E.34. Sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann ist $i_0 \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} i_1 \colon C \longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I$.
Wir betrachten außerdem die Kettenabbildung

$$p \colon C \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow C$$
$$C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \ni (c_0, c, c_1) \longrightarrow c_0 + c_1 \in C_k$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$. Dann gilt $p \circ i_0 = \mathrm{id}_C$ und $i_0 \circ p \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C \otimes_{\mathbb{R}} I}$. Also ist

$$C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C \otimes_{\mathbb{Z}} I.$$

Analog zur topologischen Situation gilt:

Proposition E.35 (grundlegende Eigenschaften von Kettenhomotopie)**.**

1. *Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, f', g, g' \in \mathrm{Mor}({}_R\mathsf{Ch})$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$ und $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann gilt*
$$a \cdot f + b \cdot g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} a \cdot f' + b \cdot g'$$
für alle $a, b \in R$.
2. *Sind $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so ist „$\simeq_{{}_R\mathsf{Ch}}$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$.*
3. *Seien $C, D, E \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, seien $f, f' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ und $g, g' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, E)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$ bzw. $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann folgt*
$$g \circ f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g' \circ f'.$$
4. *Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, sei $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ und seien $f, f' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$. Dann gilt*
$$Z \otimes_R f \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} Z \otimes_R f'.$$
5. *Seien $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$, $D, D' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, f' \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ch}_R}(C, C')$, $g, g' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, D')$ mit $f \simeq_{\mathsf{Ch}_R} f'$ bzw. $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann folgt*
$$f \otimes_R g \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} f' \otimes_R g'.$$

Beweisskizze. All diese Eigenschaften lassen sich direkt anhand der Definitionen nachrechnen. □

Insbesondere ist die folgende Kategorie wohldefiniert:

Definition E.36 (Homotopiekategorie der Kettenkomplexe)**.** Die *Homotopiekategorie der Kettenkomplexe ${}_R\mathsf{Ch}$* ist die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}_{\mathsf{h}}$, die durch die folgenden Daten gegeben ist:

– Objekte: Sei $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}) := \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.
– Morphismen: Zu $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ sei

$$[C, D] := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}}(C, d) := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D) \,/{\simeq_{{}_R\mathsf{Ch}}} .$$

– Verknüpfungen: repräsentantenweise Verknüpfung von Kettenabbildungen.

Die zentrale Eigenschaft des Begriffs der Kettenhomotopie ist, dass Homologie in diesem algebraischen Sinne homotopieinvariant ist:

Proposition E.37 (Homologie von Kettenkomplexen ist homotopieinvariant)**.** *Der Funktor* $H_*\colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$ *faktorisiert über* ${}_R\mathsf{Ch}_h$.

Beweisskizze. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g$; sei etwa h eine solche Kettenhomotopie. Dann ist $H_k(f) = H_k(g)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, denn: Ist $c \in C_k$ ein Zykel, so gilt nach Definition (in $H_k(D)$)

$$\begin{aligned} H_k(f)[c] &= \big[f_k(c)\big] \\ &= \big[g_k(c) - \partial^D_{k+1} \circ h_k(c) - h_{k-1} \circ \partial^C_k(c)\big] \\ &= \big[g_k(c) - \partial^D_{k+1} \circ h_k(c) - 0\big] \\ &= \big[g_k(c)\big] \\ &= H_k(g)[c], \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Analog zum topologischen Fall gibt es auch im Kontext von Kettenkomplexen Abbildungskegel:

Definition E.38 (Abbildungskegel von Kettenabbildungen)**.** Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Der *Abbildungskegel von* f ist der Kettenkomplex $\mathrm{Cone}(f) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ mit

$$\big(\mathrm{Cone}(f)\big)_k := C_{k-1} \oplus D_k$$

und den Randoperatoren

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Cone}(f)\big)_k &\longmapsto \big(\mathrm{Cone}(f)\big)_{k-1} \\ C_{k-1} \oplus D_k \ni (c, d) &\longmapsto \big(\partial^C_{k-1} c, \partial^D_k d + (-1)^k \cdot f_{k-1}(c)\big) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Dies ist tatsächlich ein Kettenkomplex.)

Im algebraischen Kontext spiegeln Abbildungskegel die Eigenschaften von Kettenabbildungen sogar noch etwas besser wider als im topologischen Fall:

Proposition E.39 (Abbildungskegel und Isomorphismen)**.** *Seien* $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ *und sei* $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$.

1. *Dann ist* $f\colon C \longrightarrow D$ *genau dann eine Kettenhomotopieäquivalenz in* ${}_R\mathsf{Ch}$*, wenn* $\mathrm{Cone}(f)$ *in* ${}_R\mathsf{Ch}$ *kontraktibel ist.*

2. *Es ist* $H_*(f)\colon H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ *genau dann ein Isomorphismus in* ${}_R\mathsf{Grad}$*, wenn* $H_*(\mathrm{Cone}(f)) \cong 0$ *ist.*

Caveat E.40. Kettenabbildungen, die Homologieisomorphismen induzieren, sind im allgemeinen *keine* Kettenhomotopieäquivalenzen!

Zum Beispiel liefert die Kettenabbildung

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ 2} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ Isomorphismen in Homologie; da die einzige Kettenabbildung in die andere Richtung die Nullabbildung ist und die Kettenkomplexe aber nicht kontraktibel sind (die Homologie ist nicht trivial), kann es sich dabei aber *nicht* um eine Kettenhomotopieäquivalenz handeln.

W. Wörterbuch

Deutsch → English

A

Abbildungsgrad	mapping degree	25
Abbildungskegel	mapping cone	76, E.13
Abbildungskegel-Trick	mapping cone trick	77
Abelianisierung	abelianisation	104
Abelisierung	abelianisation	104
abgeschlossene Menge	closed set	A.1
Abschluss	closure	A.2
absolute Homologie	absolute homology	61
additive Homologietheorie	additive homology theory	60
Ausschneidung	excision	60
Automorphismengruppe	automorphism group	14

B

Bündel	bundle	40
Bahn	orbit	D.1
Bahnenraum	orbit space	D.2
Ball	ball	4
baryzentrische Unterteilung	barycentric subdivision	91
Betti-Zahl	Betti number	125
Blatt	sheet	41
Bordismus	bordism	79
Brouwerscher Fixpunktsatz	Brouwer fixed point theorem	24

C

CW-Komplex	CW-complex	109
CW-Struktur	CW-structure	108

D

darstellbarer Funktor	representable functor	15
Decktransformationsgruppe	deck transformation group	45
Differential	differential	E.5
Dimensionsaxiom	dimension axiom	60
disjunkte Vereinigunstopologie	disjoint union topology	7
diskrete Topologie	discrete topology	A.2
Doppeldual	double dual	17
duale Kategorie	dual category	13
duale Kategorie	opposite category	13

E

eigentlich diskontinuierlich	properly discontinuous	42
einfach zusammenhängend	simply connected	48
Einhängung	suspension	65

Einhängungsisomorphismus	suspension isomorphism	66
Einpunktvereinigung	wedge	37
Einschnürungsabbildung	pinching map	70
endlicher CW-Komplex	finite CW-complex	109
endlicher Typ	finite type	109
Euler-Charakteristik	Euler characteristic	124
Eulersche Polyederformel	Euler's formula	127
exakte Sequenz	exact sequence	E.1
Exponentialgesetz	exponential law	19

F

Facette	facet	128
Faser	fibre	41
freie Gruppe	free group	35, C.2
freies amalgamiertes Produkt	free amalgamated product	C.2
freies Erzeugendensystem	free generating set	C.2
freies Produkt	free product	C.1
Fundamentalgruppe	fundamental group	28, 29
Fundamentalgruppoid	fundamental groupoid	36
Fünfer-Lemma	Five Lemma	E.3
Funktor	functor	14

G

galoissche Überlagerung	Galois covering	54
gehörnte Alexander-Sphäre	Alexander horned sphere	99
gerichtete Menge	directed set	39
gerichtetes System	directed system	39
geschlossener Weg	closed path	A.4
gewöhnliche Homologietheorie	ordinary homology theory	60
graduierter Modul	graded module	E.7
Gruppenobjekt	group object	B.2
Gruppenoperation	group action	D.1

H

hausdorffsch	Hausdorff	A.5
Hawaiianischer Ohrring	Hawaiian earring	50
Homöomorphismus	homeomorphism	A.4
Homologie	homology	E.7
Homologietheorie	homology theory	60
homotop	homotopic	18
homotop als Abbildung von Paaren	homotopic as map of pairs	19
Homotopie	homotopy	18
Homotopie von Raumpaaren	homotopy of pairs	19
homotopieäquivalent	homotopy equivalent	18
Homotopieäquivalenz	homotopy equivalence	18
Homotopieäquivalenz von Raumpaaren	homotopy equivalence of pairs	19
Homotopiegruppe	homotopy group	31
homotopieinvariant	homotopy invariant	23
Homotopieinvariante	homotopy invariant	23
homotopieinvarianter Funktor	homotopy invariant functor	23
Homotopiekategorie	homotopy category	21

Hopf-Faserung	Hopf fibration	41
Hurewicz-Homomorphismus	Hurewicz homomorphism	71

I

Identitätsfunktor	identity functor	14
Identitätsmorphismus	identity morphism	11
Igel	hedgehog	10, 26
initiales Objekt	initial object	49
Inneres	interior	A.2
Invarianz der Dimension	invariance of dimension	24, 69
Inzidenzzahl	incidence number	116
Isomorphismus	isomorphism	13

J

Jordanscher Kurvensatz	Jordan Curve Theorem	98

K

Kategorie	category	10
Kegel	cone	75
Kegeloperator	cone operator	91
Kette	chain	80, E.5
Kettenabbildung	chain map	E.6
kettenhomotop	chain homotopic	E.11
Kettenhomotopie	chain homotopy	E.11
Kettenhomotopieäquivalenz	chain homotopy equivalence	E.11
Kettenkomplex	chain complex	E.5
Kettenkontraktion	chain contraction	E.12
Kettenmodul	chain module	E.5
Klasse	class	10
kleiner Simplex	small simplex	94
Klumpentopologie	trivial topology	A.2
Koeffizienten einer Homologietheorie	coefficients of a homology theory	60
Kogruppenobjekt	cogroup object	31, B.1
Kolimes	colimit	8
Kommutatoruntergruppe	commutator subgroup	104
kompakt	compact	A.6
Komultiplikation	comultiplication	B.1
kontraktibel	contractible	19, E.12
kontravariant	contravariant	14
kovariant	covariant	14
kurze exakte Sequenz	short exact sequence	E.1

L

lange exakte Paarsequenz	long exact sequence of the pair	60
lange exakte Tripelsequenz	long exact triple sequence	63
Lebesgue-Lemma	Lebesgue Lemma	33
leere Kategorie	empty category	11
Lift	lift	44
Liftungskriterium	lifting criterion	47
lokal triviales Bündel	locally trivial bundle	41

lokal wegzusammenhängend	locally path-connected	47
Lokalisierung	localisation	40

M

Möbiusband	Möbius strip	6
Maßhomologie	measure homology	79
Mayer-Vietoris-Sequenz	Mayer-Vietoris sequence	73
mengentheoretische Topologie	point-set topology	A.1
Morphismus	morphism	10

N

Nash-Gleichgewicht	Nash equilibrium	25
natürliche Äquivalenz	natural equivalence	54
natürliche Transformation	natural transformation	16
natürlicher Isomorphismus	natural isomorphism	16
nirgends verschwindend	nowhere vanishing	26
normale Überlagerung	normal covering	54
Normalisator	normaliser	54
nullhomotop	null-homotopic	18, E.11

O

Objekt	object	10
offene Abbildung	open map	7
offene Menge	open set	A.1
offene Umgebung	open neighbourhood	A.2
offene Zelle	open cell	109

P

Prisma	prism	88
Produkttopologie	product topology	A.2
punktiert homotop	pointed homotopic	20
punktiert homotopieäquivalent	pointed homotopy equivalent	20
punktiert kontraktibel	pointed contractible	20
punktiert nullhomotop	pointed null-homotopic	20
punktierte Homotopie	pointed homotopy	20
punktierte Homotopieäquivalenz	pointed homotopy equivalence	20
punktierte Kategorie	pointed category	B.1
punktierter Raum	pointed space	12, 20
Pushout	pushout	7

Q

Qualle	jellyfish	18
Quotiententopologie	quotient topology	6

R

Rand	boundary	80, A.2, E.5

Randoperator	boundary operator	E.5
Rang (freier Gruppen)	rank (of free groups)	C.2
Rationalisierung	rationalisation	40
Raumpaar	pair of spaces	12
Rechtsoperation	right action	D.1
reduziertes Wort	reduced word	35, C.1
reell-projektiver Raum	real projective space	7
reguläre Überlagerung	regular covering	54
relative CW-Struktur	relative CW-structure	108
relative Homologie	relative homology	61
relativer CW-Komplex	relative CW-complex	109

S

Satz von Seifert und van Kampen	Theorem of Seifert and van Kampen	32
Schleife	loop	28
Schwerpunkt	barycentre	91
Selbstabbildung	self-map	25
semi-lokal einfach zusammenhängend	semi-locally simply connected	50
Simplex	simplex	4
Simplexkategorie	simplex category	12
simpliziale Homologie	simplicial homology	78
simplizialer Modul	simplicial module	E.5
singuläre Homologie	singular homology	78, 84
singulärer Kettenkomplex	singular chain complex	82
singuläres Simplex	singular simplex	80
Skelett	skeleton	108
spaltende kurze exakte Sequenz	split short exact sequence	E.2
Spektralsequenz	spectral sequence	65
Spektrum	spectrum	79
Sphäre	sphere	4
stabile Homotopietheorie	stable homotopy theory	79
Stabilisator	stabiliser	D.1
Standgruppe	stabiliser	D.1
starke Überdeckung	strong cover	94
stetig	continuous	A.3
stetige Operation	continuous action	D.1

T

Teilraumtopologie	subspace topology	A.2
Topologie	topology	A.1
topologischer Raum	topological space	A.1
Torus	torus	6
Totalraum	total space	41
transitive Operation	transitive action	D.2
triviales Bündel	trivial bundle	40

U

Überlagerung	covering	41
Überlagerungstheorie	covering theory	28
Umgebung	neighbourhood	A.2
universelle Überlagerung	universal covering	49

universelle Eigenschaft	universal property	8

V

Vektorfeld	vector field	26
Verbindungshomomorphismen	connecting homomorphism	60
Vergissfunktor	forgetful functor	14
Vorzeichenkonvention	sign convention	E.10

W

Warschauer Kreis	Warsaw circle	48
Wedge	wedge	37
Weg	path	A.4
wegzusammenhängend	path-connected	A.4
Weylgruppe	Weyl group	54

Z

Zelle	cell	109
zelluläre Abbildung	cellular map	111
zelluläre Homologie	cellular homology	78, 114
zelluläre Homotopie	celullar homotopy	112
zeullärer Kettenkomplex	cellular chain complex	113
Zopf	braid	64
zusammenhängend	connected	104, A.4
zusammenziehbar	contractible	19, E.12
Zykel	cycle	80, E.5

English → Deutsch

A

abelianisation	Abelisierung, Abelianisierung	104
absolute homology	absolute Homologie	61
additive homology theory	additive Homologietheorie	60
Alexander horned sphere	gehörnte Alexander-Sphäre	99
automorphism group	Automorphismengruppe	14

B

ball	Ball	4
barycentre	Schwerpunkt	91
barycentric subdivision	baryzentrische Unterteilung	91
Betti number	Betti-Zahl	125
bordism	Bordismus	79
boundary	Rand	80, A.2, E.5
boundary operator	Randoperator	E.5
braid	Zopf	64
Brouwer fixed point theorem	Brouwerscher Fixpunktsatz	24
bundle	Bündel	40

C

category	Kategorie	10
cell	Zelle	109
cellular chain complex	zeullärer Kettenkomplex	113
cellular homology	zelluläre Homologie	78, 114
cellular map	zelluläre Abbildung	111
celullar homotopy	zelluläre Homotopie	112
chain	Kette	80, E.5
chain complex	Kettenkomplex	E.5
chain contraction	Kettenkontraktion	E.12
chain homotopic	kettenhomotop	E.11
chain homotopy	Kettenhomotopie	E.11
chain homotopy equivalence	Kettenhomotopieäquivalenz	E.11
chain map	Kettenabbildung	E.6
chain module	Kettenmodul	E.5
class	Klasse	10
closed path	geschlossener Weg	A.4
closed set	abgeschlossene Menge	A.1
closure	Abschluss	A.2
coefficients of a homology theory	Koeffizienten einer Homologietheorie	60
cogroup object	Kogruppenobjekt	31, B.1
colimit	Kolimes	8
commutator subgroup	Kommutatoruntergruppe	104
compact	kompakt	A.6
comultiplication	Komultiplikation	B.1
cone	Kegel	75
cone operator	Kegeloperator	91
connected	zusammenhängend	104, A.4
connecting homomorphism	Verbindungshomomorphismen	60
continuous	stetig	A.3

continuous action	stetige Operation	D.1
contractible	kontraktibel, zusammenziehbar	19, E.12
contravariant	kontravariant	14
covariant	kovariant	14
covering	Überlagerung	41
covering	je nach Kontext auch: Überdeckung	41
covering theory	Überlagerungstheorie	28
CW-complex	CW-Komplex	109
CW-structure	CW-Struktur	108
cycle	Zykel	80, E.5

D

deck transformation group	Decktransformationsgruppe	45
differential	Differential	E.5
dimension axiom	Dimensionsaxiom	60
directed set	gerichtete Menge	39
directed system	gerichtetes System	39
discrete topology	diskrete Topologie	A.2
disjoint union topology	disjunkte Vereinigunstopologie	7
double dual	Doppeldual	17
dual category	duale Kategorie	13

E

empty category	leere Kategorie	11
Euler characteristic	Euler-Charakteristik	124
Euler's formula	Eulersche Polyederformel	127
exact sequence	exakte Sequenz	E.1
excision	Ausschneidung	60
exponential law	Exponentialgesetz	19

F

facet	Facette	128
fibre	Faser	41
finite CW-complex	endlicher CW-Komplex	109
finite type	endlicher Typ	109
Five Lemma	Fünfer-Lemma	E.3
forgetful functor	Vergissfunktor	14
free amalgamated product	freies amalgamiertes Produkt	C.2
free generating set	freies Erzeugendensystem	C.2
free group	freie Gruppe	35, C.2
free product	freies Produkt	C.1
functor	Funktor	14
fundamental group	Fundamentalgruppe	28, 29
fundamental groupoid	Fundamentalgruppoid	36

G

Galois covering	galoissche Überlagerung	54
graded module	graduierter Modul	E.7
group action	Gruppenoperation	D.1
group object	Gruppenobjekt	B.2

H

Hausdorff	hausdorffsch	A.5
Hawaiian earring	Hawaiianischer Ohrring	50
hedgehog	Igel	10, 26
homeomorphism	Homöomorphismus	A.4
homology	Homologie	E.7
homology theory	Homologietheorie	60
homotopic	homotop	18
homotopic as map of pairs	homotop als Abbildung von Paaren	19
homotopy	Homotopie	18
homotopy category	Homotopiekategorie	21
homotopy equivalence	Homotopieäquivalenz	18
homotopy equivalence of pairs	Homotopieäquivalenz von Raumpaaren	19
homotopy equivalent	homotopieäquivalent	18
homotopy group	Homotopiegruppe	31
homotopy invariant	homotopieinvariant, Homotopieinvariante	23
homotopy invariant functor	homotopieinvarianter Funktor	23
homotopy of pairs	Homotopie von Raumpaaren	19
Hopf fibration	Hopf-Faserung	41
Hurewicz homomorphism	Hurewicz-Homomorphismus	71

I

identity functor	Identitätsfunktor	14
identity morphism	Identitätsmorphismus	11
incidence number	Inzidenzzahl	116
initial object	initiales Objekt	49
interior	Inneres	A.2
invariance of dimension	Invarianz der Dimension	24, 69
isomorphism	Isomorphismus	13

J

jellyfish	Qualle	18
Jordan Curve Theorem	Jordanscher Kurvensatz	98

L

Lebesgue Lemma	Lebesgue-Lemma	33
lift	Lift	44
lifting criterion	Liftungskriterium	47
localisation	Lokalisierung	40
locally path-connected	lokal wegzusammenhängend	47
locally trivial bundle	lokal triviales Bündel	41
long exact sequence of the pair	lange exakte Paarsequenz	60
long exact triple sequence	lange exakte Tripelsequenz	63
loop	Schleife	28

M

Möbius strip	Möbiusband	6
mapping cone	Abbildungskegel	76, E.13
mapping cone trick	Abbildungskegel-Trick	77

mapping degree	Abbildungsgrad	25
Mayer-Vietoris sequence	Mayer-Vietoris-Sequenz	73
measure homology	Maßhomologie	79
morphism	Morphismus	10

N

Nash equilibrium	Nash-Gleichgewicht	25
natural equivalence	natürliche Äquivalenz	54
natural isomorphism	natürlicher Isomorphismus	16
natural transformation	natürliche Transformation	16
neighbourhood	Umgebung	A.2
normal covering	normale Überlagerung	54
normaliser	Normalisator	54
nowhere vanishing	nirgends verschwindend	26
null-homotopic	nullhomotop	18, E.11

O

object	Objekt	10
open cell	offene Zelle	109
open map	offene Abbildung	7
open neighbourhood	offene Umgebung	A.2
open set	offene Menge	A.1
opposite category	duale Kategorie	13
orbit	Bahn	D.1
orbit space	Bahnenraum	D.2
ordinary homology theory	gewöhnliche Homologietheorie	60

P

pair of spaces	Raumpaar	12
path	Weg	A.4
path-connected	wegzusammenhängend	A.4
pinching map	Einschnürungsabbildung	70
point-set topology	mengentheoretische Topologie	A.1
pointed category	punktierte Kategorie	B.1
pointed contractible	punktiert kontraktibel	20
pointed homotopic	punktiert homotop	20
pointed homotopy	punktierte Homotopie	20
pointed homotopy equivalence	punktierte Homotopieäquivalenz	20
pointed homotopy equivalent	punktiert homotopieäquivalent	20
pointed null-homotopic	punktiert nullhomotop	20
pointed space	punktierter Raum	12, 20
prism	Prisma	88
product topology	Produkttopologie	A.2
properly discontinuous	eigentlich diskontinuierlich	42
pushout	Pushout	7

Q

quotient topology	Quotiententopologie	6

R

rank (of free groups)	Rang (freier Gruppen)	C.2
rationalisation	Rationalisierung	40
real projective space	reell-projektiver Raum	7
reduced word	reduziertes Wort	35, C.1
regular covering	reguläre Überlagerung	54
relative CW-complex	relativer CW-Komplex	109
relative CW-structure	relative CW-Struktur	108
relative homology	relative Homologie	61
representable functor	darstellbarer Funktor	15
right action	Rechtsoperation	D.1

S

self-map	Selbstabbildung	25
semi-locally simply connected	semi-lokal einfach zusammenhängend	50
sheet	Blatt	41
short exact sequence	kurze exakte Sequenz	E.1
sign convention	Vorzeichenkonvention	E.10
simplex	Simplex	4
simplex category	Simplexkategorie	12
simplicial homology	simpliziale Homologie	78
simplicial module	simplizialer Modul	E.5
simply connected	einfach zusammenhängend	48
singular chain complex	singulärer Kettenkomplex	82
singular homology	singuläre Homologie	78, 84
singular simplex	singuläres Simplex	80
skeleton	Skelett	108
small simplex	kleiner Simplex	94
spectral sequence	Spektralsequenz	65
spectrum	Spektrum	79
sphere	Sphäre	4
split short exact sequence	spaltende kurze exakte Sequenz	E.2
stabiliser	Standgruppe, Stabilisator	D.1
stable homotopy theory	stabile Homotopietheorie	79
strong cover	starke Überdeckung	94
subspace topology	Teilraumtopologie	A.2
suspension	Einhängung	65
suspension isomorphism	Einhängungsisomorphismus	66

T

Theorem of Seifert and van Kampen	Satz von Seifert und van Kampen	32
topological space	topologischer Raum	A.1
topology	Topologie	A.1
torus	Torus	6
total space	Totalraum	41
transitive action	transitive Operation	D.2
trivial bundle	triviales Bündel	40
trivial topology	Klumpentopologie	A.2

U

universal covering	universelle Überlagerung	49

universal property	universelle Eigenschaft	8

V

vector field	Vektorfeld	26

W

Warsaw circle	Warschauer Kreis	48
wedge	Wedge, Einpunktvereinigung	37
Weyl group	Weylgruppe	54