Übungen zur Algebraischen Topologie II

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 15 vom 7. Februar 2014

Aufgabe 1 (Lefschetz-Zahl)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex und $f\colon X \longrightarrow X$ eine zelluläre Abbildung. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Es ist $\Lambda(f) = \chi\bigl(\operatorname{Cone}(f)\bigr)$.
2. Ist $\bigl|\Lambda(f)\bigr| \geq 2$, so hat f mindestens zwei Fixpunkte.

Aufgabe 2 (CW-Approximation und zelluläre Approximation)**.**

1. Ist $\mathbb{Q}$ (versehen mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}$) zu einem CW-Komplex homöomorph? Begründen Sie Ihre Antwort! Bestimmen Sie eine CW-Approximation für $\mathbb{Q}$.
2. Wir betrachten $S^1 \subset \mathbb{C}$ mit der durch $\emptyset \subset \{1\} \subset S^1$ gegebenen CW-Struktur. Bestimmen Sie zelluläre Approximationen (bezüglich dieser CW-Struktur) für die Abbildungen

$$\begin{aligned} f\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto -z \\ g\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ (x,y) &\longmapsto (-x,y). \end{aligned}$$

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 (unorientierte Bordismusrelation)**.** Sei X ein topologischer Raum.

1. Zeigen Sie, dass die (unorientierte) Bordismusrelation über X tatsächlich eine Äquivalenzrelation liefert.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $\Omega_n^{\mathrm{O}}\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ homotopieinvariant ist.

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 4 (unorientierter Bordismus von S^1)**.**

1. Zeigen Sie, dass S^1 (bis auf Homöomorphie) die einzige (weg)zusammenhängende kompakte eindimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand ist.
2. Bestimmen Sie $\Omega_1^{\mathrm{O}}(S^1)$.

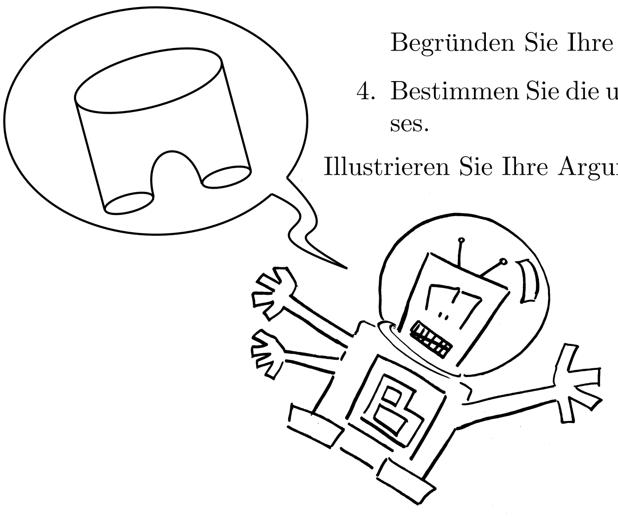
   Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass $\deg_{H_1(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}\colon [S^1,S^1] \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine Bijektion ist.
3. Welches Element in $\Omega_1^{\mathrm{O}}(S^1)$ repräsentiert

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \supset S^1 &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^2 \ ? \end{aligned}$$

   Begründen Sie Ihre Antwort!
4. Bestimmen Sie die unorientierten Bordismusgruppen des Warschauer Kreises.

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Bitte wenden



Bonusaufgabe (CW-Approximation)**.** Beweisen Sie, dass jeder topologische Raum eine CW-Approximation besitzt. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Hinweis. Betrachten Sie ohne Einschränkung nur wegzusammenhängende Räume und gehen Sie dann induktiv (über die Dimension der Skelette und die Grade der Homotopiegruppen) vor. Kleben Sie in jedem Schritt Zellen so ein, dass die entsprechenden Abbildungen auf den niedrigen Homotopiegruppen injektiv werden (bzw. bleiben) und im nächsten Schritt surjektiv sind.

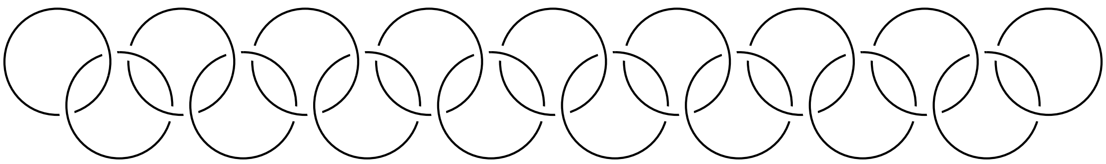
1. Falls Sie Algebraische Topologie I *nicht* besucht haben: Wenn Sie möchten, können Sie sich auf den einfach zusammenhängenden Fall beschränken.
2. Falls Sie das Seminar Topologie vs. Kombinatorik besucht haben: Geben Sie alternativ mithilfe des totalen singulären Komplexes eine funktorielle simpliziale Konstruktion von CW-Approximationen.

Die folgenden Aufgaben bieten die Gelegenheit, den bisher gelernten Stoff zu wiederholen und zu vertiefen; für jede dieser Aufgaben können Sie bis zu vier Zusatzpunkte bekommen.

Bonusaufgabe (Fixpunktsatz von Schauder)**.**

1. Was besagt der Fixpunktsatz von Schauder?
2. Wofür verwendet man den Fixpunktsatz von Schauder?
3. Wie kann man den Fixpunktsatz von Schauder auf den Brouwerschen Fixpunktsatz zurückführen?

Bonusaufgabe (Blorxympische Ringe)**.** Zu $n \in \mathbb{N}$ sei $B_n \subset \mathbb{R}^3$ der folgende Ringelraum (mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^3$)



wobei die „untere“ Zeile aus n Ringen besteht. Bestimmen Sie die singuläre Homologie des blorxympischen Komplements $\mathbb{R}^3 \setminus B_{2014}$ mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.

Bonusaufgabe (TQFT)**.**

1. Wofür steht die Abkürzung TQFT?
2. Was haben TQFTs mit Bordismus zu tun?

Bonusaufgabe (Povray)**.** Modellieren Sie möglichst viele interessante topologische Räume mit Povray (http://www.povray.org).

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

---

freiwillige Abgabe

Wir wünschen Ihnen erholsame Semester„ferien“!