Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh Blatt 11 vom 10. Januar 2014

Aufgabe 1 (Abelianisierung)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist G eine Gruppe mit $G_{\text{ab}} \cong 0$, so ist G bereits trivial.
2. Ist G die Diedergruppe D_{2013} (d.h. die Isometriegruppe eines regulären 2013-Ecks), so ist $G_{\text{ab}} \cong \mathbb{Z}/2$.

Aufgabe 2 (Abelianisierung – universelle Eigenschaft)**.** Sei G eine Gruppe und sei $\pi\colon G \longrightarrow G_{\text{ab}}$ die kanonische Projektion.

1. Zeigen Sie, dass π die folgende universelle Eigenschaft besitzt: Ist A eine abelsche Gruppe und ist $\varphi\colon G \longrightarrow A$ ein Gruppenhomomorphismus, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon G_{\text{ab}} \longrightarrow A$ mit $\overline{\varphi}\circ\pi = \varphi$.
2. Zeigen Ist: Ist G' eine abelsche Gruppe und $\pi'\colon G \longrightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus, der obige universelle Eigenschaft besitzt, so gibt es genau einen Gruppenisomorphismus $\psi\colon G_{\text{ab}} \longrightarrow G'$ mit $\psi \circ \pi = \pi'$.

Aufgabe 3 (Abelianisierung freier Gruppen)**.** Sei X eine Menge und sei F eine freie Gruppe mit Basis X, d.h. $X \subset F$ und für jede Gruppe G und jede Abbildung $\varphi\colon X \longrightarrow G$ (von Mengen) gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{\varphi}\colon F \longrightarrow G$ mit $\overline{\varphi}|_X = \varphi$. Sei $\pi\colon F \longrightarrow F_{\text{ab}}$ die kanonische Projektion.

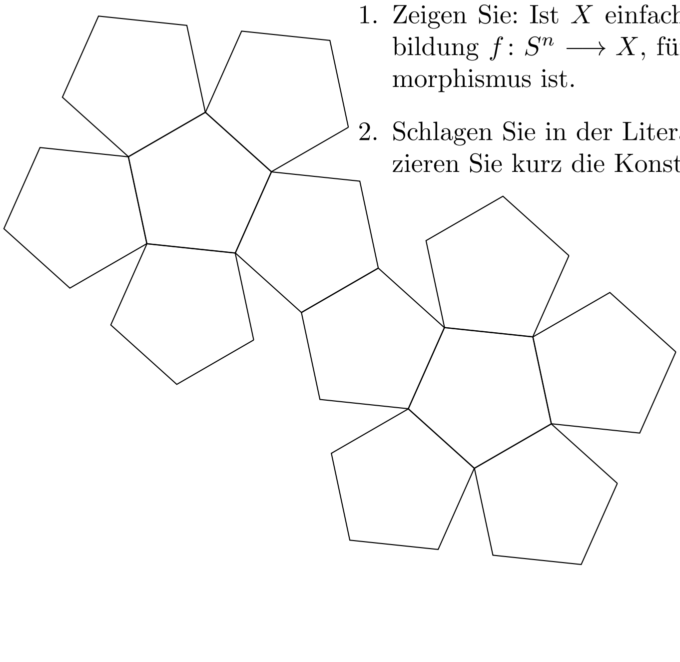
1. Zeigen Sie, dass $\pi|_X\colon X \longrightarrow F_{\text{ab}}$ injektiv ist.
2. Zeigen Sie, dass F_{ab} eine freie abelsche Gruppe mit Basis $\pi(X)$ ist.

Aufgabe 4 (Homologie-Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Der topologische Raum X sei eine *Homologie-n-Sphäre*, d.h. es gilt

$$H_k(X;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \in \{0,n\} \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{N} \setminus \{0,n\} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$.

1. Zeigen Sie: Ist X einfach zusammenhängend, so gibt es eine stetige Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow X$, für die $H_*(f;\mathbb{Z})\colon H_*(S^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(X;\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist.
2. Schlagen Sie in der Literatur nach, was die Poincaré-Sphäre ist und skizzieren Sie kurz die Konstruktion und ihre wichtigsten Eigenschaften.



Bitte wenden

Bonusaufgabe (gruppentheoretischer Transfer)**.** Sei G eine Gruppe und sei $H \subset G$ eine Untergruppe von endlichem Index $m := [G : H]$. Wir schreiben $i\colon H \longrightarrow G$ für die Inklusion.

1. Gibt es dann einen Gruppenhomomorphismus $\tau\colon G \longrightarrow H$ mit $i_{\mathrm{ab}} \circ \tau_{\mathrm{ab}} = m \cdot \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Falls Sie *nicht* an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Es sei $\{g_1, \dots, g_m\} \subset G$ ein Repräsentantensystem für $H \setminus G$ und außerdem sei $R\colon G \longrightarrow \{g_1, \dots, g_m\}$ die Abbildung, die jedem Gruppenelement g den Repräsentanten der Nebenklasse $H \cdot g$ zuordnet. Wir betrachten

$$\begin{aligned} T\colon G_{\mathrm{ab}} &\longrightarrow H_{\mathrm{ab}} \\ [g] &\longmapsto \left[\prod_{j=1}^{m} g_j \cdot g \cdot R(g_j \cdot g)^{-1}\right]. \end{aligned}$$

   Zeigen Sie, dass T ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus ist mit

$$i_{\mathrm{ab}} \circ T = m \cdot \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}} .$$

3. Falls Sie an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Konstruieren Sie mit algebraischer Topologie einen Homomorphismus $T\colon G_{\mathrm{ab}} \longrightarrow H_{\mathrm{ab}}$ mit

$$i_{\mathrm{ab}} \circ T = m \cdot \mathrm{id}_{G_{\mathrm{ab}}} .$$

Abgabe bis zum 17. Januar 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten