Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 12 vom 17. Januar 2014

Aufgabe 1 (offene Zellen)**.** Sei X ein CW-Komplex und sei $e \subset X$ eine offene Zelle. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Dann ist e als Teilmenge von X offen.
2. Ist $f\colon X \longrightarrow X$ zellulär, so gibt es eine offene Zelle $e' \subset X$ mit $f(e) \subset e'$.

Aufgabe 2 (endliche CW-Komplexe)**.** Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben und illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen:

1. Zeigen Sie: Der unterliegende topologische Raum eines endlichen CW-Komplexes ist kompakt.
2. Zeigen Sie: Durch
$$\emptyset \subset \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}_{>0} \right\} \subset [0,1] = [0,1] = \cdots$$
ist *keine* CW-Struktur auf $[0,1]$ definiert.
3. Zeigen Sie: Der unterliegende topologische Raum eines unendlich-dimensionalen CW-Komplexes ist *nicht* kompakt.
4. Zeigen Sie: Der unterliegende topologische Raum eines unendlichen, endlich-dimensionalen CW-Komplexes ist *nicht* kompakt.

Aufgabe 3 (komplex-projektive Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Die multiplikative Gruppe $S^1 \subset \mathbb{C}$ operiert durch Skalarmultiplikation auf $S^{2\cdot n+1} \subset \mathbb{R}^{2\cdot(n+1)} \cong \mathbb{C}^{n+1}$; der Quotientenraum
$$\mathbb{C}P^n := S^{2\cdot n+1} \big/ \bigl(\forall_{z \in S^1} \quad \forall_{x \in S^{2\cdot n+1}} \quad x \sim z \cdot x\bigr)$$
heißt *n-dimensionaler komplex-projektiver Raum* (man beachte dabei, dass $\mathbb{C}P^n$ die reelle Dimension $2 \cdot n$ hat).

1. Konstruieren Sie eine CW-Struktur auf $\mathbb{C}P^n$, die nur in den Dimensionen $0, 2, \dots, 2 \cdot n$ Zellen enthält und in jeder dieser Dimensionen genau eine Zelle besitzt.
2. Bestimmen Sie den zugehörigen zellulären Kettenkomplex und die zelluläre Homologie (bezüglich einer gewöhnlichen Homologietheorie).

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Produkte von CW-Komplexen)**.** Mit h bezeichnen wir die singuläre Homologietheorie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten. Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Zeigen Sie: Ist X ein CW-Komplex und Y ein endlicher CW-Komplex, so liefert
$$\Big(\bigcup_{k\in\{0,\dots,n\}} X_k \times Y_{n-k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$
eine CW-Struktur auf $X \times Y$.

   Hinweis. Sie dürfen folgende Tatsache aus der mengentheoretischen Topologie verwenden: Ist $\pi\colon Z \longrightarrow Z'$ eine Quotientenabbildung (d.h. π ist surjektiv und Z' trägt die von π induzierte Quotiententopologie) und ist K ein kompakter topologischer Raum, so ist auch $\pi \times \mathrm{id}_K : Z \times K \longrightarrow Z' \times K$ eine Quotientenabbildung.

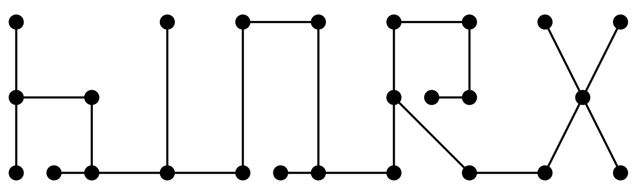
2. Sei X ein CW-Komplex; wir versehen $X \times [0,1]$ mit der Produkt-CW-Struktur der Standard-CW-Struktur auf $[0,1]$. Vergleichen Sie den zellulären Kettenkomplex $C^h(X \times [0,1])$ mit dem Kettenkomplex $C^h(X) \otimes_{\mathbb{Z}} I$.

   Hinweis. Dabei bezeichnet $I \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ den Kettenkomplex aus Definition B.25.

3. Geben Sie zu einer CW-Struktur Ihrer Wahl auf S^1 die zugehörige Produkt-CW-Struktur auf $S^1 \times S^1$ an und bestimmen Sie den zugehörigen zellulären Kettenkomplex $C^h(S^1 \times S^1)$ und die zugehörige zelluläre Homologie $H^h_*(S^1 \times S^1)$. Illustrieren Sie dies durch geeignete Skizzen!

4. Geben Sie CW-Strukturen auf $S^2 \times \mathbb{R}P^3$ bzw. $\mathbb{R}P^2 \times S^3$ an und zeigen Sie für diese
$$H^h_5(S^2 \times \mathbb{R}P^3) \not\cong H^h_5(\mathbb{R}P^2 \times S^3).$$

Bonusaufgabe (eindimensionale CW-Komplexe)**.** Sei h die singuläre Homologietheorie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten und sei X ein eindimensionaler CW-Komplex. Zeigen Sie, dass X genau dann (in Top) kontraktibel ist, wenn
$$H^h_0(X) \cong \mathbb{Z} \qquad \text{und} \qquad H^h_1(X) \cong 0$$
gilt. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!



Abgabe bis zum 24012014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten