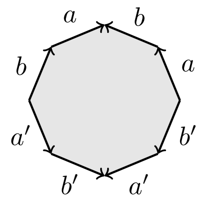
Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 13 vom 24. Januar 2014

Aufgabe 1 (kleine CW-Komplexe)**.** Sei X ein CW-Komplex mit genau einer 0-Zelle und genau einer 2-Zelle. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Hat X genau eine 1-Zelle, so ist $H_1(X;\mathbb{Z}) \not\cong 0$.
2. Hat X genau zwei 1-Zellen, so ist $H_1(X;\mathbb{Z}) \not\cong 0$.

Aufgabe 2 (verklebtes Achteck)**.** Sei B der topologische Raum, den man durch die Verklebung



eines regulären Achtecks erhält.

1. Skizzieren Sie B geeignet („nach" der Verklebung).
2. Geben sie eine CW-Struktur auf B mit minimaler Zellenanzahl an und begründen Sie, warum die Zellenanzahl unter allen CW-Strukturen auf B minimal ist.

Aufgabe 3 ($\mathbb{R}P^\infty$ und $\mathbb{C}P^\infty$)**.** Sei

$$\mathbb{R}P^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{R}P^n$$
$$\mathbb{C}P^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}P^n$$

(jeweils versehen mit der Kolimestopologie der Systeme $\mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \cdots$ bzw. $\mathbb{C}P^0 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \cdots$).

1. Sei R ein Ring mit Eins. Bestimmen Sie $H_*(\mathbb{R}P^\infty; R)$ und $H_*(\mathbb{C}P^\infty; R)$.
2. Gibt es endlich-dimensionale CW-Komplexe, die zu $\mathbb{R}P^\infty$ oder $\mathbb{C}P^\infty$ homotopieäquivalent sind? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Homologie von CW-Strukturen, größere Schritte)**.** Sei R ein Ring mit Eins, sei $\bigl((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex mit relativer CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$.

1. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, n\}$ ist
$$h_k(X_n, A) \cong 0.$$

2. Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$, alle $N \in \mathbb{N}_{\geq n}$ und alle $k \in \mathbb{Z}_{\leq n}$ ist
$$h_k(X_N, X_n) \cong 0.$$

3. Gelten die obigen Aussagen auch dann, wenn die betrachtete Homologietheorie *nicht* gewöhnlich ist? Begründen Sie Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

Bonusaufgabe (klassifizierende Räume und Torsion)**.** Sei
$$S^\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^{2\cdot n+1} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S^n$$
(versehen mit der Kolimestopologie des Systems $S^1 \subset S^3 \subset \cdots$). Ist $d \in \mathbb{N}_{>0}$, so fassen wir $\mathbb{Z}/d$ als Untergruppe von $S^1 \subset \mathbb{C}^\times$ auf (über die d-ten Einheitswurzeln) und betrachten die Operation von $\mathbb{Z}/d$ auf S^∞, die von der Skalarmultiplikation von $\mathbb{C}$ auf den ungeradedimensionalen (reellen) Sphären induziert wird. Sei $X(d)$ der Quotient von S^∞ nach dieser Gruppenoperation (mit der Quotiententopologie).

1. Falls Sie *nicht* an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Zeigen Sie, dass S^∞ kontraktibel ist und dass die obige $\mathbb{Z}/d$-Operation auf S^∞ stetig und frei ist.

2. Bestimmen Sie $H_*\bigl(X(d); \mathbb{Z}\bigr)$ für alle $d \in \mathbb{N}_{>0}$, indem Sie eine geeignete CW-Struktur auf $X(d)$ konstruieren.

3. Falls Sie an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Sei G eine Gruppe, die *nicht* torsionsfrei ist. Zeigen Sie, dass es *keinen* endlichdimensionalen Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(G, 1)$ gibt.

   Hinweis. Betrachten Sie die Überlagerung zu einer nicht-trivialen endlichen zyklischen Untergruppe von G …

Abgabe bis zum 31. Januar 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten