Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 0 vom 18. Oktober 2013

Aufgabe 1 (ganz kleine Kategorien)**.** Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Welchem Konzept aus der Algebra entsprechen Kategorien mit genau einem Objekt?
2. Sind in einer Kategorie mit genau einem Objekt und genau drei Morphismen alle Morphismen bereits Isomorphismen?
3. Welchem Konzept aus der Algebra entsprechen Funktoren zwischen Kategorien mit genau einem Objekt?
4. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Kategorie mit genau zwei Objekten, die genau n Morphismen enthält?

Aufgabe 2 (Bälle, Sphären, Simplizes)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ (und sei $S^{-1} := \emptyset$).

1. Zeigen Sie: Die Raumpaare $(\Delta^n, \partial\Delta^n)$ und (D^n, S^{n-1}) sind homöomorph.
2. Zeigen Sie, dass D^n/S^{n-1} zu S^n homöomorph ist.

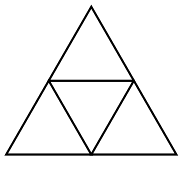
   Hinweis. Ist X ein topologischer Raum und $A \subset X$, so schreiben wir X/A für den Quotientenraum $X/\sim$ mit der Quotiententopologie, wobei „$\sim$" die Äquivalenzrelation

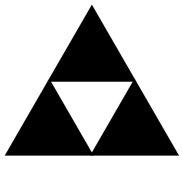
   $$\bigl\{(a,b) \bigm| a,b \in A\bigr\} \cup \bigl\{(x,x) \bigm| x \in X\bigr\} \subset X \times X$$

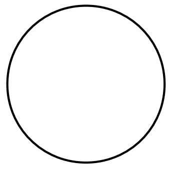
   auf X ist.

Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 (Triforce vs. Ring)**.** Klassifizieren Sie die folgenden Teilräume von $\mathbb{R}^2$ bis auf Homöomorphie und illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch geeignete Skizzen:







Bitte wenden

Aufgabe 4 (universelle Eigenschaft des Pushouts)**.** Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume und seien $i_1\colon X_0 \longrightarrow X_1$ und $i_2\colon X_0 \longrightarrow X_2$ stetige Abbildungen. Ein topologischer Raum X, zusammen mit stetigen Abbildungen $j_1\colon X_1 \longrightarrow X$, $j_2\colon X_2 \longrightarrow X$, *erfüllt die universelle Eigenschaft dieses Pushouts*, wenn folgendes gilt: Es gilt $j_2 \circ i_2 = j_1 \circ i_1$ und für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f_1\colon X_1 \longrightarrow Z$, $f_2\colon X_2 \longrightarrow Z$ mit $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Z$ mit

$$f \circ j_1 = f_1 \quad \text{und} \quad f \circ j_2 = f_2.$$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \arrow[ddr, bend left, "f_2"] & \\
X_1 \arrow[r, "j_1"'] \arrow[drr, bend right, "f_1"'] & X \arrow[dr, dashed, "\exists! f"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

In diesem Fall sagt man auch, dass

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "i_1"'] & X_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_1 \arrow[r, "j_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

ein *Pushoutdiagramm topologischer Räume* ist.

1. Zeigen Sie, dass das Pushout $X := X_1 \cup_{X_0} X_2$ bezüglich i_1 und i_2, zusammen mit den von den Inklusionen nach $X_1 \sqcup X_2$ induzierten stetigen Abbildungen $j_1\colon X_1 \longrightarrow X$, $j_2\colon X_2 \longrightarrow X$, die universelle Eigenschaft dieses Pushouts besitzt.

2. Zeigen Sie: Erfüllt ein topologischer Raum X', zusammen mit stetigen Abbildungen $j_1'\colon X_1 \longrightarrow X'$, $j_2'\colon X_2 \longrightarrow X'$ die universelle Eigenschaft dieses Pushouts, so gibt es einen kanonischen Homöomorphismus zwischen X und X'.

Bonusaufgabe (Peano-Kurven)**.** Zeigen Sie, dass es surjektive stetige Abbildungen $[0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$ gibt. Kann eine solche Abbildung injektiv sein?

---

keine Abgabe;
diese Aufgaben werden in der Übung am 23. Oktober 2013 besprochen