Algebraische Topologie II – (Ko)Homologie im WS 2013/14 – Kurzskript

Prof. Dr. C. Löh Wintersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

-1. Literaturhinweise 1

0. Einführung 2

1. Was ist algebraische Topologie? 3
   1.1. Topologische Bausteine . . . 3
   1.2. Kategorien und Funktoren . . . 9
   1.3. Homotopie . . . 16
   1.4. Homotopieinvarianz – Was ist algebraische Topologie? . . . 19

2. Axiomatische Homologie 24
   2.1. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome . . . 24
   2.2. Fingerübungen . . . 25
   2.3. Homologie von Sphären und Einhängungen . . . 29
   2.4. Verkleben von Räumen – die Mayer-Vietoris-Sequenz . . . 37
   2.5. Ausblick: Existenz und Eindeutigkeit von Homologietheorien . . . 42

3. Singuläre Homologie 45
   3.1. Anschauliche Skizze der Konstruktion . . . 45
   3.2. Konstruktion singulärer Homologie . . . 45
   3.3. Homotopieinvarianz von singulärer Homologie . . . 53
   3.4. Ausschneidung in singulärer Homologie . . . 55
   3.5. Singuläre Homologie als gewöhnliche Homologietheorie . . . 62
   3.6. Die ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie . . . 69
   3.7. Singuläre Homologie und Homotopiegruppen . . . 73

4. Zelluläre Homologie 82
   4.1. CW-Komplexe . . . 82
   4.2. Zelluläre Homologie . . . 87
   4.3. Vergleich von Homologietheorien auf CW-Komplexen . . . 94
   4.4. Die Euler-Charakteristik . . . 101
   4.5. Homotopietheorie von CW-Komplexen . . . 110

5. Ausblick 114

A. Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie A.1
   A.1. Topologische Räume . . . A.1
   A.2. Stetige Abbildungen . . . A.3
   A.3. (Weg-)Zusammenhang . . . A.4
   A.4. Hausdorffräume . . . A.5
   A.5. Kompaktheit . . . A.6

B. Homologische Algebra B.1
   B.1. Exakte Sequenzen . . . B.1
   B.2. Kettenkomplexe und Homologie . . . B.5
   B.3. Kettenhomotopie . . . B.9

Version vom 4. März 2014
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

-1. Literaturhinweise

Die folgenden Listen enthalten eine kleine Auswahl an Literatur zur algebraischen Topologie und verwandten Gebieten.

Algebraische Topologie ((Ko)Homologie)

[1] W.F. Basener. *Topology and Its Applications*, Wiley, 2006.

[2] J.F. Davis, P. Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*, AMS, 2001.

[3] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
http://www.math.cornell.edu/∼hatcher/AT/ATpage.html

[5] W. Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005.

[6] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, dritte Auflage, Springer, 1997.
Hinweis. In diesem Buch wird singuläre (Ko)Homologie mithilfe von Würfeln statt Simplizes definiert.

[7] P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1999.

[8] T. tom Dieck. *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2008.

Mengentheoretische Topologie

[9] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2008.

[10] J.L. Kelley. *General Topology*, Springer, 1975.

[11] A.T. Lundell, S. Weingram. *Topology of CW-complexes*. Van Nostrand, New York, 1969.

[12] J.R. Munkres. *Topology*, zweite Auflage, Pearson, 2003.

[13] L.A. Steen. *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

Homologische Algebra

[14] C. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 2008.

Kategorientheorie

[15] H. Herrlich, G.E. Strecker. *Category Theory*, dritte Auflage, Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann, 2007.

[16] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998.

[17] B. Richter. *Kategorientheorie mit Anwendungen in Topologie*, Vorlesungsskript, WS 2010/11, Universität Hamburg,
http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/cats.pdf

. . . und viele weitere Bücher; je nach eigenen Vorlieben werden Ihnen manche Bücher besser gefallen als andere.

0. Einführung

Diese Vorlesung gibt eine Einführung in die algebraische Topologie, genauer gesagt in singuläre und zelluläre (Ko)Homologie.

Die Kernidee der algebraischen Topologie ist es, topologische Probleme in algebraische Probleme zu übersetzen; dabei werden topologische Räume in algebraische Objekte (z.B. Vektorräume) und stetige Abbildungen in entsprechende Homomorphismen (z.B. lineare Abbildungen) übersetzt. Die dafür geeignete Abstraktionsebene ist die Sprache der Kategorien und Funktoren.

Die algebraische Topologie beschäftigt sich mit der Klassifikation topologischer Räume bzw. stetiger Abbildungen bis auf „stetige Deformationen," sogenannten Homotopien. Dazu versucht man, homotopieinvariante Funktoren zu konstruieren und zu studieren. Die Kunst dabei ist, dass solche Funktoren genug interessante Information über topologische Räume enthalten sollen, dabei aber trotzdem noch hinreichend gut berechenbar sein sollten.

Ein klassisches Beispiel homotopieinvarianter Funktoren sind (Ko)Homologietheorien wie singuläre oder zelluläre (Ko)Homologie, deren grundlegenden Eigenschaften und Aspekte wir in diesem Semester kennenlernen werden. Eine erste intuitive Beschreibung von diesen (Ko)Homologietheorien ist, dass sie in einem gewissen Sinne beschreiben, „welche und wieviele Löcher" ein topologischer Raum hat.

Weitere Beispiele sind etwa Homotopiegruppen (s. Algebraische Topologie I).

Die algebraische Topologie hat eine Vielzahl von Anwendungen, sowohl in der theoretischen als auch in der angewandten Mathematik, zum Beispiel:

- *Topologie*
  - Fixpunktsätze
  - (Nicht)Einbettbarkeitsresultate
  - Studium von Geometrie und Topologie von Mannigfaltigkeiten
  - ...
- *Andere Gebiete der theoretischen Mathematik*
  - Fundamentalsatz der Algebra
  - (Nicht)Existenz gewisser Divisionsalgebren
  - Freiheits- und Endlichkeitsaussagen in der Gruppentheorie
  - Vorbildfunktion für Teile der algebraischen Geometrie
  - ...
- *Angewandte Mathematik*
  - Existenz von Nash-Gleichgewichten in der Spieltheorie
  - Konfigurationsprobleme in der Robotik
  - Untere Komplexitätsschranken für verteilte Algorithmen
  - Höhere Statistik
  - Knotentheorie
  - ...

1. Was ist algebraische Topologie?

Wir erklären im folgenden, wie man den Übersetzungsprozess von der Topologie in die Algebra mit Hilfe der Sprache der Kategorientheorie formalisieren kann. Dazu führen wir grundlegende Begriffe der Sprache der Kategorientheorie ein, illustrieren diese am Beispiel topologischer Räume und algebraischer Strukturen, und erklären an einem Beispiel das Grundprinzip der algebraischen Topologie.

1.1. Topologische Bausteine

Wir beginnen zum Einstieg mit grundlegenden Beispielen und Konstruktionen topologischer Räume – um später einen hinreichend großen Fundus an Beispielen zur Verfügung zu haben.

Konstruktionsprinzip: Teilräume

Eine erste Möglichkeit aus topologischen Räumen neue topologische Räume zu konstruieren, ist mithilfe der Teilraumtopologie (Bemerkung A.6).

Die wichtigsten Bausteine in der algebraischen Topologie sind Bälle und Sphären, sowie Simplizes (Abbildung (1.2)):

Definition 1.1 (Ball, Sphäre, Standardsimplex)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$.

- Der *n-dimensionale Ball* ist definiert als

$$D^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \|x\|_2 \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n$$

  (versehen mit der Teilraumtopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$).
- Die *n-dimensionale Sphäre* ist definiert als

$$S^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\|_2 = 1 \right\} = \partial D^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

  (versehen mit der Teilraumtopologie).
- Das *n-dimensionale Standardsimplex* ist definiert als

$$\Delta^n := \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_1 \geq 0, \ldots, x_{n+1} \geq 0 \text{ und } \sum_{j=1}^{n+1} x_j = 1 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

  (versehen mit der Teilraumtopologie). Mit anderen Worten: Das Standardsimplex Δ^n ist die konvexe Hülle von den Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Bemerkung 1.3 (Bälle vs. Simplizes)**.** Ist $n \in \mathbb{N}$, so sind D^n und Δ^n homöomorph. Im Kontext der singulären (Ko)Homologie ist das Standardsimplex aufgrund seiner offensichtlichen kombinatorischen Struktur jedoch dem Ball vorzuziehen.

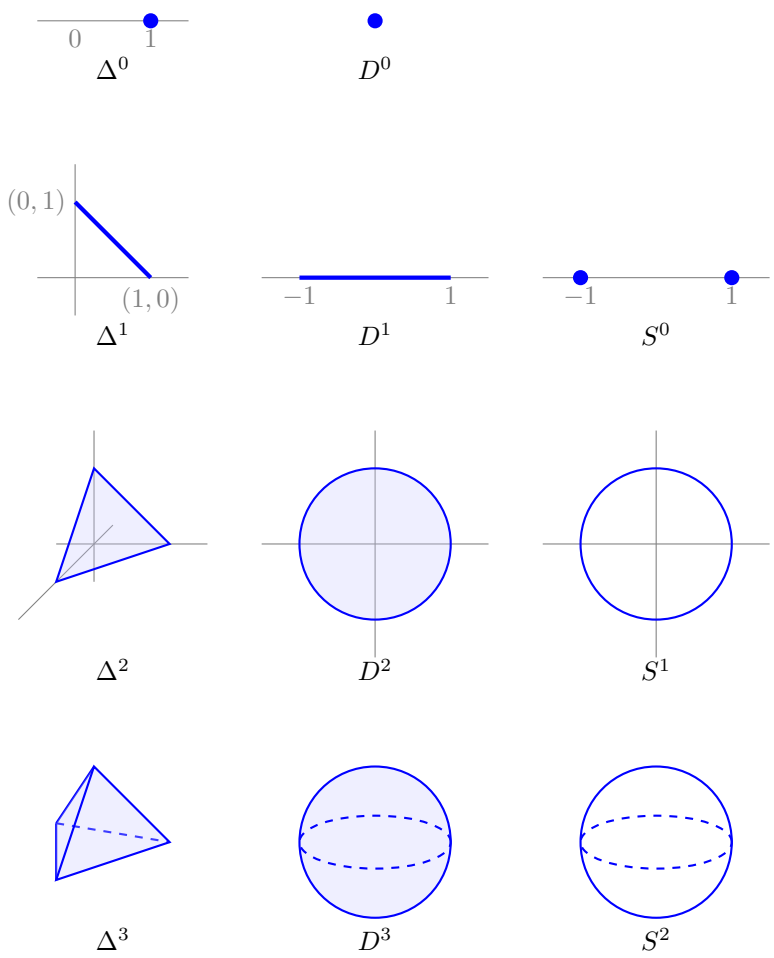


Abbildung (1.2): Standardsimplizes, Bälle, Sphären

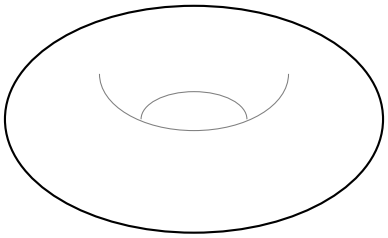


Abbildung (1.5): Der zweidimensionale Torus

Konstruktionsprinzip: Produkträume

Eine Möglichkeit aus zwei topologischen Räumen einen neuen topologischen Raum zu konstruieren, ist mithilfe der Produkttopologie (Bemerkung A.7).

Definition 1.4 (Torus)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Der *n-dimensionale Torus* ist definiert als $(S^1)^n$, versehen mit der Produkttopologie (Abbildung (1.5)).

In der Definition von Homotopie werden Produkträume der Form $X \times [0,1]$ eine zentrale Rolle Spielen (Kapitel 1.3).

Konstruktionsprinzip: Quotientenräume und Verkleben

Quotientenräume bzw. die Quotiententopologie sind ein Hilfsmittel, um das „Verkleben“ topologischer Räume zu modellieren:

Definition 1.6 (Quotiententopologie)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei Y eine Menge und sei $p\colon X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Die *von p auf Y induzierte Quotiententopologie* ist als

$$\left\{U \subset Y \;\middle|\; p^{-1}(U) \text{ ist offen in } X\right\}$$

definiert.

In den meisten Anwendungen ist die surjektive Abbildung $p\colon X \longrightarrow Y$ dabei in der Form gegeben, dass man auf X eine Äquivalenzrelation betrachtet, Y die Menge der Äquivalenzklassen ist und p die kanonische Projektion ist.

Beispiel 1.8 (Möbiusband)**.** Das *Möbiusband* ist der Quotientenraum

$$M := [0,1] \times [0,1]/\sim,$$

wobei $[0,1]\times[0,1]$ die Produkttopologie trägt und die Äquivalenzrelation „$\sim$“ wie folgt definiert ist: Für alle $x, y \in [0,1]\times[0,1]$ gilt genau dann $x \sim y$, wenn $x = y$ ist oder die Bedingungen $x_1 \in \{0,1\}$, $y_1 = 1-x_1$ und $y_2 = 1-x_2$ erfüllt sind. Dabei versehen wir M mit der Quotiententopologie, die von der kanonischen Projektion $[0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]/\sim$ induziert wird (Abbildung (1.7)).

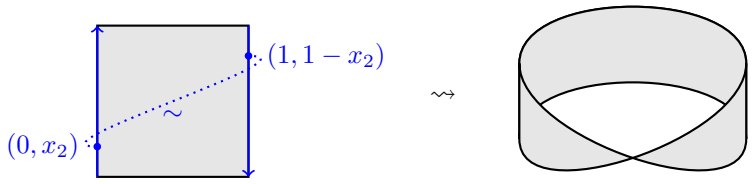


Abbildung (1.7): Das Möbiusband als Quotientenraum

Definition 1.9 (reell-projektive Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Der *n-dimensionale reell-projektive Raum* ist definiert als

$$\mathbb{R}P^n := S^n/(\forall_{x \in S^n} \quad x \sim -x),$$

versehen mit der Quotiententopologie.

Caveat 1.10. Ist X ein topologischer Raum, ist Y eine Menge, ist $p\colon X \longrightarrow Y$ surjektiv und trägt Y die von p induzierte Quotiententopologie, so ist p im allgemeinen *nicht* offen! (D.h. im allgemeinen bildet p *nicht* offene Mengen auf offene Mengen ab.)

Mithilfe des folgenden Kriteriums kann man überprüfen, ob eine Abbildung aus einem solchen Quotientenraum heraus stetig ist:

Proposition 1.11 (universelle Eigenschaft der Quotiententopologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum, sei Y eine Menge und sei $p\colon X \longrightarrow Y$ eine surjektive Abbildung. Dann gilt: Ist Z ein topologischer Raum und $g\colon Y \longrightarrow Z$ eine Abbildung, so ist g genau dann bezüglich der von p auf Y induzierten Quotiententopologie stetig, wenn $g \circ p\colon X \longrightarrow Z$ stetig ist.*

Beweisskizze. Dies folgt direkt aus der Definition der Quotiententopologie. □

Das Verkleben zweier topologischer Räume wird mithilfe von Pushouts modelliert. Als ersten Zwischenschritt modellieren wir das „Nebeneinanderlegen“ topologischer Räume durch die disjunkte Vereinigungstopologie:

Definition 1.12 (disjunkte Vereinigungstopologie)**.** Sei I eine Menge und sei $(X_i)_{i \in I}$ eine Familie topologischer Räume. Dann ist die *disjunkte Vereinigunstopologie* auf der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ als

$$\left\{U \subset \bigsqcup\nolimits_{i \in I} X_i \;\middle|\; \forall_{j \in I} \quad i_j^{-1}(U) \text{ offen in } X_j\right\}$$

definiert, wobei $i_j\colon X_j \longrightarrow \bigsqcup_{i \in I} X_i$ zu $j \in I$ die kanonische Inklusion bezeichnet.[1]

Wir kombinieren dies nun mit der Quotiententopologie und erhalten so Pushouts topologischer Räume:

[1] Wir werden im folgenden (etwas schlampig) immer die Summanden X_i als Teilmengen von $\bigsqcup_{i \in I} X_i$ ansehen, um die Notation etwas übersichtlicher zu halten.

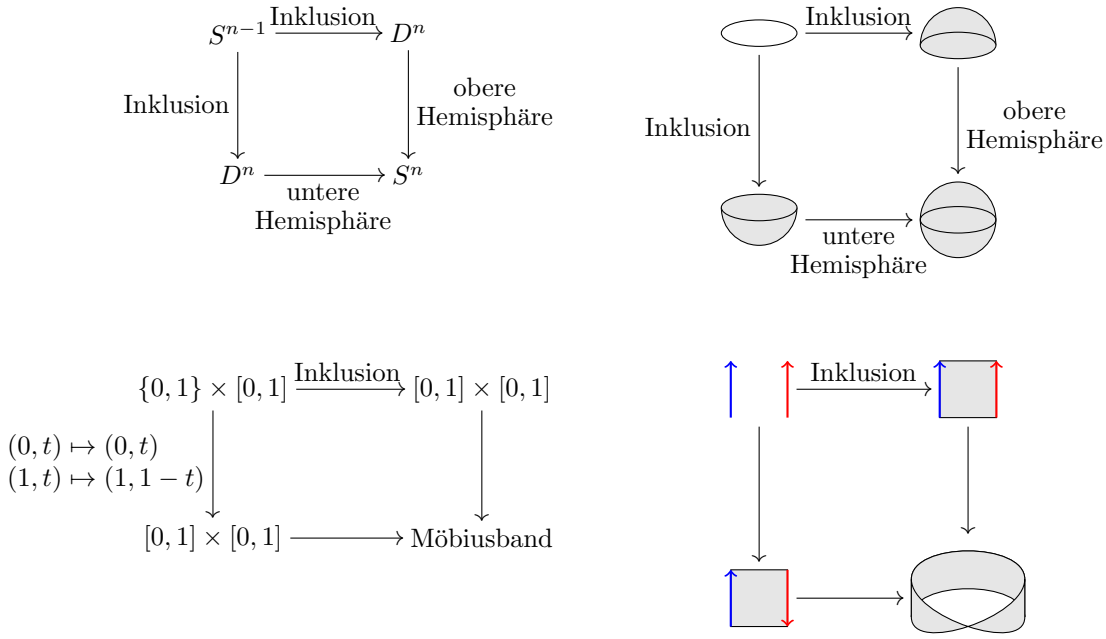


Abbildung (1.15): Pushouts in Top

Definition 1.13 (Pushout topologischer Räume)**.** Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume und seien $i_1 \colon X_0 \longrightarrow X_1$ und $i_2 \colon X_0 \longrightarrow X_2$ stetige Abbildungen. Das *Pushout von*

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_2} & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \\ X_1 & & \end{array}$$

ist der topologische Raum (versehen mit der Quotiententopologie der disjunkten Vereinigungstopologie)

$$X_1 \cup_{X_0} X_2 := (X_1 \sqcup X_2)/\sim,$$

wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation auf $X_1 \sqcup X_2$ ist, die von

$$\forall_{x \in X_0} \quad i_1(x) \sim i_2(x)$$

erzeugt wird.

Beispiel 1.14 (Pushouts topologischer Räume)**.** Konkrete Beispiele für Pushouts topologischer Räume finden sich in Abbildung (1.15).

Eine bequeme Möglichkeit, mit Pushouts zu arbeiten, ist die universelle Eigenschaft:

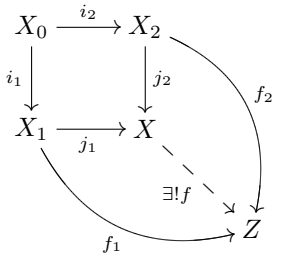


Abbildung (1.17): Die universelle Eigenschaft des Pushouts

Proposition 1.16 (universelle Eigenschaft des Pushouts topologischer Räume)**.** *Seien X_0, X_1, X_2 topologische Räume und seien $i_1\colon X_0 \longrightarrow X_1$ und $i_2\colon X_0 \longrightarrow X_2$ stetige Abbildungen. Ein topologischer Raum X, zusammen mit stetigen Abbildungen $j_1\colon X_1 \longrightarrow X$, $j_2\colon X_2 \longrightarrow X$,* erfüllt die universelle Eigenschaft dieses Pushouts, *wenn folgendes gilt: Es gilt $j_2 \circ i_2 = j_1 \circ i_1$ und für alle topologischen Räume Z und alle stetigen Abbildungen $f_1\colon X_1 \longrightarrow Z$, $f_2\colon X_2 \longrightarrow Z$ mit $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$ gibt es genau eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Z$ mit (Abbildung (1.17))*

$$f \circ j_1 = f_1 \quad \textit{und} \quad f \circ j_2 = f_2.$$

In diesem Fall sagt man auch, dass

$$\begin{array}{ccc} X_0 & \xrightarrow{i_2} & X_2 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_2} \\ X_1 & \xrightarrow[j_1]{} & X \end{array}$$

ein Pushoutdiagramm topologischer Räume *ist.*

1. *Das Pushout $X := X_1 \cup_{X_0} X_2$ bezüglich i_1 und i_2, zusammen mit den von den Inklusionen nach $X_1 \sqcup X_2$ induzierten stetigen Abbildungen $j_1\colon X_1 \longrightarrow X$, $j_2\colon X_2 \longrightarrow X$, besitzt die universelle Eigenschaft dieses Pushouts.*
2. *Erfüllt ein topologischer Raum X', zusammen mit $j_1'\colon X_1 \longrightarrow X'$, $j_2'\colon X_2 \longrightarrow X'$ die universelle Eigenschaft dieses Pushouts, so gibt es einen kanonischen Homöomorphismus zwischen X und X'.*

Beweisskizze. Die erste Aussage lässt sich leicht anhand der Konstruktion des Pushouts nachvollziehen. Die zweite Aussage ist eine Instanz eines allgemeinen Arguments über universelle Eigenschaften.[2] □

Wir beenden diesen kurzen Überblick über topologische Bausteine mit einer Liste typischer, klassischer Fragestellungen:

[2] mehr zu universellen Eigenschaften, Limiten und Kolimiten wurde in der Vorlesung Algebraischen Topologie I behandelt:
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie1_ss13/lecture_notes.pdf

- Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph? Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ gibt es nichtleere offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{R}^m$, die zueinander homöomorph sind?
- Für welche $n, m \in \mathbb{N}$ sind S^n und S^m homöomorph?
- Gibt es $n \in \mathbb{N}$, für die es eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ gibt, die zu S^n homöomorph ist?
- Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ zu S^n homöomorph. Was kann man über das Komplement $\mathbb{R}^n \subset S$ aussagen?
- Gibt es eine Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, die zu $\mathbb{R}P^2$ homöomorph ist?
- Kann man einen Igel kämmen? Für welche $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^n ?
- ...

Diese Fragen sind jedoch mit elementaren Methoden nicht oder nur mit unverhältnismäßig großem Aufwand zu lösen. Wir werden im folgenden sehen, wie man mithilfe der Methoden der algebraischen Topologie solche Probleme angehen kann.

1.2. Kategorien und Funktoren

Wir formalisieren nun den Kontext für „Übersetzungen“ zwischen mathematischen Theorien, z.B. von der Topologie in die Algebra.

Als ersten Schritt geben wir dazu einen abstrakten Rahmen für mathematische Theorien: Mathematische Theorien bestehen aus Objekten (z.B. Gruppen, reelle Vektorräume, topologische Räume, messbare Räume, ...) und strukturerhaltenden Abbildungen (z.B. Gruppenhomomorphismen, $\mathbb{R}$-lineare Abbildungen, stetige Abbildungen, messbare Abbildungen, ...) dazwischen. Dies abstrahiert man zum Begriff der Kategorie:

Definition 1.18 (Kategorie)**.** Eine *Kategorie* C besteht aus den folgenden Komponenten:

- Eine Klasse[3] $\mathrm{Ob}(C)$; die Elemente von $\mathrm{Ob}(C)$ heißen *Objekte von* C.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Menge $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$; die Elemente von $\mathrm{Mor}_C(X, Y)$ heißen *Morphismen von* X *nach* Y *in* C. (Dabei wird implizit angenommen, dass die Morphismenmengen zwischen verschiedenen Objektpaaren disjunkt sind.)
- Zu je drei Objekten $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Verknüpfung

$$\begin{aligned} \circ\colon \mathrm{Mor}_C(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_C(X, Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Z) \\ (g, f) &\longmapsto g \circ f \end{aligned}$$

  von Morphismen.

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

[3] Klassen sind eine Verallgemeinerung von Mengen; so gibt es etwa die Klasse aller Mengen. Weitere Informationen zu Mengen und Klassen finden Sie in den Büchern *Mengenlehre für den Mathematiker* (U. Friedrichsdorf, A. Prestel, Vieweg, 1985) und *Set theory and the continuum problem* (R.M. Smullyan, M. Fitting, überarbeitete Auflage, Dover, 2010).

– Für jedes Objekt X in C gibt es einen Morphismus $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Mor}_C(X, X)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ bzw. $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ gilt

$$f \circ \mathrm{id}_X = f \qquad \text{und} \qquad \mathrm{id}_X \circ g = g.$$

(Dadurch ist id_X eindeutig bestimmt und heißt *Identitätsmorphismus von X in C*.)
– Die Verknüpfung von Morphismen ist assoziativ: Für alle Objekte W, X, Y, Z in C und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(W, X)$, $g \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $h \in \mathrm{Mor}_C(Y, Z)$ gilt

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Caveat 1.19. Das Konzept der Morphismen und Verknüpfungen ist nach dem Beispiel der Abbildungen zwischen Mengen und der gewöhnlichen Abbildungskomposition modelliert. Im allgemeinen muss es sich bei Morphismen aber nicht um Abbildungen zwischen Mengen und bei der Verknüpfung nicht um Abbildungskomposition handeln!

Beispiel 1.20 (leere Kategorie)**.** Die *leere Kategorie* ist die (eindeutig bestimmte) Kategorie, deren Objektklasse die leere Menge ist.

Beispiel 1.21 (Gruppen als Kategorien)**.** Sei G eine Gruppe. Dann erhalten wir wie folgt eine Kategorie C_G:
– Objekte: Die Kategorie C_G besitze genau ein Objekt, etwa 0.
– Morphismen: Es sei $\mathrm{Mor}_C(0, 0) := G$.
– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(0,0) \times \mathrm{Mor}_C(0,0) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(0,0) \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h. \end{aligned}$$

Beispiel 1.22 (Mengenlehre)**.** Die Kategorie Set der Mengen besteht aus:
– Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$ die Klasse(!) aller Mengen.
– Morphismen: Sind X und Y Mengen, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, Y)$ die Menge aller mengentheoretischen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
– Verknüpfungen: Sind X, Y, Z Mengen, so sei die Verknüpfung $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(Y, Z) \times \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X, Z)$ die gewöhnliche Abbildungskomposition.

Es ist klar, dass die Verknüpfung assoziativ ist. Ist X eine Menge, so ist die gewöhnliche Identitätsabbildung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

der Identitätsmorphismus id_X von X in Set.

Beispiel 1.23 (Algebra)**.** Die Kategorie $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorräume besteht aus:
– Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}})$ die Klasse aller $\mathbb{R}$-Vektorräume.
– Morphismen: Sind V und W reelle Vektorräume, so sei $\mathrm{Mor}_{\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}}(V, W)$ die Menge aller lineare Abbildungen $V \longrightarrow W$.

– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog erhält man auch die Kategorie Group der Gruppen, die Kategorie Ab der abelschen Gruppen, die Kategorie Mod_R der R-Rechtsmoduln bzw. die Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ der R-Linksmoduln über einem Ring R, ...

Beispiel 1.24 ((absolute) Topologie)**.** Die Kategorie Top der topologischen Räume besteht aus:

– Objekte: Es sei $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top})$ die Klasse aller topologischen Räume.
– Morphismen: Sind X und Y topologische Räume, so sei

$$\mathrm{map}(X,Y) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$$

die Menge aller stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$.
– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Oft ist man aber auch am Unterschied zwischen einem topologischen Raum und einem gegebenen Unterraum interessiert. Zwei Möglichkeiten dies zu tun sind Quotientenräume und Raumpaare:

Beispiel 1.25 (relative Topologie, Raumpaare)**.** Die Kategorie Top^2 der Raumpaare besteht aus:

– Objekte: Es sei

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2) := \big\{(X,A) \;\big|\; X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}), A \subset X\big\}.$$

Die Elemente von $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ heißen *Raumpaare*.
– Morphismen: Sind (X,A), (Y,B) Raumpaare, so sei

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^2}\big((X,A),(Y,B)\big) := \big\{f\colon X \longrightarrow Y \;\big|\; f \text{ ist stetig und } f(A) \subset B\big\}.$$

– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben (dies ist tatsächlich wohldefiniert).

Der absolute Fall entspricht dabei dem Fall, dass der Unterraum leer ist; der Fall punktierter Räume (der in der Homotopietheorie wichtig ist), entspricht dem Fall, dass der Unterraum aus genau einem Punkt besteht.

Die folgende Kategorie spielt in der homologischen Algebra und in der Konstruktion singulärer Homologie (zumindest implizit) eine zentrale Rolle:

Beispiel 1.26 (Simplexkategorie)**.** Die *Simplexkategorie* ist wie folgt definiert:

– Objekte: Sei

$$\mathrm{Ob}(\Delta) := \big\{\Delta(n) \;\big|\; n \in \mathbb{N}\big\},$$

wobei wir für $n \in \mathbb{N}$ die Notation $\Delta(n) := \{0,\dots,n\}$ verwenden.
– Morphismen: Sind $n,m \in \mathbb{N}$, so sei

$$\mathrm{Mor}_{\Delta} := \big\{f\colon \{0,\dots,n\} \longrightarrow \{0,\dots,m\} \;\big|\; f \text{ ist monoton wachsend}\big\}.$$

– Verknüpfungen: Die Verknüpfung sei durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben (dies ist tatsächlich wohldefiniert).

Die Anschauung dazu ist, dass die Elemente von $\Delta(n)$ den Ecken des Standardsimplexes Δ^n entsprechen.

Alle Begriffe, die sich durch Objekte und Morphismen ausdrücken lassen, lassen sich zu entsprechenden Begriffen in allgemeinen Kategorien verallgemeinern. Ein erstes Beispiel ist der Isomorphiebegriff:

Definition 1.27 (Isomorphismus)**.** Sei C eine Kategorie. Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sind *isomorph in* C, wenn es Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, X)$ mit

$$g \circ f = \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_Y$$

gibt. In diesem Fall sind f und g *Isomorphismen in* C und wir schreiben $X \cong_C Y$ (oder wenn die Kategorie aus dem Kontext klar ist: $X \cong Y$).

Beispiel 1.28 (Isomorphismenbegriffe)**.**
- Objekte in Set sind genau dann isomorph, wenn sie gleichmächtig sind.
- Objekte in Group, Ab, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$, … sind genau dann im obigen Sinne isomorph, wenn sie im gewöhnlichen algebraischen Sinne isomorph sind.
- Objekte in Top sind genau dann isomorph, wenn sie homöomorph sind.
- Objekte in der Simplexkategorie Δ sind genau dann isomorph, wenn sie gleich sind.

Als nächsten Schritt formalisieren wir nun den „Übersetzungsbegriff“, den wir verwenden möchten, um Topologie in Algebra zu übersetzen.; grob gesagt handelt es sich dabei um „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Kategorien“. Dies führt zum Begriff des Funktors:

Definition 1.29 (Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *(kovarianter) Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:
- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C\big(F(X), F(Y)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, X \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$ und alle $g \in \mathrm{Mor}_C(Y, Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Beispiel 1.30 (Identitätsfunktor)**.** Sei C eine Kategorie. Dann ist der *Identitätsfunktor* $\mathrm{Id}_C\colon C \longrightarrow C$ wie folgt definiert:
- Auf Objekten betrachten wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(C) \\ X &\longmapsto X. \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Beispiel 1.31 (Vergissfunktor)**.** Der Vergissfunktor $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$ ist wie folgt definiert:
– Auf Objekten betrachten wir die Abbildung $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}) \longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})$, die einem topologischen Raum die unterliegende Menge zuordnet.
– Auf Morphismen: Für alle topologischen Räume X, Y betrachten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}}(X,Y) = \mathrm{map}(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}(X,Y) \\ f &\longmapsto f. \end{aligned}$$

Analog erhält man Vergissfunktoren $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Set}$, $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, ...

Beispiel 1.32 (frei erzeugte abelsche Gruppen)**.** Es gibt einen Funktor $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$, der die Mengenlehre in die kommutative Algebra überträgt:
– Auf Objekten definieren wir

$$\begin{aligned} F\colon \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Ab}) \\ X &\longmapsto \bigoplus_X \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

(Wir betrachten dabei eine Menge X in kanonischer Weise als Teilmenge, bzw. sogar Basis, von $\bigoplus_X \mathbb{Z}$.)
– Auf Morphismen definieren wir F wie folgt: Sind X, Y Mengen und ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung, so definieren wir $F(f)\colon \bigoplus_X \mathbb{Z} \longrightarrow \bigoplus_Y \mathbb{Z}$ als die eindeutig bestimmte $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung, die f von der Basis X auf ganz $\bigoplus_X \mathbb{Z}$ fortsetzt.
Dies liefert tatsächlich einen Funktor.

Außerdem liefern Objekte in Kategorien Funktoren, die beschreiben wie die entsprechende Kategorie aus dem Blickwinkel dieses Objekts aussieht:

Beispiel 1.33 (darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann erhalten wir einen Funktor

$$\mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set},$$

den *von X dargestellten (kovarianten) Funktor*. Dieser Funktor ist wie folgt definiert:
– Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)\colon \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set}) \\ Y &\longmapsto \mathrm{Mor}_C(X,Y). \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Sind $Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)\colon \mathrm{Mor}_C(Y,Z) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}\big(\mathrm{Mor}_C(X,Y), \mathrm{Mor}_C(X,Z)\big) \\ g &\longmapsto (f \mapsto g \circ f). \end{aligned}$$

Beispiel 1.34 (Tensorprodukt)**.** Sei R ein Ring und sei A ein Links-R-Modul. Dann erhalten wir einen Funktor $\cdot \otimes_R A\colon \mathsf{Mod}_R \longrightarrow \mathsf{Ab}$ wie folgt:

– Auf Objekten sei

$$\begin{aligned} \cdot \otimes_R A\colon \mathsf{Mod}_R &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ M &\longmapsto M \otimes_R A. \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Für alle $M, N \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ sei

$$\begin{aligned} \cdot \otimes_R A\colon \mathrm{Mor}_{\mathsf{Mod}_R}(M,N) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ab}}(M \otimes_R A, N \otimes_R A) \\ f &\longmapsto f \otimes_R \mathrm{id}_A\,. \end{aligned}$$

Für (Ko)Homologie (sowohl in der algebraischen Topologie als auch in der homologischen Algebra) wichtig sind außerdem Funktoren, die auf der Simplexkategorie Δ definiert sind.

Eine wesentliche Eigenschaft von Funktoren ist, dass sie – da sie mit Verknüpfungen und Identitätsmorphismen verträglich sind – Isomorphie erhalten und somit ein geeignetes Konzept für Invarianten liefern:

Proposition 1.35 (Funktoren erhalten Isomorphie)**.** *Seien C, D Kategorien, sei $F\colon C \longrightarrow D$ ein Funktor und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$.*

1. *Ist $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ ein Isomorphismus in C, so ist $F(f) \in \mathrm{Mor}_D(F(X),F(Y))$ ein Isomorphismus in D.*
2. *Insbesondere: Ist $X \cong_C Y$, so folgt $F(X) \cong_D F(Y)$. Bzw.: Ist $F(X) \ncong_D F(Y)$, so ist $X \ncong_C Y$.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt direkt aus den definierenden Eigenschaften von Funktoren. Der zweite Teil ist eine unmittelbare Folgerung aus dem ersten Teil. □

Geeignete Funktoren können also helfen zu zeigen, dass gewisse Objekte *nicht* isomorph sind.

Caveat 1.36. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. Objekte, die unter einem Funktor auf isomorphe Objekte abgebildet werden, sind im allgemeinen *nicht* isomorph.

Um mit Funktoren arbeiten zu können, wollen wir außerdem in der Lage sein, Funktoren zu komponieren und zu vergleichen:

Definition 1.37 (Komposition von Funktoren)**.** Seien C, D, E Kategorien und seien $F\colon C \longrightarrow D$, $G\colon D \longrightarrow E$ Funktoren. Dann ist $G \circ F\colon C \longrightarrow E$ der wie folgt definierte Funktor:

– Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned} G \circ F\colon C &\longrightarrow E \\ X &\longmapsto G\big(F(X)\big). \end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ sei

$$\begin{aligned} G \circ F \colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_E\big(G(F(X)), G(F(Y))\big) \\ f &\longmapsto G(F(f)). \end{aligned}$$

Funktoren lassen sich mithilfe von sogenannten natürlichen Transformationen vergleichen; natürliche Transformationen sind „strukturerhaltende Abbildungen zwischen Funktoren“:

Definition 1.38 (natürliche Transformation, natürlicher Isomorphismus)**.** Seien C und D Kategorien und seien $F, G \colon C \longrightarrow D$ Funktoren.

– Eine *natürliche Transformation T von F nach G*, kurz $T \colon F \Longrightarrow G$, besteht aus einer Familie $\big(T(X) \in \mathrm{Mor}_D(F(X), G(X))\big)_{X \in \mathrm{Ob}(C)}$ von Morphismen, so dass für alle Objekte $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle Morphismen $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ die Gleichheit

$$G(f) \circ T(X) = T(Y) \circ F(f)$$

in der Kategorie D gilt – d.h., dass die entsprechenden Diagramme in D kommutativ sind:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{F(f)} & F(Y) \\ {\scriptstyle T(X)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T(Y)} \\ G(X) & \xrightarrow[G(f)]{} & G(Y) \end{array}$$

– Ein *natürlicher Isomorphismus* ist eine natürliche Transformation, die objektweise aus Isomorphismen besteht (äquivalent ist die Existenz einer objektweisen inversen natürlichen Transformation).

Beispiel 1.39 (Doppeldual)**.** Wir betrachten einerseits den Identitätsfunktor

$$\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_\mathbb{R}} \colon \mathsf{Vect}_\mathbb{R} \longrightarrow \mathsf{Vect}_\mathbb{R}$$

und andererseits den Doppeldualfunktor

$$D := \mathrm{Hom}_\mathbb{R}\big(\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(\,\cdot\,, \mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \colon \mathsf{Vect}_\mathbb{R} \longrightarrow \mathsf{Vect}_\mathbb{R}\,.$$

Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, so definieren wir die $\mathbb{R}$-lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T(V) \colon V &\longrightarrow \mathrm{Hom}_\mathbb{R}\big(\mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R}), \mathbb{R}\big) \\ v &\longmapsto \big(f \mapsto f(v)\big). \end{aligned}$$

Eine einfache Rechnung zeigt, dass $(T(V))_{V \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Vect}_\mathbb{R})}$ eine natürliche Transformation $\mathrm{Id}_{\mathsf{Vect}_\mathbb{R}} \Longrightarrow D$ ist. Eingeschränkt auf die Kategorie der endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräume ist dies sogar ein natürlicher Isomorphismus.

Für jeden endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum V gilt auch $V \cong_\mathbb{R} \mathrm{Hom}_\mathbb{R}(V, \mathbb{R})$; man beachte jedoch, dass es *keinen* natürlichen Isomorphismus dieser Form gibt!

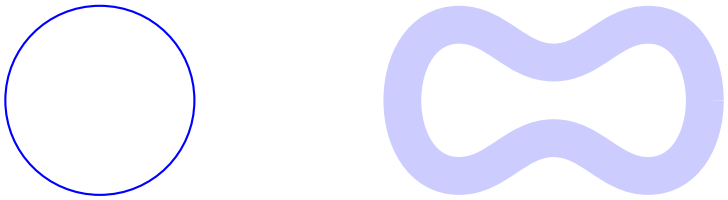


Abbildung (1.42): Diese Räume sind *nicht* homöomorph, haben aber dieselbe „prinzipielle Form“.

Beispiel 1.40 (Tensorprodukte)**.** Sei R ein Ring, seien A und B Links-R-Moduln und sei $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(A, B)$. Dann ist

$$\big(\mathrm{id}_M \otimes_R f \colon M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R B\big)_{M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)}$$

eine natürliche Transformation $\cdot \otimes_R A \Longrightarrow \cdot \otimes_R B$. [Mithilfe des sogenannten Yoneda-Lemmas und Beispiel 1.41 lässt sich zeigen, dass alle natürlichen Transformationen $\cdot \otimes_R A \Longrightarrow \cdot \otimes_R B$ von dieser Form sind.]

Beispiel 1.41 (darstellbare Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie, seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und sei $f \in \mathrm{Mor}_C(X, Y)$. Dann ist

$$\begin{pmatrix} \mathrm{Mor}_C(Y, Z) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, Z) \\ g \longmapsto g \circ f \end{pmatrix}_{Z \in \mathrm{Ob}(C)}$$

eine natürliche Transformation $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$. [Mithilfe des Yoneda-Lemmas lässt sich zeigen, dass alle natürlichen Transformationen $\mathrm{Mor}_C(Y, \cdot\,) \Longrightarrow \mathrm{Mor}_C(X, \cdot\,)$ von dieser Form sind.]

1.3. Homotopie

Für viele Fragestellungen in der (algebraischen) Topologie ist Homöomorphie ein zu starrer Isomorphiebegriff (Abbildung (1.42)). Wir werden daher einen schwächeren Isomorphiebgeriff einführen. Dazu werden wir gewisse Deformationen zwischen stetigen Abbildungen bzw. topologischen Räumen als vernachlässigbar ansehen. Dies führt zum Begriff der Homotopie (Abbildung (1.45)):

Definition 1.43 (Homotopie, Homotopieäquivalenz, nullhomotop, kontraktibel)**.** Seien X und Y topologische Räume.

- Seien $f, g \colon X \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen. Dann heißt f *homotop zu* g, wenn sich f stetig in g deformieren lässt, d.h., falls es es eine stetige Abbildung $h \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit
$$h(\,\cdot\,, 0) = f \qquad \text{und} \qquad h(\,\cdot\,, 1) = g$$
gibt (wobei $X \times [0,1]$ mit der Produkttopologie versehen ist). In diesem Fall schreiben wir $f \simeq g$ und nennen h eine *Homotopie von f nach g*.

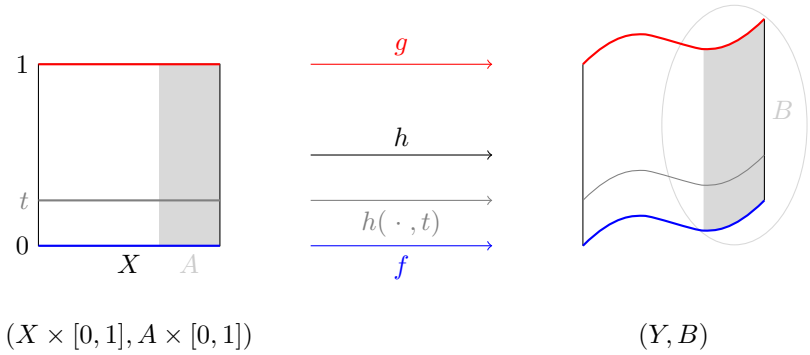


Abbildung (1.45): Homotopien sind „Filme“ zwischen zwei stetigen Abbildungen [von Raumpaaren]

- Abbildungen, die zu konstanten Abbildungen homotop sind, heißen *nullhomotop*.
- Die topologischen Räume X und Y heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow X$ mit

$$g \circ f \simeq \mathrm{id}_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$$

  gibt; solche Abbildungen heißen *Homotopieäquivalenzen*. In diesem Fall schreibt man $X \simeq Y$.
- Topologische Räume, die zu einem einpunktigen topologischen Raum homotopieäquivalent sind, heißen *kontraktibel*.

Definition 1.44 (Homotopie/Homotopieäquivalenz von Raumpaaren)**.** Seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare.

- Seien $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen von Raumpaaren (d.h. Morphismen in Top^2). Dann heißt f *homotop zu* g *bezüglich der Unterräume* A *und* B, wenn sich f als Abbildung von Raumpaaren stetig in g deformieren lässt, d.h., falls es es eine stetige Abbildung $h\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren mit

$$h(\,\cdot\,, 0) = f \qquad \text{und} \qquad h(\,\cdot\,, 1) = g$$

  gibt. In diesem Fall schreiben wir $f \simeq_{A,B} g$ und nennen h eine *Homotopie von Raumpaaren von* f *nach* g.
- Die Raumpaare (X, A) und (Y, B) heißen *homotopieäquivalent*, wenn es stetige Abbildungen $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ und $g\colon (Y, B) \longrightarrow (X, A)$ von Raumpaaren mit

$$g \circ f \simeq_{A,A} \mathrm{id}_{(X,A)} \qquad \text{und} \qquad f \circ g \simeq_{B,B} \mathrm{id}_{(Y,B)}$$

  gibt; solche Abbildungen heißen *Homotopieäquivalenzen von Raumpaaren*. In diesem Fall schreibt man $(X, A) \simeq (Y, B)$.

Caveat 1.46. Homöomorphismen [von Raumpaaren] sind Homotopieäquivalenzen [von Raumpaaren]. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*. Zum Beispiel sind Homotopieäquivalenzen [von Raumpaaren] im allgemeinen weder injektiv noch surjektiv.

Beispiel 1.47 (Bälle sind kontraktibel)**.** Ist $n \in \mathbb{N}$, so sind der n-dimensionale Ball D^n und $\mathbb{R}^n$ kontraktibel. Wir werden im Verlauf der Vorlesung sehen, dass Sphären *nicht* kontraktibel sind.

Beispiel 1.48 (aufgedickte Sphären)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $S^n \simeq \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Es gilt jedoch $(D^1, S^0) \not\simeq (\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\})$; letzteres folgt daraus, dass $\overline{\mathbb{R} \setminus \{0\}} = \mathbb{R}$ ist und S^0 nicht zusammenhängend ist. Dies gilt analog auch höherdimensional, erfordert aber höhere Zusammenhangsbegriffe und -resultate, die uns im Moment noch nicht zur Verfügung stehen.

Proposition 1.49 (Grundlegende Eigenschaften des Homotopiebegriffs von Raumpaaren)**.**

1. *Seien (X, A) und (Y, B) Raumpaare; dann ist „$\simeq_{A,B}$“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge*
$$\operatorname{map}\big((X, A), (Y, B)\big) := \operatorname{Mor}_{\mathsf{Top}^2}\big((X, A), (Y, B)\big)$$
der stetigen Abbildungen $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von Raumpaaren.
2. *Seien (X, A), (Y, B), (Z, B) Raumpaare und seien $f, f' \in \operatorname{map}((X, A), (Y, B))$ und $g, g' \in \operatorname{map}((Y, B), (Z, C))$ stetige Abbildungen von Raumpaaren mit $f \simeq_{A,B} f'$ und $g \simeq_{B,C} g'$. Dann gilt auch $g \circ f \simeq_{A,C} g' \circ f'$.*

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Reflexivität folgt mithilfe der Homotopie, die zu jedem Zeitpunkt dieselbe Abbildung liefert; Symmetrie folgt, indem man entsprechende Homotopien rückwärts durchläuft; Transitivität folgt, indem man entsprechende Homotopien mit doppelter Geschwindigkeit durchläuft und dann mithilfe von Proposition A.13 verklebt.

Der zweite Teil folgt, indem man entsprechende Homotopien „komponiert“. □

Proposition 1.50 (Grundlegende Eigenschaften des Homotopiebegriffs)**.**

1. *Seien X und Y topologische Räume; dann ist „$\simeq$“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge $\operatorname{map}(X, Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y.*
2. *Seien X, Y, Z topologische Räume und seien $f, f' \colon X \longrightarrow Y$ und $g, g' \colon Y \longrightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $f \simeq f'$ und $g \simeq g'$. Dann gilt auch $g \circ f \simeq g' \circ f'$.*
3. *Sei X ein kontraktibler topologischer Raum. Dann gilt für alle topologischen Räume Y, dass alle stetigen Abbildungen $X \longrightarrow Y$ bzw. $Y \longrightarrow X$ nullhomotop sind.*

Beweisskizze. Die ersten beiden Teile folgen analog zum Beweis von Proposition 1.49.

Der dritte Teil folgt aus dem zweiten Teil, indem man berücksichtigt, dass id_X nullhomotop ist (da X kontraktibel ist). □

Mithilfe dieser Propositionen kann man leicht zeigen, dass die folgenden Kategorien wohldefiniert sind:

Definition 1.51 (Homotopiekategorien von topologischen Räumen/Raumpaaren)**.**

– Die *Homotopiekategorie topologischer Räume* ist die Kategorie Top_h, deren Objekte topologische Räume sind, und deren Morphismen Homotopieklassen stetiger Abbildungen sind: Sind X und Y topologische Räume, so definieren wir

$$[X,Y] := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_\mathsf{h}}(X,Y) := \mathrm{map}(X,Y)/\simeq .$$

Die Verknüpfung von Homotopieklassen von Abbildungen ist dabei durch die repräsentantenweise Verknüpfung von Abbildungen definiert, d.h.: Sind X, Y, Z topologische Räume, so ist

$$\begin{aligned} \circ\colon [Y,Z]\times[X,Y] &\longrightarrow [X,Z] \\ \big([g],[f]\big) &\longmapsto [g\circ f]; \end{aligned}$$

mit „$[\,\cdot\,]$“ bezeichnen wir dabei die zugehörigen Homotopieklassen.

– Die *Homotopiekategorie von Raumpaaren* ist die Kategorie $\mathsf{Top}_\mathsf{h}^2$, deren Objekte Raumpaare sind, und deren Morphismen Äquivalenzklassen punktierter stetiger Abbildungen bzgl. Homotopie von Abbildungen zwischen Raumpaaren sind: Sind (X,A) und (Y,B) Raumpaare, so definieren wir

$$\big[(X,A),(Y,B)\big] := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_\mathsf{h}^2}\big((X,A),(Y,B)\big) := \mathrm{map}\big((X,A),(Y,B)\big)/\simeq_{A,B} .$$

Die Verknüpfung von punktierten Homotopieklassen von punktierten Abbildungen ist dabei durch die repräsentantenweise Verknüpfung von Abbildungen definiert, d.h.: Sind (X,A), (Y,B), (Z,C) Raumpaare, so ist

$$\begin{aligned} \circ\colon \big[(Y,B),(Z,C)\big]\times\big[(X,A),(Y,B)\big] &\longrightarrow \big[(X,A),(Z,C)\big] \\ \big([g]_{A,B},[f]_{A,B}\big) &\longmapsto [g\circ f]_{A,B}; \end{aligned}$$

mit „$[\,\cdot\,]_{A,B}$“ bezeichnen wir dabei die zugehörigen Homotopieklassen von stetigen Abbildungen zwischen Raumpaaren.

Bemerkung 1.52. Wir erhalten somit eine kategorientheoretische Formulierung des Begriffes der Homotopieäquivalenz: Topologische Räume sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie in Top_h isomorph sind. Raumpaare sind genau dann homotopieäquivalent, wenn sie in $\mathsf{Top}_\mathsf{h}^2$ isomorph sind.

Im allgemeinen ist es nicht leicht zu entscheiden, ob zwei gegebene topologische Räume homöomorph bzw. homotopieäquivalent sind oder nicht – da es im allgemeinen sehr viele stetige Abbildungen gibt. In der algebraischen Topologie studiert man daher algebraische Invarianten, um Probleme dieser Art (partiell) zu lösen.

1.4. Homotopieinvarianz – Was ist algebraische Topologie?

Eines der Hauptziele der algebraischen Topologie ist es, topologische Räume soweit wie möglich bis auf Homotopieäquivalenz zu klassifizieren (also die Homotopiekatego-

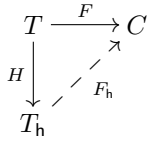
rien $\mathsf{Top}_\mathsf{h}, \mathsf{Top}_{*_\mathsf{h}}, \ldots$ besser zu verstehen). Dazu versucht man, Funktoren

$$\begin{aligned} \mathsf{Top}_\mathsf{h} &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ \mathsf{Top}_\mathsf{h}^2 &\longrightarrow \mathsf{Ab} \\ &\vdots \end{aligned}$$

zu konstruieren und zu studieren. Die Kunst dabei ist, dass solche Funktoren genug interessante Information über topologische Räume enthalten sollen, dabei aber trotzdem noch hinreichend gut berechenbar sein sollten.

Definition 1.53 (homotopieinvarianter Funktor)**.** Sei T eine der Kategorien Top, Top^2, ...[4] und sei C eine Kategorie. Ein Funktor $F\colon T \longrightarrow C$ ist *homotopieinvariant*, falls folgendes gilt: Für alle $X, Y \in \mathrm{Ob}(T)$ und alle $f, g \in \mathrm{Mor}_T(X, Y)$ mit $f \simeq_T g$ ist $F(f) = F(g)$.

Bemerkung 1.54. Sei T eine der Kategorien Top, Top^2, ..., sei C eine Kategorie und sei $F\colon T \longrightarrow C$ ein Funktor. Dann ist F genau dann im obigen Sinne homotopieinvariant, wenn F über den Homotopieklassenfunktor $H\colon T \longrightarrow T_\mathsf{h}$ faktorisiert (der auf Objekten die Identität ist und Morphismen auf die entsprechenden Homotopieklassen abbildet), d.h. wenn es einen Funktor $F_\mathsf{h}\colon T_\mathsf{h} \longrightarrow C$ mit $F_\mathsf{h} \circ H = F$ gibt:



Homotopieinvariante Funktoren liefern insbesondere notwendige Kriterien für Homotopieäquivalenz von Räumen:

Proposition 1.55 (homotopieinvariante Funktoren liefern Homotopieinvarianten)**.** *Sei T eine der Kategorien $\mathsf{Top}, \mathsf{Top}^2, \ldots$, sei C eine Kategorie, sei $F\colon T \longrightarrow C$ ein homotopieinvarianter Funktor und seien $X, Y \in \mathrm{Ob}(T)$.*

1. *Gilt $X \simeq_T Y$, so folgt $F(X) \cong_C F(Y)$.*
2. *Bzw.: Gilt $F(X) \ncong_C F(Y)$, so folgt $X \not\simeq_T Y$.*

Beweisskizze. Dies ist eine Konsequenz der obigen Beschreibung homotopieinvarianter Funktoren (Bemerkung 1.54), der Tatsache, dass Funktoren Isomorphie erhalten (Proposition 1.35), und der Reformulierung von Homotopieäquivalenzen mithilfe von Homotopiekategorien (Bemerkung 1.52). □

Im Verlauf der Vorlesung werden wir den folgenden (nicht-trivialen) Satz beweisen:

Satz 1.56 (Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren)**.** *Es gibt eine Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ homotopieinvarianter Funktoren $\mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ mit folgenden Eigenschaften:*

[4] Wir werden im folgenden noch weitere Kategorien mit einem zugehörigen Homotopiebegriff (und einer zugehörigen Homotopiekategorie) kennenlernen.

a. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$F_m(S^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq m \\ \mathbb{Z} & \text{falls } n = m. \end{cases}$$

b. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$F_n(r_j^{(n)}) \neq \mathrm{id}_{F_n(S^n)},$$

wobei

$$\begin{aligned} r_j^{(n)} \colon S^n &\longrightarrow S^n \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1, \ldots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

Wir geben nun ein paar erste Anwendungen dieses Satzes. Sobald wir Beispiele solcher Funktoren konkreter beschreiben können und besser verstehen, werden sich noch viele weitere Anwendungen ergeben.

Korollar 1.57 (Invarianz der Dimension, I)**.**
0. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist S^n nicht *kontraktibel.*
1. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $S^n \simeq S^m$, wenn $n = m$ ist.
2. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt genau dann $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, wenn $n = m$ ist.

Beweisskizze (unter der Annahme, dass Satz 1.56 gilt). 0. Sei $n \in \mathbb{N}$, ohne Einschränkung $n \neq 0$. Wäre S^n kontraktibel, so wären alle stetigen Abbildungen $S^n \longrightarrow S^n$ nullhomotop und somit homotop zueinander (da S^n wegzusammenhängend ist). Dies steht jedoch im Widerspruch zu $F_n(r_1^{(n)}) \neq \mathrm{id}_{F_n(S^n)} = F_n(\mathrm{id}_{S^n})$.

1. Dies folgt aus Satz 1.56 a.

2. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m$, ohne Einschränkung $n \neq 0 \neq m$. Ist $f \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ein Homöomorphismus, so ist $f|_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \colon \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\}$ ein Homöomorphismus; also folgt

$$S^{n-1} \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \cong \mathbb{R}^m \setminus \{f(0)\} \simeq S^{m-1},$$

und damit nach dem vorherigen Teil $n = m$. □

Unter der Annahme, dass Satz 1.56 gilt, können wir zum Beispiel außerdem den Satz vom Igel beweisen: Als ersten Schritt betrachten wir dazu die folgende Variante des Prinzips der Abbildungsgrade:

Proposition 1.58 (Abbildungsgrade für Selbstabbildungen)**.** *Sei C eine Kategorie, sei $F \colon C \longrightarrow \mathsf{Ab}$ ein Funktor und sei $X \in \mathrm{Ob}(C)$ mit $F(X) \cong \mathbb{Z}$. Die* Gradabbildung auf X bezüglich F *ist dann definiert als*

$$\begin{aligned} \deg_F \colon \mathrm{Mor}_C(X, X) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ f &\longmapsto d \in \mathbb{Z} \text{ mit } F(f) = d \cdot \mathrm{id}_{F(X)}. \end{aligned}$$

Dann gilt:

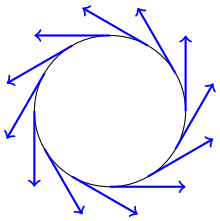


Abbildung (1.60): Stetige Kämmung eines eindimensionalen Igels

0. *Die Abbildung* $\deg_F\colon \operatorname{Mor}_C(X,X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ *ist wohldefiniert.*
1. *Für alle* $f, g \in \operatorname{Mor}_C(X,X)$ *ist*

$$\deg_F(g \circ f) = \deg_F(g) \cdot \deg_F(f).$$

2. *Es ist* $\deg_F(\mathrm{id}_X) = 1$ *und für alle* C*-Isomorphismen* $f \in \operatorname{Mor}_C(X,X)$ *gilt*

$$\deg_F(f) \in \{-1, 1\}.$$

Beweisskizze. Dies folgt daraus, dass Endomorphismen von unendlich zyklischen Gruppen eindeutig bestimmte ganzzahlige Vielfache der Identität sind, und den Funktoreigenschaften. □

Satz 1.59 (Satz vom Igel)**.** *Sei* $n \in \mathbb{N}$*. Dann existiert genau dann ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf* S^n*, wenn* n *ungerade ist.*

Insbesondere kann ein Igel (aufgefasst als S^2) nicht stetig gekämmt werden.
Zur Erinnerung:

- Ein *Vektorfeld* auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist eine stetige Abbildung $v\colon M \longrightarrow TM$ mit $p \circ v = \mathrm{id}_M$, wobei $p\colon TM \longrightarrow M$ die Bündelprojektion des Tangentialbündels von M ist. Ein solches Vektorfeld $v\colon M \longrightarrow TM$ ist *nirgends verschwindend*, falls $v(x) \neq 0 \in T_xM$ für alle $x \in M$ gilt.
- Ist $n \in \mathbb{N}$, so entsprechen [nirgends verschwindende] Vektorfelder auf S^n stetigen Abbildungen $v\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit

$$\forall_{x \in S^n} \quad \langle v(x), x \rangle = 0 \quad [\text{und } v(x) \neq 0].$$

Beweisskizze (unter der Annahme, dass Satz 1.56 gilt). Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, etwa $n = 2 \cdot k + 1$ mit $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$\begin{aligned} S^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ x &\longmapsto (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2\cdot k+2}, -x_{2\cdot k+1}) \end{aligned}$$

ein nirgends verschwindendes Vektorfeld auf S^n (Abbildung (1.60)).

Ist umgekehrt $n \in \mathbb{N}$ und $v\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ein nirgends verschwindendes Vektorfeld, so ist

$$\begin{aligned} S^n \times [0,1] &\longrightarrow S^n \\ (x,t) &\longmapsto \cos(\pi \cdot t) \cdot x + \sin(\pi \cdot t) \cdot \frac{1}{\|v(x)\|_2} \cdot v(x) \end{aligned}$$

wohldefiniert und stetig und zeigt $\mathrm{id}_{S^n} \simeq -\mathrm{id}_{S^n}$. Mithilfe des Abbildungsgrades auf S^n bezüglich F_n folgt aus Satz 1.56 und Proposition 1.58, dass

$$1 = \deg_{F_n}(\mathrm{id}_{S^n}) = \deg_{F_n}(-\mathrm{id}_{S^n}) = \deg_{F_n}(r_{n+1}^{(n)}) \cdot \dots \cdot \deg_{F_n}(r_1^{(n)}) = (-1)^{n+1},$$

und damit, dass n ungerade ist. □

Weitere Anwendungen und Schlüsse dieser Art werden wir systematischer im Zusammenhang mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen im folgenden Kapitel kennenlernen.

2. Axiomatische Homologie

Wir werden nun die Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologietheorien kennenlernen und uns überlegen, was man aus diesen Axiomen ableiten kann bzw. wie man mit solchen Homologietheorien arbeiten kann.

In Kapitel 3 und Kapitel 4 werden wir Homologietheorien dieser Art für topologische Räume bzw. sogenannte CW-Komplexe konstruieren.

2.1. Die Eilenberg-Steenrod-Axiome

Wir beginnen mit der Formulierung der Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologietheorien:

Definition 2.1 (Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologie)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Eine *Homologietheorie auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_R\mathsf{Mod}$ ist ein Paar $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$, wobei

- $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Funktoren $\mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$
- und $(\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge natürlicher Transformationen $\partial_k \colon h_k \Longrightarrow h_{k-1} \circ U$, genannt *Verbindungshomomorphismen* (oder *Randoperatoren*), wobei $U \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der Objekte (X, A) auf $(A, \emptyset)$ und stetige Abbildungen von Paaren auf die entsprechende Einschränkungen abbildet,

mit folgenden Eigenschaften ist:

- *Homotopieinvarianz.* Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $h_k \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein homotopieinvarianter Funktor im Sinne von Definition 1.53.
- *lange exakte Paarsequenz.* Für alle Raumpaare (X, A) ist die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} h_k(A, \emptyset) \xrightarrow{h_k(i)} h_k(X, \emptyset) \xrightarrow{h_k(j)} h_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k} h_{k-1}(A, \emptyset) \xrightarrow{h_{k-1}(i)} \cdots$$

  exakt (Definition B.2), wobei $i \colon (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ und $j \colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind.
- *Ausschneidung.* Für alle Raumpaare (X, A) und alle $B \subset A$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ ist die von der Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung

$$h_k(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow h_k(X, A)$$

  für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus (Abbildung (2.2)).

Man nennt $\big(h_k(\{\emptyset\}, \emptyset)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ die *Koeffizienten* der Theorie.

Eine solche Homologietheorie $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ heißt *gewöhnlich*, wenn das Dimensionsaxiom erfüllt ist:

- *Dimensionsaxiom.* Für alle Einpunkträume P und alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$h_k(P, \emptyset) \cong 0.$$

Eine Homologietheorie $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ heißt *additiv*, wenn das Additivitätsaxiom erfüllt ist:

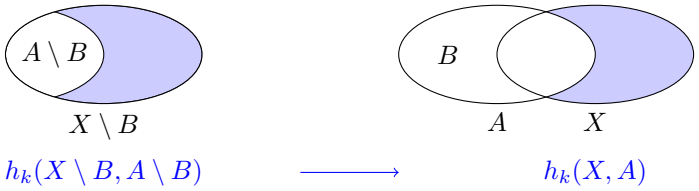


Abbildung (2.2): Ausschneidung, schematisch

– *Additivität.* Für alle Mengen I und alle Familien $(X_i)_{i\in I}$ topologischer Räume induzieren die kanonischen Inklusionen $(X_i \longrightarrow \bigsqcup_{j\in I} X_j)_{i\in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} h_k(X_i, \emptyset) \longrightarrow h_k\Big(\bigsqcup_{i\in I} X_i, \emptyset\Big).$$

Bemerkung 2.3.

– Die lange exakte Paarsequenz beschreibt den Zusammenhang zwischen Homologie eines Raumes, des Unterraumes, und des zugehörigen Paares.
– Das Ausschneidungsaxiom erlaubt es, Homologie von Räumen bzw. Raumpaaren durch Zerlegen in kleinere Teile zu berechnen. Im Gegensatz zum Ausschneidungssatz von Blakers-Massey für Homotopiegruppen (Algebraische Topologie I) gilt Ausschneidung für Homologie nicht nur in bestimmten Gradbereichen, sondern allgemein. Dies ist der Hauptgrund, warum Homologie deutlich einfacher zu berechnen ist als Homotopiegruppen.
– Ist X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{Z}$, so schreiben wir im obigen Kontext auch kurz

$$h_k(X) := h_k(X, \emptyset).$$

– Die obigen Axiome lassen sich analog nicht nur in Top^2, sondern auch in anderen Kategorien aus der Topologie formulieren.
– In Satz 4.41 werden wir sehen, in welchem Sinne Homologietheorien durch die Eilenberg-Steenrod-Axiome bereits eindeutig bestimmt sind.

2.2. Fingerübungen

Bevor wir mit Verkleberesultaten und topologischen Anwendungen von Homologie beginnen, üben wir das Arbeiten mit den Eilenberg-Steenrod-Axiomen mit einfachen Fingerübungen. Häufig werden dabei grundlegende Techniken für exakte Sequenzen (Kapitel B.1) benötigt.

Setup 2.4. In diesem Abschnitt sei R ein Ring mit Eins und $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ sei eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Proposition 2.5 (mehr zu Homotopieinvarianz)**.**

1. *Ist (X, A) ein Raumpaar und ist die Inklusion $i\colon A \longrightarrow X$ eine Homotopieäquivalenz, so ist*
$$h_k(X, A) \cong 0$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere ist $h_k(X, X) \cong 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$.
2. *Ist $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Raumpaaren und sind sowohl $f\colon X \longrightarrow Y$ als auch $f|_A\colon A \longrightarrow B$ Homotopieäquivalenzen in Top, so ist*
$$h_k(f)\colon h_k(X, A) \longrightarrow h_k(Y, B)$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus der langen exakten Paarsequenz. Der zweite Teil folgt aus der langen exakten Paarsequenz und dem Fünferlemme (Proposition B.6). □

Als nächstes zeigen wir, wie man die Koeffizienten der Theorie (d.h. die Homologie von Einpunkträumen) aus der Homologie jedes (nicht-leeren) Raumes abspalten kann:

Proposition 2.6 (Abspalten der Homologie des Punktes)**.**

1. *Sei X ein topologischer Raum und sei $x_0 \in X$. Dann induzieren die Inklusion $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, \{x_0\})$ und die konstante Abbildung $X \longrightarrow \{x_0\}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus*
$$h_k(X) \cong h_k\big(\{x_0\}\big) \oplus h_k\big(X, \{x_0\}\big).$$
2. *Diese Isomorphismen sind im folgenden Sinne natürlich: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und ist $x_0 \in X$, so ist für alle $k \in \mathbb{Z}$ das Diagramm*
$$\begin{array}{ccc} h_k(X) & \xrightarrow{\cong} & h_k\big(\{x_0\}\big) \oplus h_k\big(X, \{x_0\}\big) \\ {\scriptstyle h_k(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_k(f|_{\{x_0\}}) \oplus h_k(f)} \\ h_k(Y) & \xrightarrow[\cong]{} & h_k\big(\{f(x_0)\}\big) \oplus h_k\big(Y, \{f(x_0)\}\big) \end{array}$$
kommutativ, wobei die horizontalen Isomorphismen, die Isomorphismen aus dem ersten Teil sind.[5]

Beweisskizze. Die Natürlichkeit im zweiten Teil folgt direkt daraus, dass die Inklusion der entsprechenden Basispunkte und die konstanten Abbildungen auf die entsprechenden Einpunkträume mit f verträglich sind – und dass diese Eigenschaft nach Anwendung der Funktoren $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ erhalten bleibt.

[5] Dies entspricht der Aussage, dass die Isomorphismen aus dem ersten Teil eine natürliche Transformation
$$h_k \circ F \Longrightarrow h_k \circ U \oplus h_k\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$
bilden, wobei Top_* die Kategorie der punktierten Räume (also Raumpaare, deren Unterraum einpunktig ist) und $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der den einpunktigen Unterraum durch den leeren Unterraum ersetzt und U der Unterraumfunktor (Definition 2.1) ist. In der algebraischen Topologie wird jedoch oft diese genauere Formulierung nicht explizit genannt.

Für den Beweis des ersten Teils betrachten wir die lange exakte Paarsequenz des Paares $(X, \{x_0\})$. Wegen $\big(X \longrightarrow \{x_0\}\big) \circ \big(\{x_0\} \hookrightarrow X\big) = \mathrm{id}_{\{x_0\}}$ folgt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$h_k\big(X \longrightarrow \{x_0\}\big) \circ h_k\big(\{x_0\} \hookrightarrow X\big) = \mathrm{id}_{h_k(\{x_0\})}.$$

Dies zeigt, dass wir aus der langen exakten Paarsequenz kurze spaltende exakte Sequenzen

$$0 \longrightarrow h_k\big(\{x_0\}\big) \xrightarrow{h_k(\{x_0\} \hookrightarrow X)} h_k(X) \xrightarrow{h_k((X,\emptyset) \hookrightarrow (X,\{x_0\}))} h_k\big(X, \{x_0\}\big) \longrightarrow 0$$

$$h_k(X \to \{x_0\})$$

erhalten. Daraus folgt mit Proposition B.5 die Behauptung. □

Die Abspaltung der Koeffizienten lässt sich auch durch die sogenannte reduzierte Homologie ausdrücken:

Bemerkung 2.7 (reduzierte Homologie)**.** Sei $\bullet := \{\emptyset\}$ „der“ Einpunktraum. Ist X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{Z}$, so definieren wir die *k-te reduzierte Homologie von X bezüglich* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ durch

$$\widetilde{h}_k(X) := \ker\big(h_k(c_X)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(\bullet)\big) \subset h_k(X),$$

wobei $c_X\colon X \longrightarrow \bullet$ die eindeutig bestimmte Abbildung ist. Dann ist für alle $x_0 \in X$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ die von den Inklusionen induzierte Komposition

$$\widetilde{h}_k(X) \longrightarrow h_k(X) \longrightarrow h_k\big(X, \{x_0\}\big)$$

ein Isomorphismus. Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so ist

$$\widetilde{h}_k(f) := h_k(f)|_{\widetilde{h}_k(X)}\colon \widetilde{h}_k(X) \longrightarrow \widetilde{h}_k(Y)$$

wohldefiniert und man erhält einen homotopieinvarianten Funktor $\widetilde{h}_k\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ mit $\widetilde{h}_k(\bullet) \cong 0$.

Im Zusammenhang mit Ausschneidungsargumenten betrachtet man oft Raumtripel, d.h. Raumpaare mit einem zusätzlichen Unterraum des Unterraums. Dabei ist häufig die folgende lange exakte Sequenz hilfreich:[6]

Proposition 2.8 (lange exakte Tripelsequenz)**.** *Sei X ein topologischer Raum und seien $B \subset A \subset X$ Unterräume. Dann ist die Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}^{(X,A,B)}} h_k(A, B) \longrightarrow h_k(X, B) \longrightarrow h_k(X, A) \xrightarrow{\partial_k^{(X,A,B)}} h_{k-1}(A, B) \longrightarrow \cdots$$

[6] Für längere absteigende Ketten von Unterräumen sind exakte Sequenzen als Hilfsmittel der homologischen Algebra im allgemeinen nicht mehr mächtig genug; das geeignete Werkzeug sind dann sogenannte Spektralsequenzen.

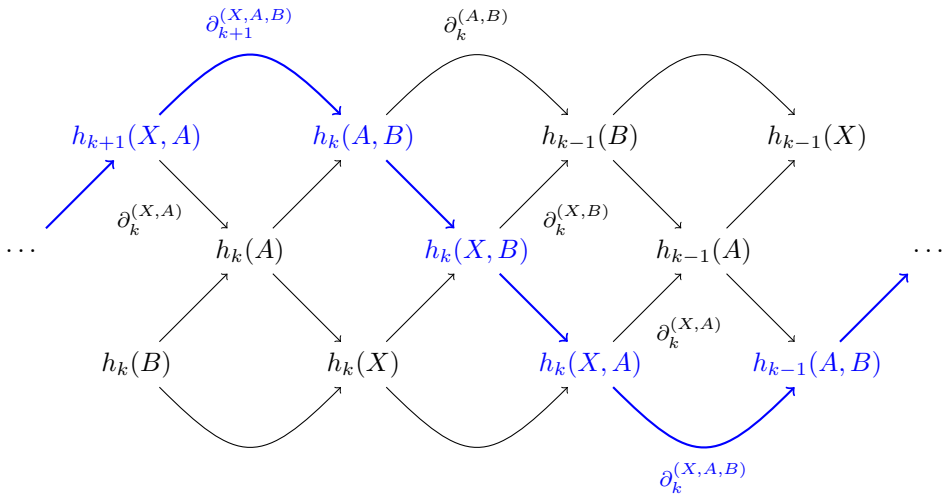


Abbildung (2.9): Das Zopfdiagramm der langen exakten Tripelsequenz; die unmarkierten Homomorphismen sind jeweils durch die entsprechenden Inklusionen induziert.

exakt, wobei wir für $k \in \mathbb{Z}$ den Verbindungshomomorphismus $\partial_k^{(X,A,B)}$ der Tripelsequenz als die Komposition

$$\begin{array}{ccc} h_k(X,A) & \xrightarrow{\partial_k^{(X,A,B)}} & h_k(A,B) \\ & \searrow^{\partial_k^{(X,A)}} \quad \nearrow & \\ & h_k(A) & \end{array}$$

definieren und die unmakrierten Homomorphismen jeweils durch die entsprechenden Inklusionen topologischer Räume/Raumpaare induziert sind.

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir betrachten das Zopfdiagramm in Abbildung (2.9), das aus der gewünschten Tripelsequenz und den langen exakte Paarsequenzen der Paare (A,B), (X,B) und (X,A) geflochten ist. Nach Definition des Verbindungshomomorphismus der Tripelsequenz, wegen der Funktorialität der $(h_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ und der Natürlichkeit der Verbindungshomomorphismen der Homologietheorie ist dieses Zopfdiagramm kommutativ.

Die Komposition

$$h_k(A,B) \longrightarrow h_k(X,B) \longrightarrow h_k(X,A)$$

der durch die Inklusionen induzierten Homomorphismen ist der Nullhomomorphismus, denn diese Komposition faktorisiert über $h_k(A,A) \cong 0$. Auch die anderen jeweils

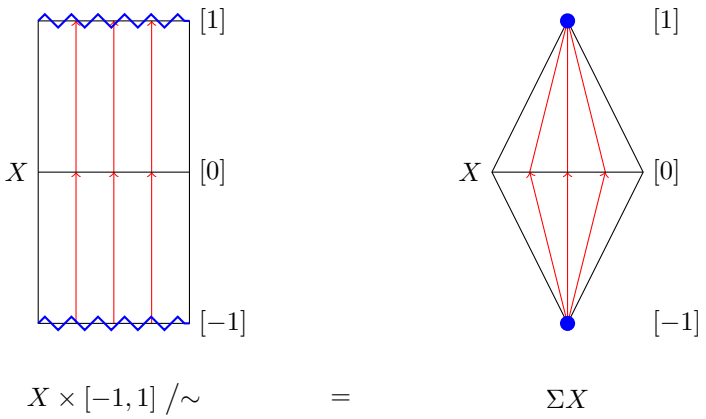


Abbildung (2.10): Einhängung, schematisch; die obere und die untere Zickzacklinie werden jeweils zu einem Punkt identifiziert.

aufeinanderfolgenden Homomorphismen der Tripelsequenz liefern als Komposition den Nullhomomorphismus (wir finden im Zopfdiagramm immer eine alternative Route, die zwei aufeinanderfolgende Homomorphismen aus einer langen exakten Paarsequenz enthält).

Mit einer Diagrammjagd kann man nun die Exaktheit der Tripelsequenz aus der Exaktheit der drei langen exakten Paarsequenzen folgern. □

2.3. Homologie von Sphären und Einhängungen

Wir berechnen nun die Homologie von Sphären und geben erste Anwendungen davon. Um die Homologie von Sphären zu berechnen gehen wir induktiv mithilfe der sogenannten Einhängung vor.

Definition 2.11 (Einhängung)**.**

– Die *Einhängung* eines topologischen Raumes X ist definiert als

$$\Sigma X := X \times [-1,1] \,/\!\sim$$

mit der Quotiententopologie der Produkttopologie, wobei „$\sim$“ von

$$\begin{aligned} \forall_{x,x' \in X} \quad & (x,1) \sim (x',1) \\ \forall_{x,x' \in X} \quad & (x,-1) \sim (x',-1) \end{aligned}$$

erzeugt wird (Abbildung (2.10)).

– Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Sigma f\colon \Sigma X &\longrightarrow \Sigma Y \\ [x,t] &\longmapsto \big[f(x),t\big] \end{aligned}$$

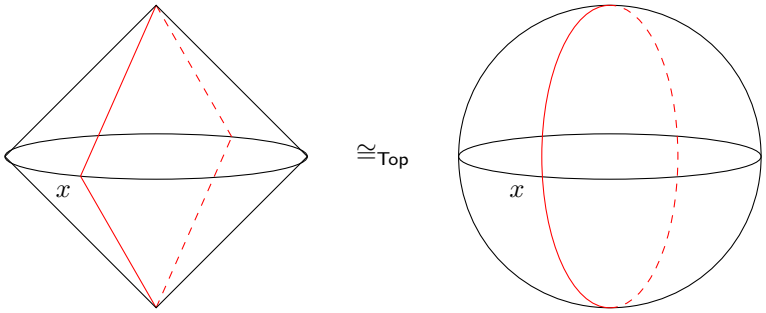


Abbildung (2.12): Einhängungen von Sphären sind Sphären

wohldefiniert und stetig.
Auf diese Weise erhält man den *Einhängungsfunktor* $\Sigma\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Top}$.

Beispiel 2.13 (Einhängungen von Sphären sind Sphären)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} \Sigma S^n &\longrightarrow S^{n+1} \\ [x,t] &\longmapsto \big(\cos(\pi/2 \cdot t) \cdot x, \sin(\pi/2 \cdot t)\big) \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Homöomorphismus (Abbildung (2.12)).

Satz 2.14 (Homologie von Einhängungen)**.** *Sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine Homologietheorie auf* Top^2*. Sei* X *ein topologischer Raum und sei* $x_0 \in X$*. Dann gibt es für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *einen natürlichen Isomorphismus (den sogenannten* Einhängungsisomorphismus*)*

$$\sigma_k(X)\colon h_k\big(X, \{x_0\}\big) \longrightarrow h_{k+1}\big(\Sigma X, \{[(x_0, 0)]\}\big).$$

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann erhalten wir die Kette von (natürlichen) Isomorphismen in Abbildung (2.15).

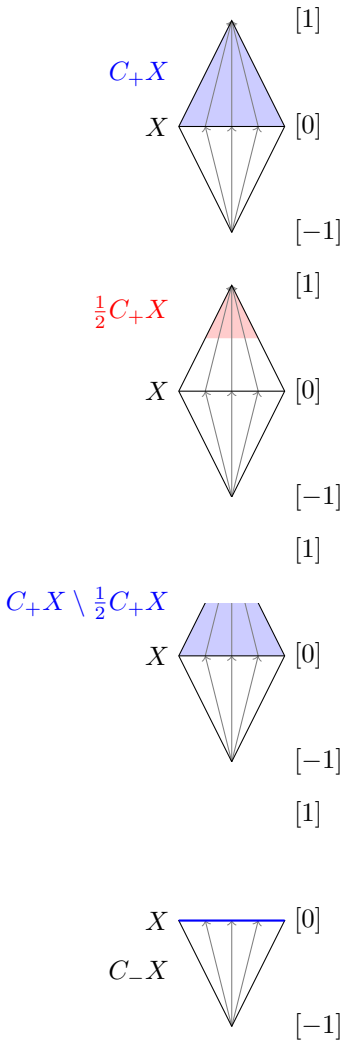
Der unterste vertikale Homomorphismus ist dabei der Verbindungshomomorphismus der langen exakten Tripelsequenz (Proposition 2.8) des Tripels

$$\{x_0\} \subset X \subset C_- X.$$

Dieser Verbindungshomomorphismus ist ein Isomorphismus, denn: Da $C_- X$ kontraktibel ist, folgt mit Proposition 2.5, dass $h_m(C_- X, \{x_0\}) \cong 0$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ gilt. □

Bemerkung 2.16 (Wie wendet man Ausschneidung an?)**.** Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 und sei X ein topologischer Raum. Wie im obigen Beweis kann man die Homologie $(h_k(X))_{k\in\mathbb{Z}}$ dann oft mithilfe von Ausschneidung wie folgt berechnen: Man sucht Unterräume $B \subset A \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ mit der Eigenschaft,

– dass man $(h_k(A))_{k\in\mathbb{Z}}$ gut beschreiben kann



$$
\begin{array}{l}
h_{k+1}\big(\Sigma X, \{[x_0, 0]\}\big) \\
\quad \cong \Big| \text{ verallgemeinerte Homotopieinvarianz (Proposition 2.5)} \\
h_{k+1}(\Sigma X, C_+X) \\
\quad \cong \Big| \text{ Ausschneidung} \\
h_{k+1}\big(\Sigma X \setminus \tfrac{1}{2}C_+X, C_+X \setminus \tfrac{1}{2}C_+X\big) \\
\quad \cong \Big| \text{ Homotopieinvarianz} \\
h_{k+1}\big(C_-X, X \times \{0\}\big) \\
\quad \cong \Big| \text{ Verbindungshomomorphismus der Tripelsequenz, s.u.} \\
h_k\big(X, \{x_0\}\big)
\end{array}
$$

Abbildung (2.15): Berechnung der Homologie von Einhängungen

– und dass man $(h_k(X \setminus B, A \setminus B))_{k\in\mathbb{Z}}$ gut beschreiben kann (z.B. mithilfe der Tripelsequenz 2.8 oder der Paarsequenz),

und kombiniert dann Ausschneidung mit der langen exakten Paarsequenz des Paares (X, A). In Abschnitt 2.4 werden wir eine Reformulierung von Ausschneidung kennenlernen, die es oft erleichtert, Homologie nach dem Baukastenprinzip zu berechnen.

Caveat 2.17 (falsche Anwendung von Ausschneidung)**.** Bei der Anwendung von Ausschneidung ist darauf zu achten, dass der Abschluss des auszuschneidenden Raumes im Inneren des Teilraumes enthalten ist!

Aus Satz 2.14 und Beispiel 2.13 erhalten wir:

Korollar 2.18 (Homologie von Sphären)**.** *Sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine Homologietheorie auf* Top^2*. Dann gilt:*

1. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $k \in \mathbb{Z}$ *gibt es einen natürlichen Isomorphismus*

$$h_k\big(S^n, \{e_1^{n+1}\}\big) \cong h_{k+1}\big(\Sigma S^n, \{[e_1^{n+1}, 0]\}\big) \cong h_{k+1}\big(S^{n+1}, \{e_1^{n+2}\}\big),$$

   wobei e_1^{n+1} *bzw.* e_1^{n+2} *jeweils den ersten Einheitsvektor* $(1, 0, \dots, 0)$ *bezeichnet.*
2. *Insbesondere folgt mit Proposition 2.6 und Ausschneidung induktiv für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und alle* $k \in \mathbb{Z}$*, dass*

$$\begin{aligned} h_k(S^n) &\cong h_k\big(S^n, \{e_1^{n+1}\}\big) \oplus h_k\big(\{e_1^{n+1}\}\big) \\ &\cong h_{k-n}\big(S^0, \{e_1^1\}\big) \oplus h_k\big(\{e_1^{n+1}\}\big) \\ &\cong h_{k-n}(\bullet) \oplus h_k(\bullet). \end{aligned}$$

3. *Ist* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie, so folgt: Für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$h_k(S^0) \cong \begin{cases} h_0(\bullet) \oplus h_0(\bullet) & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \neq 0. \end{cases}$$

   Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $k \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$h_k(S^n) \cong \begin{cases} h_0(\bullet) & \text{falls } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\}. \end{cases}$$

Gewöhnliche Homologie mit nicht-trivialen Koeffizienten entdeckt also das n-dimensionale sphärische „Loch“ in der n-dimensionalen Sphäre. Im Gegensatz zu Homotopiegruppen (Algebraische Topologie I) entdeckt gewöhnliche Homologie aber nicht nur sphärische Löcher, sndern auch andere (wie man z.B. an der Homologie des Torus $S^1 \times S^1$ sehen kann).

Eine erste Anwendung der Berechnung in Korollar 2.18 ist eine verfeinerte Version der Invarianz der Dimension (unter der Annahme, dass gewöhnliche Homologietheorien tatsächlich existieren):

Korollar 2.19 (Invarianz der Dimension, II)**.** *Falls eine gewöhnliche Homologietheorie* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} = \mathsf{Ab}$ *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$ *existiert, so folgt:*

Sind $n, m \in \mathbb{N}$ *und sind* $U \subset \mathbb{R}^n$*,* $V \subset \mathbb{R}^m$ *offen und nicht-leer mit* $U \cong V$*, so gilt bereits* $n = m$*.*

Beweisskizze. Ohne Einschränkung seien $n, m > 0$. Sei $x \in U$ und sei $f\colon U \longrightarrow V$ ein Homöomorphismus. Mithilfe von Ausschneidung kann man dann die Homologie des Paares $(U, U \setminus \{x\})$ auf die von $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ zurückführen (Ausschneidung des Teils von U, der außerhalb eines kleinen offenen Balles um x liegt) und erhält so wegen $(U, U \setminus \{x\}) \cong_{\mathsf{Top}^2} (V, V \setminus \{f(x)\})$ und der langen exakten Paarsequenz:

$$\begin{aligned} h_{n-1}(S^{m-1}) &\cong h_n\big(V, V \setminus \{f(x)\}\big) \\ &\cong h_n\big(U, U \setminus \{x\}\big) \\ &\cong h_{n-1}(S^{n-1}). \end{aligned}$$

Aus Korollar 2.18 folgt daher $n = m$. □

Als nächsten Schritt bestimmen wir nun Abbildungsgrade für Selbstabbildungen von Sphären (positiver Dimension) bezüglich gewöhnlicher Homologietheorien; dies ist ein wichtiges Hilfsmittel, um Homologie von Räumen, die induktiv aus Sphären „zusammengesetzt“ sind, zu berechnen:

Korollar 2.20 (Abbildungsgrade für Selbstabbildungen von Sphären)**.** *Es sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie. Dann gilt:*

1. *Ist* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und* $j \in \{1, \dots, n+1\}$*, so ist*

$$h_n(r_j^{(n)}) = -\operatorname{id}_{h_n(S^n)},$$

   wobei $r_j^{(n)}$ *die in Satz 1.56 definierte Spiegelung ist.*
2. *Für* $d \in \mathbb{Z}$ *sei*

$$\begin{aligned} f_d\colon S^1 &\longrightarrow S^1 \\ z &\longmapsto z^d, \end{aligned}$$

   wobei wir S^1 *als Teilmenge von* $\mathbb{C}$ *auffassen. Dann gilt*

$$h_1(f_d) = d \cdot \operatorname{id}_{h_1(S^1)}.$$

3. *Für alle* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $d \in \mathbb{Z}$ *gilt*

$$h_n(\Sigma^{n-1} f_d) = d \cdot \operatorname{id}_{h_n(S^n)}.$$

Insbesondere folgt: Ist $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$*, so gilt (wobei der Abbildungsgrad wie in Proposition 1.58 definiert ist):*

– *Für alle* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $j \in \{1, \dots, n\}$ *ist*

$$\deg_{h_n} r_j^{(n)} = -1.$$

– *Für alle* $n \in \mathbb{N}_{>0}$ *und alle* $d \in \mathbb{Z}$ *ist*

$$\deg_{h_n} \Sigma^{n-1} f_d = d.$$

Insbesondere ist $\deg_{h_n} \colon [S^n, S^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ *surjektiv.*[7]

Der Beweis beruht auf der folgenden Beobachtung:

Lemma 2.21 (Homologie von „Addition“ von Abbildungen auf Sphären)**.** *Es sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie auf* Top^2 *und sei* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*. Zu* $d \in \mathbb{N}$ *betrachten wir die* Einpunktvereinigung *(auch* Wedge*)*

$$\bigvee^d S^n := \bigsqcup^d S^n \Big/ \sim,$$

wobei „$\sim$*“ die ersten Einheitsvektoren der* d *Sphären miteinander verklebt; außerdem betrachten wir die Inklusionsabbildungen* $(i_j \colon S^n \longrightarrow \bigvee^d S^n)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ *der Summanden und die Kollapsabbildungen* $(p_j \colon \bigvee^d S^n \longrightarrow S^n)_{j\in\{1,\dots,n\}}$*, die jeweils auf einem Sphärensummanden die Identität sind und die anderen Summanden auf* e_1^{n+1} *abbilden. Dann gilt:*

1. *Die Inklusionen* $(i_j)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ *und die Kollapsabbildungen* $(p_j)_{j\in\{1,\dots,d\}}$ *induzieren für alle* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ *Isomorphismen*

$$h_k\Big(\bigvee^d S^n\Big) \cong \bigoplus^d h_k(S^n).$$

2. *Sei*

$$c_{S^n} \colon S^n \longrightarrow \bigvee^2 S^n$$
$$\alpha_x(t) \longmapsto \begin{cases} i_1\big(\alpha_x(2\cdot t)\big) & \text{falls } t \in [0, 1/2] \\ i_2\big(\alpha_x(2\cdot t - 1)\big) & \text{falls } t \in [1/2, 1], \end{cases}$$

wobei $\alpha_x \colon [0,1] \longrightarrow S^n$ *zu* $x \in S^{n-1} \times \{0\} \setminus \{e_1^{n+1}\}$ *der eindeutig bestimmte Kreis (mit konstanter Geschwindigkeit, startend in Richtung* e_{n+1}^{n+1}*) ist, der* x *und* e_1^{n+1} *als diametral gegenüberliegende Punkte enthält und in der Ebene durch* x*,* e_1^{n+1} *und* $e_1^{n+1} + e_{n+1}^{n+1}$ *liegt (Abbildung (2.22)). (Die Abbildung* c_{S^n} *ist wohldefiniert und stetig). Dann gilt für alle topologischen Räume* X *und alle* $f, g \in \operatorname{map}(S^n, X)$ *mit* $f(e_1^{n+1}) = g(e_1^{n+1})$*, dass*

$$h_n\big((f \vee g) \circ c_{S^n}\big) = h_n(f) + h_n(g).$$

Dabei bezeichnet $f \vee g \colon \bigvee^2 S^n \longrightarrow X$ *die eindeutig bestimmte stetige Abbildung mit* $(f \vee g) \circ i_1 = f$ *und* $(f \vee g) \circ i_2 = g$*.*

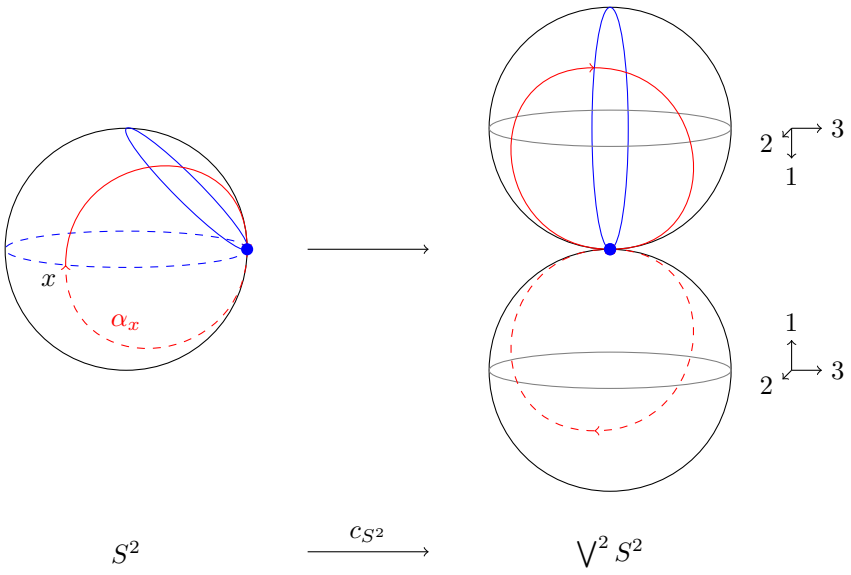


Abbildung (2.22): Die „Einschnürungsabbildung“ $c_{S^n} \colon S^n \longrightarrow \bigvee^2 S^n$.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt induktiv mithilfe von Ausschneidung.

Wegen $p_1 \circ c_{S^n} \simeq \mathrm{id}_{S^n} \simeq p_2 \circ c_{S^n}$ folgt aus dem ersten Teil, dass

$$\begin{aligned} h_n\big((f \vee g) \circ c_{S^n}\big) &= h_n(f \vee g) \circ h_n(i_1) \circ h_n(p_1) \circ h_n(c_{S^n}) \\ &\quad + h_n(f \vee g) \circ h_n(i_2) \circ h_n(p_2) \circ h_n(c_{S^n}) \\ &= h_n\big((f \vee g) \circ i_1\big) \circ h_n(p_1 \circ c_{S^n}) + h_n\big((f \vee g) \circ i_2\big) \circ h_n(p_2 \circ c_{S^n}) \\ &= h_n(f) + h_n(g), \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Bemerkung 2.23 (Hurewicz-Homomorphismus)**.** Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in Ab und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei außerdem $[S^n] \in h_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ ein Erzeuger. Dann erhalten wir für jeden punktierten topologischen Raum (X, x_0) einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow h_n(X) \\ [f]_* &\longmapsto h_n(f)\big([S^n]\big) \end{aligned}$$

von der n-ten Homotopiegruppe (s. Algebraische Topologie I) in die Homologie im Grad n, den sogenannten *Hurewicz-Homomorphismus im Grad n*. Genauer liefert dies

[7] Tatsächlich ist $\deg_{h_n} \colon [S^n, S^n] \longrightarrow \mathbb{Z}$ sogar bijektiv. Dies kann man z.B. mit den Methoden aus der Homotopietheorie (Algebraische Topologie I) zeigen.

eine natürliche Transformation $\pi_n \Longrightarrow h_n \circ F$, wobei $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der den Basispunkt durch den leeren Teilraum ersetzt.

Beweisskizze von Korollar 2.20. 1. Indem wir Spiegelungen mit Homöomorphismen, die je zwei Koordinaten tauschen, konjugieren, sehen wir, dass es genügt, die Behauptung für die Spiegelung $r_2^{(n)}$ zu zeigen.

Induktiv folgt mit dem natürlichen Einhängungsisomorphismus (Satz 2.14 und Beispiel 2.13) und der Tatsache, dass $\Sigma r_2^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ der Spiegelung $r_2^{(n+1)}$ entspricht, dass es genügt

$$h_1(r_2^{(1)}) = -\operatorname{id}_{h_1(S^1)}$$

zu zeigen.

Da $(\operatorname{id}_{S^1} \vee r_2^{(1)}) \circ c_{S^1}$ zu einer konstanten Abbildung homotop ist (wie man leicht an der Konstruktion ablesen kann), erhalten wir aus Lemma 2.21, dass

$$0 = h_1(\text{const}) = h_1\big((\operatorname{id}_{S^1} \vee r_2^{(1)}) \circ c_{S^1}\big) = h_1(\operatorname{id}_{S^1}) + h_1(r_2^{(1)}).$$

2. Wir unterscheiden drei Fälle:
- Die Abbildung f_0 ist konstant; also faktorisiert $h_1(f_0)$ über $h_1(\bullet) \cong 0$, und damit $h_1(f_0) = 0$.
- Ist $d \in \mathbb{Z}_{<0}$, so ist $f_d = r_2^{(1)} \circ f_{|d|}$. Nach dem ersten Teil ist daher $h_1(f_d) = h_1(r_2^{(1)}) \circ h_1(f_{|d|}) = -h_1(f_{|d|})$.
- Es genügt daher, den Fall $d \in \mathbb{N}_{>0}$ zu betrachten: Es ist

  $$f_d = \Big(\bigvee^d \operatorname{id}_{S^1}\Big) \circ c_{S^1}^{(d)},$$

  wobei $c_{S^1}^{(d)}\colon S^1 \longrightarrow \bigvee^d S^1$ die entsprechende Verallgemeinerung der Einschnürungsabbildung aus Lemma 2.21 ist. Die zugehörige Verallgemeinerung von Lemma 2.21 liefert dann

  $$h_1(f_d) = d \cdot h_1(\operatorname{id}_{S^1}) = d \cdot \operatorname{id}_{h_1(S^1)}.$$

Der dritte Teil folgt mithilfe des natürlichen Einhängungsisomorphismus (Satz 2.14 und Beispiel 2.13) induktiv aus dem zweiten Teil. □

Mithilfe des Abbildungsgrades kann man zum Beispiel den Fundamentalsatz der Algebra beweisen:

Korollar 2.24 (Fundamentalsatz der Algebra)**.** *Falls es eine gewöhnliche Homologietheorie auf* Top^2 *mit Werten in* Ab *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$ *gibt, so folgt der* Fundamentalsatz der Algebra*:*

Jedes nicht-konstante Polynom aus $\mathbb{C}[X]$ *besitzt mindestens eine Nullstelle in* $\mathbb{C}$*.*

Beweisskizze. Angenommen, es gibt ein nicht-konstantes Polynom $p \in \mathbb{C}[X]$, das keine Nullstelle in $\mathbb{C}$ besitzt. Dann können wir eine *nullhomotope* Abbildung $S^1 \longrightarrow S^1$ konstruieren, deren Abbildungsgrad bezüglich der gegebenen Homologietheorie mit dem Grad des Polynoms p übereinstimmt. Dies ist jedoch ein Widerspruch. □

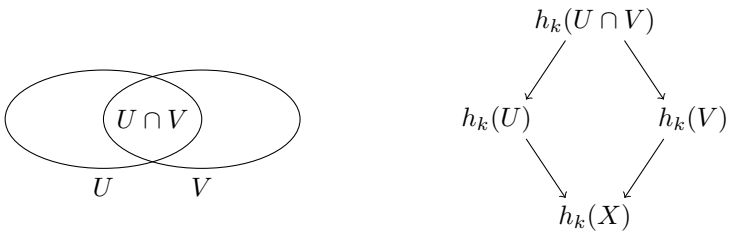


Abbildung (2.26): Die Ausgangssituation für die Mayer-Vietoris-Sequenz

Außerdem erhalten wir:

Korollar 2.25 (Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren)**.** *Falls* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine gewöhnliche Homologietheorie auf* Top^2 *mit Werten in* Ab *und Koeffizienten (isomorph zu)* $\mathbb{Z}$ *ist, so sind die entsprechenden reduzierten Homologiefunktoren (Bemerkung 2.7)*

$$\widetilde{h}_0, \widetilde{h}_1, \ldots : \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

Funktoren mit den Eigenschaften aus Satz 1.56.

Eines der Ziele der Vorlesung ist daher, eine gewöhnliche Homologietheorie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten zu konstruieren (Kapitel 3 und Kapitel 4).

2.4. Verkleben von Räumen – die Mayer-Vietoris[8]-Sequenz

Wir leiten nun eine Variante von Ausschneidung ab, die es oft ermöglicht, Homologie, bequem nach dem Baukastenprinzip zu berechnen. Genauer: Wie können wir die Homologie eines Raumes $X = U \cup V$ berechnen, wenn wir die Homologie von U, V und $U \cap V$ kennen? (Abbildung (2.26))

Wir werden dies insbesondere auf Abbildungskegel anwenden; dies liefert einerseits Realisierungsresultate und andererseits eine Möglichkeit, auch Homologietheorien auf Top (statt auf Top^2) axiomatisch zu erfassen.

Satz 2.27 (Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** *Sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine Homologietheorie auf* Top^2*. Sei* X *ein topologischer Raum, seien* U*,* $V \subset X$ *mit der Eigenschaft, dass der Abschluss von* $U \setminus V$ *(in* $U \cup V$*) im Inneren von* U *(in* $U \cup V$*) liegt, und sei* $A \subset X$ *mit* $A \subset U \cap V$*.*

1. *Ist* $U \cup V = X$*, so ist die Sequenz*

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} h_k(U \cap V, A) \xrightarrow{(h_k(i_U), -h_k(i_V))} h_k(U, A) \oplus h_k(V, A) \xrightarrow{h_k(j_U)\oplus h_k(j_V)} h_k(X, A) \xrightarrow{\Delta_k} h_{k-1}(U \cap V, A) \longrightarrow \cdots$$

[8] Leopold Vietoris; österreichischer Mathematiker, 1891–2002(!)

exakt. Dabei bezeichnen $i_U\colon (U\cap V, A)\longrightarrow (U, A)$, $i_V\colon (U\cap V, A)\longrightarrow (V, A)$, $j_U\colon (U, A)\longrightarrow (X, A)$ *und* $j_V\colon (V, A)\longrightarrow (X, A)$ *die Inklusionen. Für* $k\in\mathbb{Z}$ *ist* Δ_k *als die Komposition*

$$h_k(X,A)\longrightarrow h_k(X,U)\xleftarrow[\text{Ausschneidung}]{\cong} h_k(V,U\cap V)\xrightarrow[\partial_k^{(V,U\cap V,A)}]{} h_{k-1}(U\cap V,A)$$

definiert (wobei die unmarkierten Pfeile von den entsprechenden Inklusionen induziert werden).

2. *Außerdem die Sequenz*

$$\cdots\xrightarrow{\Delta_{k+1}} h_k(X,U\cap V)\xrightarrow{(h_k(i_U),-h_k(i_V))} h_k(X,U)\oplus h_k(X,V)\xrightarrow{h_k(j_U)\oplus h_k(j_V)} h_k(X,U\cup V)\xrightarrow{\Delta_k} h_{k-1}(X,U\cap V)\longrightarrow\cdots$$

exakt. Dabei bezeichnen $i_U\colon (X, U\cap V)\longrightarrow (X, U)$, $i_V\colon (X, U\cap V)\longrightarrow (X, V)$, $j_U\colon (X, U)\longrightarrow (X, U\cup V)$ *und* $j_V\colon (X, V)\longrightarrow (X, U\cup V)$ *die Inklusionen. Für* $k\in\mathbb{Z}$ *ist* Δ_k *als die Komposition*

$$h_k(X,U\cup V)\xrightarrow[\partial_k^{(X,U\cup V,U)}]{} h_{k-1}(U\cup V,U)\xleftarrow[\text{Ausschneidung}]{\cong} h_k(V,U\cap V)\longrightarrow h_{k-1}(X,U\cap V)$$

definiert (wobei die unmarkierten Pfeile von den entsprechenden Inklusionen induziert werden).

Beweisskizze. Der Beweis beruht auf der algebraischen Mayer-Vietoris-Sequenz (Proposition B.8).

Man beachte, dass in beiden Fällen Ausschneidung anwendbar ist (wegen der topologischen Voraussetzungen an U und V).

Der erste Teil folgt, indem wir Proposition B.8 auf die kommutative Leiter

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & h_k(U\cap V,A) & \longrightarrow & h_k(V,A) & \longrightarrow & h_k(V,U\cap V) & \xrightarrow{\partial_k^{(V,U\cap V,A)}} & h_{k-1}(U\cap V,A) & \longrightarrow & \cdots\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\cong & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & h_k(U,A) & \longrightarrow & h_k(X,A) & \longrightarrow & h_k(X,U) & \xrightarrow[\partial_k^{(X,U,A)}]{} & h_{k-1}(U,A) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

anwenden, deren Zeilen die lange exakte Tripelsequenzen zu $(V, U\cap V, A)$ bzw. (X, U, A) sind.

Analog folgt der zweite Teil, indem wir Proposition B.8 auf die kommutative Leiter, die entsprechend von den langen exakten Tripelsequenzen zu $(X, V, U\cap V)$ und $(X, U\cup V, U)$ gebildet werden, anwenden. □

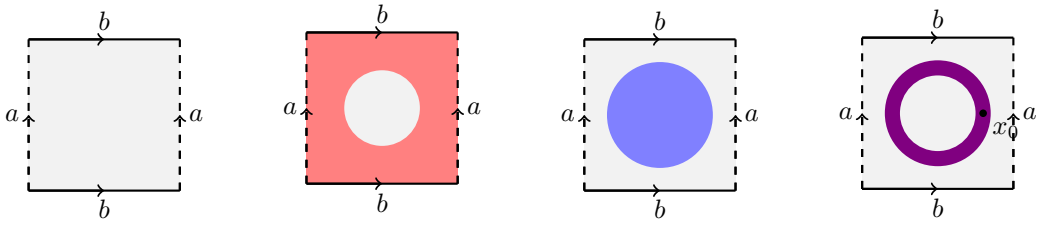


Abbildung (2.28): Zerlegung des Torus

Beispiel 2.29 (Homologie des Torus)**.** Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in Ab und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{Z}$. Wir bestimmen nun die Homologie des Torus $T := S^1 \times S^1$: Die Mayer-Vietoris-Sequenz der Zerlegung in Abbildung (2.28) liefert die exakte Sequenz (wobei $A := \{x_0\}$)

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{\Delta_{k+1}} & h_k(U\cap V, A) & \longrightarrow & h_k(U,A)\oplus h_k(V,A) & \longrightarrow & h_k(T,A) & \xrightarrow{\Delta_k} & h_{k-1}(U\cap V, A) \longrightarrow \cdots \\
 & & \cong\uparrow & & \uparrow\cong & & & & \cong\uparrow \\
 & & h_k(S^1,\{e_1^2\}) & \xrightarrow{-}_{0} & h_k(\textstyle\bigvee^2 S^1,\{e_1^2\})\oplus 0 & & & & h_{k-1}(S^1,\{e_1^2\}) \xrightarrow{-}_{0} \cdots
\end{array}$$

Warum ist der gestrichelte Homomorphismus trivial? Nach der Berechnung der Homologie von Sphären, genügt es, h_1 zu betrachten. Die Inklusion $U \cap V \hookrightarrow U$ entspricht dabei der folgenden Abbildung $S^1 \longrightarrow \bigvee^2 S^1$:

- den ersten Kreis durchlaufen,
- danach den zweiten Kreis rückwärts durchlaufen,
- danach den ersten Kreis rückwärts durchlaufen,
- danach den zweiten Kreis vorwärts durchlaufen.

Mit Korollar 2.20 und Lemma 2.21 folgt, dass dies in h_1 den trivialen Homomorphismus induziert.

Daraus erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$:

$$h_k\big(T,\{x_0\}\big) \cong \begin{cases} h_1\big(S^1,\{e_1^2\}\big) \cong \mathbb{Z} & \text{falls } k = 2 \\ h_1\big(\bigvee^2 S^1,\{e_1^2\}\big) \cong \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z}\setminus\{1,2\} \end{cases}$$

bzw. (Proposition 2.6)

$$h_k(T) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \text{falls } k = 1 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = 2 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z}\setminus\{0,1,2\}. \end{cases}$$

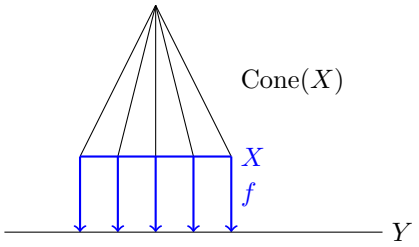


Abbildung (2.30): Abbildungskegel, schematisch

Die Homologie in Grad 1 stammt dabei von $S^1 \times \{e_1^2\} \cup \{e_1^2\} \times S^1 \cong \bigvee^2 S^1$.
Analog kann man die Homologie aller kompakten Flächen berechnen.

Wir betrachten nun die Homologie von Abbildungskegeln (Abbildung (2.30)):

Definition 2.31 (Abbildungskegel)**.** Sei X ein topologischer Raum.

- Der *Kegel über* X ist definiert als

$$\mathrm{Cone}(X) := X \times [0,1] \,/\, X \times \{0\},$$

  falls $X \neq \emptyset$. Ist $X = \emptyset$, so definieren wir $\mathrm{Cone}(X) := \bullet$ (sozusagen nur die Kegelspitze).
- Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung, so definieren wir den *Abbildungskegel von* f durch das Pushout

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cone}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(f) \end{array}$$

  in Top, wobei die linke Abbildung die Inklusion $X \hookrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow \mathrm{Cone}(X)$ ist.

Beispiel 2.32 (Abbildungskegel)**.**

- Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathrm{Cone}(\mathrm{id}_X) \cong X$.
- Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz, so ist $\mathrm{Cone}(f)$ kontraktibel. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*.
- Es ist

$$\mathrm{Cone}(f_2) \cong \mathbb{R}P^2,$$

  wobei $f_2\colon S^1 \longrightarrow S^1$ wie in Korollar 2.20 definiert ist.

Aus der Mayer-Vietoris-Sequenz erhalten wir die folgenden langen exakten Sequenzen für Abbildungskegel:

Satz 2.33 (lange exakte Homologiesequenz von Abbildungskegeln)**.** *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 . Dann gibt es (natürliche) lange exakte Sequenzen*

$$\cdots \longrightarrow \widetilde{h}_k(X) \xrightarrow{\widetilde{h}_k(f)} \widetilde{h}_k(Y) \xrightarrow{\widetilde{h}_k(Y\hookrightarrow \mathrm{Cone}(f))} \widetilde{h}_k\big(\mathrm{Cone}(f)\big) \longrightarrow \widetilde{h}_{k-1}(X) \xrightarrow{\widetilde{h}_{k-1}(f)} \cdots$$

bzw.

$$\cdots \longrightarrow h_k(X) \xrightarrow{h_k(f)} h_k(Y) \xrightarrow{h_k(Y\hookrightarrow \mathrm{Cone}(f))} \widetilde{h}_k\big(\mathrm{Cone}(f)\big) \longrightarrow h_{k-1}(X) \xrightarrow{h_{k-1}(f)} \cdots$$

(Für die erste Sequenz wird $X \neq \emptyset$ benötigt.)

Beweisskizze. Ohne Einschränkung sei $X \neq \emptyset$ und sei $x_0 \in X$. Wir betrachten die Zerlegung des Abbildungskegels von f in Abbildung (2.34). Dies liefert die entsprechende Mayer-Vietoris-Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & h_k(U\cap V, A) & \longrightarrow & h_k(U,A)\oplus h_k(V,A) & \longrightarrow & h_k\big(\mathrm{Cone}(f), A\big) & \longrightarrow & h_{k-1}(U\cap V, A) & \longrightarrow \cdots \\
& \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & \\
& h_k(X,\{x_0\}) & \xrightarrow[h_k(f)]{} & h_k(Y,\{f(x_0)\})\oplus 0 & \xrightarrow[h_k(\mathrm{Inkl})]{} & h_k(\mathrm{Cone}(f),\{f(x_0)\}) & & h_{k-1}(X,\{x_0\}) & \xrightarrow{} \cdots \\
& \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & & \cong\uparrow & \\
& \widetilde{h}_k(X) & \xrightarrow[\widetilde{h}_k(f)]{} & \widetilde{h}_k(Y) & \xrightarrow[\widetilde{h}_k(\mathrm{Inkl})]{} & \widetilde{h}_k(\mathrm{Cone}(f)) & & \widetilde{h}_{k-1}(X) & \xrightarrow{} \cdots
\end{array}$$

Dabei ist $A := \{[x_0, 1/2]\} \subset U \cap V$ und die vertikalen Homomorphismen sind von den Inklusionen induziert.

Dies zeigt die Existenz der ersten (natürlichen) langen exakten Sequenz. Addieren wir (via $\oplus$) zur mittleren exakten Sequenz die lange exakte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow h_k\big(\{x_0\}\big) \xrightarrow[\cong]{h_k(f|_{\{x_0\}})} h_k\big(\{f(x_0)\}\big) \longrightarrow 0 \longrightarrow h_{k-1}\big(\{x_0\}\big) \xrightarrow[\cong]{h_k(f|_{\{x_0\}})} \cdots$$

so erhalten wir mithilfe von Proposition 2.6 die zweite (natürliche) lange exakte Sequenz. □

Bemerkung 2.35. Diese lange exakte Homologiesequenz für Abbildungskegel ist in einem gewissen Sinne zur langen exakten Fasersequenz für Homotopiegruppen dual.

Aus der langen exakten Homologiesequenz erhalten wir insbesondere die folgende Charakterisierung von Homologieisomorphismen:

Korollar 2.36 (Homologieisomorphismen und Abbildungskegel)**.** *Sei $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Dann sind äquivalent:*

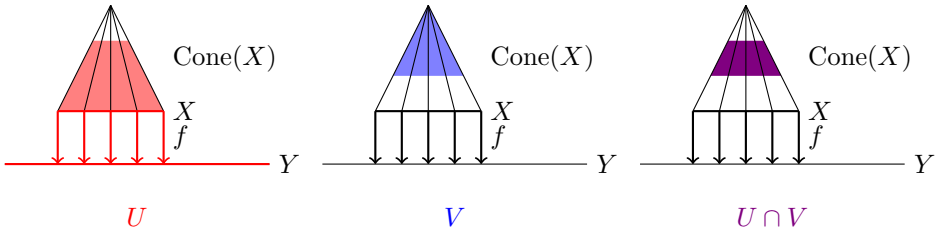


Abbildung (2.34): Zerlegung des Abbildungskegels im Beweis der langen exakten Homologiesequenz

1. *Für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *ist* $h_k(f)\colon h_k(X) \longrightarrow h_k(Y)$ *ein Isomorphismus.*
2. *Für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *ist* $\widetilde{h}_k(\mathrm{Cone}(f)) \cong 0$.
3. *Für alle* $k \in \mathbb{Z}$ *ist* $\widetilde{h}_k(f)\colon \widetilde{h}_k(X) \longrightarrow \widetilde{h}_k(Y)$ *ein Isomorphismus.*

Man kann die lange exakte Homologiesequenz von Abbildungskegeln auch verwenden, um Realisierungsresultate für Homologietheorien zu beweisen (dies führt zum Beispiel zu sogenannten *Moore-Räumen*).

Außerdem können wir Abbildungskegel verwenden, um relative Homologie durch absolute (reduzierte) Homologie darzustellen:

Proposition 2.37 (relative Homologie via Abbildungskegel)**.** *Sei* $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ *eine Homologietheorie auf* Top^2*, sei* (X, A) *ein Raumpaar und sei* $i\colon A \hookrightarrow X$ *die Inklusion. Dann induzieren die Inklusionen*

$$(X, A) \longrightarrow \big(\mathrm{Cone}(i), \mathrm{Cone}(A)\big) \longleftarrow \big(\mathrm{Cone}(i), \mathrm{Kegelspitze}\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ *natürliche Isomorphismen*

$$h_k(X, A) \cong \widetilde{h}_k\big(\mathrm{Cone}(i)\big).$$

Beweisskizze. Dies folgt aus Ausschneidung, Proposition 2.5 und Bemerkung 2.7. □

Wir erhalten somit die Beziehungen für $\mathbb{Z}$-Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}^2_{\mathsf{h}}$ in Abbildung (2.38). Umgekehrt erhalten wir für $\mathbb{Z}$-Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ die Beziehungen in Abbildung (2.39). Dies zeigt, dass man die Eilenberg-Steenrod-Axiome alternativ auch äquivalent für Homologietheorien auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ statt $\mathsf{Top}^2_{\mathsf{h}}$ formulieren kann.

2.5. Ausblick: Existenz und Eindeutigkeit von Homologietheorien

- *Existenz.*
  - Beispiele gewöhnlicher Homologietheorien:
    - singuläre Homologie auf Top^2 (Kapitel 3)
    - zelluläre Homologie auf der Kategorie der relativen CW-Komplexe (Kapitel 4)

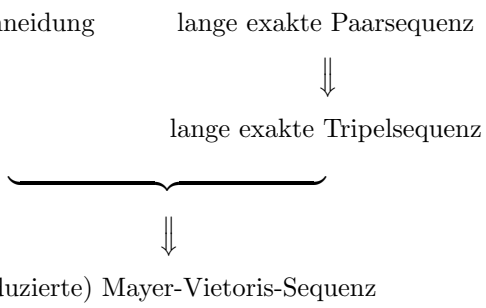


Abbildung (2.38): Eigenschaften von Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}^2$

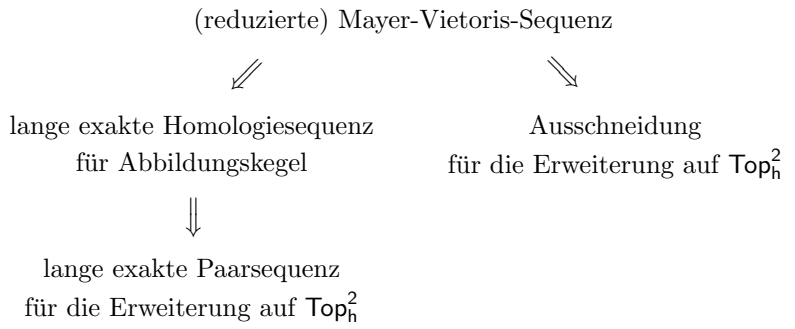


Abbildung (2.39): Eigenschaften von Folgen von Funktoren auf $\mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$

    - simpliziale Homologie auf der Kategorie der simplizialen Komplexe bzw. der triangulierten topologischen Räume (Seminar „Topologie vs. Kombinatorik“ im WS 2013/14)
    - Maßhomologie auf Top^2
    - ...
  - Beispiele für Homologietheorien, die *nicht* gewöhnlich sind:
    - Bordismus
    - K-Homologie
    - ...
- *Eindeutigkeit.*
  - Vergleichssatz für Homologietheorien auf CW-Komplexen (Satz 4.41)
  - Vergleichssatz für Homologietheorien auf Mannigfaltigkeiten (Algebraische Topologie III im SS 2014)
  - Auch die Atiyah-Hirzebruch-Spektralseqeunz liefert Eindeutigkeitsaussagen für Homologietheorien.

3. Singuläre Homologie

Wir zeigen nun wie man zu vorgegebenen Koeffizienten eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 konstruieren kann.

Wir geben zunächst eine anschauliche Skizze der Konstruktion von singulärer Homologie (Kapitel 3.1. Aufbauend auf dem Vokabular der homologischen Algebra (Anhang B.2) geben wir in Kapitel 3.2 die Konstruktion singulärer Homologie.

Im Anschluss daran weisen wir nach, dass singuläre Homologie die Eilenberg-Steenrod-Axiome erfüllt (Kapitel 3.3–3.4) und geben Anwendungen von singulärer Homologie (Kapitel 3.5–3.6), wie zum Beispiel Trennungssätze (Jordanscher Kurvensatz etc.).

3.1. Anschauliche Skizze der Konstruktion

Singuläre Homologie versucht topologische Räume durch einfache, an Simplizes angelehnte Bausteine, zu verstehen:

Definition 3.1 (singuläres Simplex)**.** Sei X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{N}$. Ein *singuläres k-Simplex* ist eine stetige Abbildung $\Delta^k \longrightarrow X$, wobei Δ^k das k-dimensionale Standardsimplex bezeichnet. Wir schreiben

$$S_k(X) := \mathrm{map}(\Delta^k, X)$$

für die Menge aller singulären k-Simplizes in X.

Die Grundidee ist nun, „Löcher“ in topologischen Räumen durch das „Umschließen“ mit singulären Simplizes zu entdecken.

Etwas genauer sieht das wie folgt aus (die präzise Konstruktion wird in Kapitel 3.2 gegeben):

- Da einzelne singuläre Simplizes für das „Umschließen“ von „Löchern“ im allgemeinen nicht ausreichen werden, betrachtet man stattdessen sogenannte *Ketten* von singulären Simplizes (Abbildung (3.2)).
- Kandidaten für Ketten, die ein „Loch“ entdecken, sind solche Ketten, die „keinen Rand“ haben, sogenannte *Zykel* (Abbildung (3.3)).
- Zykel entdecken nur dann ein „echtes Loch“, wenn sie nicht selbst Rand einer höherdimensionalen Kette sind (Abbildung (3.4)).

Man definiert daher für einen topologischen Raum X für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$\text{singuläre Homologie von } X \text{ im Grad } k := \frac{\text{singuläre } k\text{-Zykel}}{\text{Ränder von singulären } k+1\text{-Ketten}}.$$

3.2. Konstruktion singulärer Homologie

Wir geben nun die Konstruktion singulärer Homologie. Dafür verwenden wir die Sprache der homologischen Algebra (Anhang B.2).

Setup 3.5. Sei im folgenden R ein Ring mit Eins und sei Z ein Links-R-Modul.

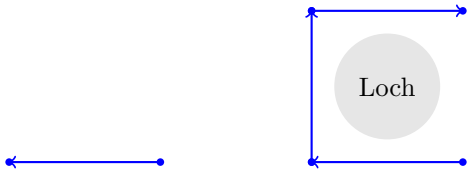


Abbildung (3.2): Singuläre Ketten, schematisch

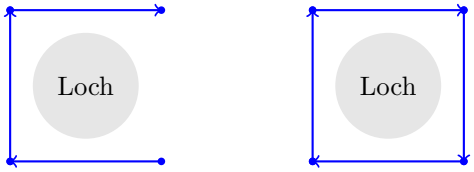


Abbildung (3.3): Singuläre Zykel, schematisch. Die linke Kette kann kein „Loch“ „umschließen“, die rechte schon.

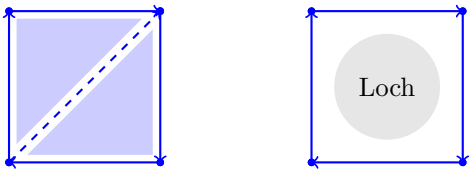


Abbildung (3.4): Singuläre Ränder, schematisch. Der linke Zykel ist Rand einer singulären Kette, kann also kein „Loch“ entdecken; der rechte Zykel ist *nicht* Rand einer singulären Kette (das „Loch“ ist im Weg).

Singuläre Ketten und ihre Ränder werden wie folgt algebraisch modelliert:

Proposition und Definition 3.6 (singulärer Kettenkomplex)**.**

1. *Sei X ein topologischer Raum. Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei*

$$C_k(X) := \begin{cases} \bigoplus_{\mathrm{map}(\Delta^k, X)} \mathbb{Z} = F\big(\mathrm{map}(\Delta^k, X)\big) & \text{falls } k \geq 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

wobei $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ der freie Erzeugungsfunktor ist (Beispiel 1.32). Außerdem sei

$$\partial_k := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot \partial_{k,j} & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{falls } k \leq 0 \end{cases} : C_k(X) \longrightarrow C_{k-1}(X),$$

wobei für $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und $j \in \{0, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned} i_{k,j}\colon \Delta^{k-1} &\longrightarrow \Delta^k \\ (t_0, \ldots, t_{k-1}) &\longmapsto (t_0, \ldots, t_{j-1}, 0, t_j, \ldots, t_{k-1}) \end{aligned}$$

die Inklusion der j-ten Seite von Δ^k bezeichnet und

$$\begin{aligned} \partial_{k,j} := F\big(\mathrm{map}(i_{k,j}, X)\big)\colon C_k(X) &\longrightarrow C_{k-1} \\ \sigma &\longmapsto \sigma \circ i_{k,j} \end{aligned}$$

(Abbildung (3.7)). Dann ist

$$C(X) := \big(C_*(X), \partial_*\big)$$

ein Kettenkomplex abelscher Gruppen, der singuläre Kettenkomplex von X*.*

2. *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Für $k \in \mathbb{N}$ sei*

$$\begin{aligned} C_k(f) := F\big(\mathrm{map}(\Delta^k, f)\big)\colon C_k(X) &\longrightarrow C_k(Y) \\ \sigma &\longmapsto f \circ \sigma \end{aligned}$$

und für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $C_k(f) := 0$. Dann ist $C(f) := \big(C_k(f)\big)_{k \in \mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C(X) \longrightarrow C(Y)$.

3. *So erhält man einen Funktor $\mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.*

Beweisskizze. Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $j \in \{0, \ldots, k+1\}$ und alle $r \in \{0, \ldots, j-1\}$ ist

$$i_{k+1,j} \circ i_{k,r} = i_{k+1,r} \circ i_{k,j-1}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt dann für alle $\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^{k+1}, X)$, dass

$$\begin{aligned} \partial_k \circ \partial_{k+1}(\sigma) = &\sum_{j=0}^{k+1} \sum_{j=r+1}^{k+1} (-1)^{j+r} \cdot \sigma \circ i_{k+1,r} \circ i_{k,j-1} \\ &+ \sum_{j=0}^{k+1} \sum_{r=j}^{k} (-1)^{j+r} \cdot \sigma \circ i_{k+1,j} \circ i_{k,r}; \end{aligned}$$

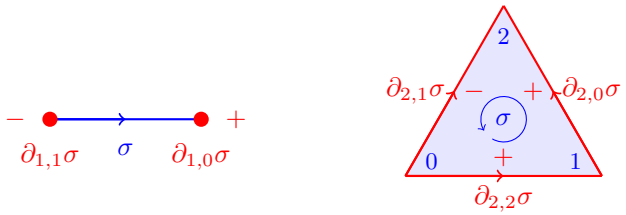


Abbildung (3.7): Der singuläre Randoperator in niedrigen Graden

da sich die beiden Summen nur um das Vorzeichen unterscheiden, folgt $\partial_k \circ \partial_{k+1}(\sigma) = 0$. Also ist $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$.

Der zweite und der dritte Teil folgen durch einfaches Nachrechnen. □

Bemerkung 3.8 (singulärer Kettenkomplex via simpliziale Mengen)**.** Die obige Konstruktion stimmt mit der folgenden Konstruktion überein: Wir betrachten den Funktor

$$\Delta^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Top} \xrightarrow{\Delta_{\mathsf{Top}}^{\mathrm{op}} \times \mathrm{id}_{\mathsf{Top}}} \mathsf{Top}^{\mathrm{op}} \times \mathsf{Top} \xrightarrow{\mathrm{map}(\,\cdot\,,\,\cdot\,)} \mathsf{Set} \xrightarrow{F} \mathsf{Ab},$$

wobei $\Delta_{\mathsf{Top}} \colon \Delta \longrightarrow \mathsf{Top}$ abstrakte Simplizes und monotone Abbildungen in Standardsimplizes und die entsprechenden affin linearen Abbildungen übersetzt. Die obige Komposition induziert einen Funktor $\mathsf{Top} \longrightarrow \Delta(\mathsf{Ab})$ und damit einen Funktor

$$\mathsf{Top} \longrightarrow \Delta(\mathsf{Ab}) \xrightarrow{C} {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$$

(Beispiel B.13 und B.17). Dieser Funktor ist genau der singuläre Kettenkomplexfunktor aus Proposition 3.6.

Wir könnten nun singuläre Homologie als algebraische Homologie dieses Kettenkomplexes definieren. Wir geben jedoch gleich die entsprechende Verallgemeinerung für Raumpaare und allgemeine (konstante) Koeffizienten an:

Definition 3.9 (singulärer Kettenkomplex mit (konstanten) Koeffizienten)**.**

– Ist (X, A) ein Raumpaar, so definieren wir

$$C(X, A; Z) := Z \otimes_{\mathbb{Z}} C(X) \,/\, \mathrm{im}(Z \otimes_{\mathbb{Z}} C(A \hookrightarrow X)) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$$

(wobei der Randoperator vom Randoperator auf $C(X)$ induziert wird).

– Ist $f \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine stetige Abbildung von Raumpaaren, so definieren wir $C(f; Z) = (C_k(f; Z))_{k \in \mathbb{Z}}$ durch

$$\begin{aligned} C_k(f; Z) \colon C_k(X, A; Z) &\longrightarrow C_k(Y, B; Z) \\ [c] &\longmapsto \big[C(f)(c)\big] \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ (dies ist wohldefiniert).

Dies liefert einen Funktor $C(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$.

Beispiel 3.10 (singuläre Ketten mit Koeffizienten)**.**

– Wir betrachten S^1: Sei

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Delta^1 &\longrightarrow S^1 \subset \mathbb{C}\\ (t, 1-t) &\longmapsto e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot t}.\end{aligned}$$

Dann ist $1 \otimes \sigma \in C_1(S^1, \emptyset; \mathbb{Z})$ ein Zykel.

– Wir betrachten (D^1, S^0): Sei

$$\begin{aligned}\sigma\colon \Delta^1 &\longrightarrow D^1\\ (t, 1-t) &\longmapsto 2\cdot t - 1.\end{aligned}$$

Dann ist $1 \otimes \sigma \in C_1(D^1, \emptyset; \mathbb{Z})$ *kein* Zykel, aber $1 \otimes \sigma$ repräsentiert einen Zykel in $C_1(D^1, S^0; \mathbb{Z})$.

Definition 3.11 (singuläre Homologie mit (konstanten) Koeffizienten)**.** Der Funktor

$$H_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) := H_*\big(C_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\big)\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$$

heißt *singuläre Homologie mit Koeffizienten in Z*.

Notation 3.12. Wir schreiben für topologische Räume X auch kurz

$$\begin{aligned}C(X;Z) &:= C(X, \emptyset; Z)\\ H_*(X;Z) &:= H_*(X, \emptyset; Z).\end{aligned}$$

Man beachte, dass die Konstruktion von singulärer Homologie nicht nur in Raumpaaren funktoriell ist, sondern auch in den Koeffizienten. Man erhält einen Funktor $H_*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top}^2 \times_R \mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$.

Beispiel 3.13 (singuläre Homologie der leeren Menge)**.** Nach Definition ist $C_k(\emptyset; Z) \cong 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, und somit

$$H_k(\emptyset; Z) \cong 0$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Bemerkung 3.14 (singuläre Homologie in negativen Graden)**.** Nach Konstruktion gilt für alle Raumpaare (X, A) und alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$, dass $C_k(X, A; Z) \cong 0$, und somit

$$H_k(X, A; Z) \cong 0.$$

Beispiel 3.15 (singuläre Homologie des Einpunktraumes)**.** Der singuläre Kettenkomplex $C(\bullet; Z)$ des Einpunktraumes mit Koeffizienten in Z ist nach Konstruktion isomorph zu dem Kettenkomplex

$$\begin{array}{lccccccccccc}\text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\ \cdots & \xrightarrow[\mathrm{id}_Z]{} & Z & \xrightarrow[0]{} & Z & \xrightarrow[\mathrm{id}_Z]{} & Z & \xrightarrow[0]{} & Z & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \cdots\end{array}$$

Also erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$H_k(\bullet; Z) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus 0. \end{cases}$$

Beispiel 3.16. Sei

$$\begin{aligned} \sigma \colon \Delta^1 &\longrightarrow S^1 \\ (t, 1-t) &\longmapsto e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot t} \end{aligned}$$

(Beispiel 3.10). Dann ist $1 \otimes \sigma \in C_1(S^1; \mathbb{Z})$ ein Zykel und die singuläre Kette $1 \otimes \tau \in C_2(S^1; \mathbb{Z})$ mit

$$\begin{aligned} \tau \colon \Delta^2 &\longrightarrow S^1 \\ (t_0, t_1, t_2) &\longmapsto e^{2 \cdot \pi \cdot i \cdot (t_0 - t_2)} \end{aligned}$$

zeigt, dass

$$2 \cdot [1 \otimes \sigma] = \big[f_2 \cdot (1 \otimes \sigma)\big]$$

in $H_1(S^1; \mathbb{Z})$ gilt; dabei ist $f_2 \colon S^1 \longrightarrow S^1$ wie in Korollar 2.20 definiert. Analog folgt auch $d \cdot [1 \otimes \sigma] = [f_d \cdot (1 \otimes \sigma)]$ für alle $d \in \mathbb{Z}$.

Singuläre Homologie erfüllt die folgende starke Form von Additivität; man beachte dabei, dass Wegzusammenhangskomponenten im allgemeinen weder offen noch abgeschlossen sind.

Proposition 3.17 (starke Additivität von singulärer Homologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_i)_{i \in I}$ die Familie der Wegzusammenhangskomponenten von X. Dann induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$\bigoplus_{i \in I} H_k(X_i; Z) \longrightarrow H_k(X; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Ist $k \in \mathbb{N}$, so ist Δ^k wegzusammenhängend; also induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ eine Bijektion

$$\bigsqcup_{i \in I} \operatorname{map}(\Delta^k, X_i) \longrightarrow \operatorname{map}(\Delta^k, X).$$

Daher induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i \in I}$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i \in I} C(X_i; Z) \longrightarrow C(X; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ (die direkte Summe von Kettenkomplexen ist dabei durch die gradweise direkte Summe der Kettenmoduln und der Randoperatoren gegeben). Da Homologie von Kettenkomplexen mit direkten Summen verträglich ist, folgt die Behauptung. □

Satz 3.18 (singuläre Homologie im Grad 0)**.**

1. *Ist X ein wegzusammenhängender nicht-leerer topologischer Raum, so induziert die konstante Abbildung $c\colon X \longrightarrow \bullet$ einen Isomorphismus*

$$H_0(c;Z)\colon H_0(X;Z) \longrightarrow H_0(\bullet;Z)$$

   in ${}_R\mathsf{Mod}$.

2. *Also ist $H_0(\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph zu*

$$Z \otimes_{\mathbb{Z}} F \circ \pi_0^+\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod},$$

   wobei $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ der freie Erzeugungsfunktor (Beispiel 1.32) und

$$\pi_0^+ := [\bullet,\ \cdot\,]\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

   der Wegzusammenhangskomponentenfunktor ist.

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt aus dem ersten Teil und der starken Additivität von singulärer Homologie (Proposition 3.17).

Es genügt daher, den ersten Teil zu zeigen: Sei $x_0 \in X$ und sei $i\colon \bullet \longrightarrow \{x_0\} \hookrightarrow X$ die Inklusion. Wegen $c \circ i = \mathrm{id}_\bullet$ liefert die Funktorialität von $H_0(\,\cdot\,;Z)$, dass $H_0(c;Z)$ surjektiv ist und dass $H_0(c;Z)$ genau dann injektiv ist, wenn $H_0(i;Z)$ surjektiv ist.

Es ist $H_0(i;Z)$ surjektiv, denn: Sei $c = \sum_{j=1}^m a_j \otimes x_j \in C_0(X;Z)$ ein 0-Zykel (mit $a_1,\dots,a_m \in Z$ und $x_1,\dots,x_m \in Z$; wir identifizieren hierbei singuläre 0-Simplizes in X mit Punkten in X). Da X wegzusammenhängend ist, gibt es zu jedem $j \in \{1,\dots,m\}$ einen Weg $\gamma_j\colon \Delta^1 \longrightarrow X$ mit

$$\partial_{1,1}(\gamma_j) = x_j \qquad \text{und} \qquad \partial_{1,0}(\gamma_j) = x_0$$

(Abbildung (3.19)). Dann gilt in $H_1(X;Z)$:

$$\begin{aligned}[c] &= \left[c + \partial_1\left(\sum_{j=1}^m a_j \otimes \gamma_j\right)\right] \\ &= \left[\sum_{j=1}^m a_j \otimes x_0\right] \in \operatorname{im} H_0(i;Z).\end{aligned}$$

Also ist $H_0(i;Z)$ surjektiv, wie gewünscht. □

Singuläre Homologie kann also erkennen wieviele Wegzusammenhangskomponenten ein topologischer Raum hat. Dies ist zum Beispiel beim Beweis von Separationssätzen wie dem Jordanschen Kurvensatz relevant (Satz 3.47).

Satz 3.20 (lange exakte Paarsequenz in singulärer Homologie)**.** *Sei (X,A) ein Raumpaar und seien $i\colon A \hookrightarrow X$ bzw. $j\colon (X,\emptyset) \hookrightarrow (X,A)$ die Inklusionen. Dann ist*

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A;Z) \xrightarrow{H_k(i;Z)} H_k(X;Z) \xrightarrow{H_k(j;Z)} H_k(X,A;Z) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A;Z) \longrightarrow \cdots$$

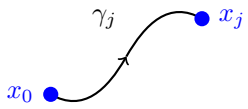


Abbildung (3.19): Verbindung von singulären 0-Simplizes in einem wegzusammenhängenden Raum durch ein singuläres 1-Simplex

eine natürliche lange exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$*, wobei für* $k \in \mathbb{N}_{>0}$ *der Verbindungshomomorphismus die explizite Beschreibung*

$$\begin{aligned} \partial_k \colon H_k(X, A; Z) &\longrightarrow H_{k-1}(A; Z) \\ \big[c + Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im} C_k(i)\big] &\longmapsto \big[\partial_k(c)\big] \end{aligned}$$

besitzt. Die Natürlichkeit bezieht sich dabei sowohl auf Natürlichkeit in Raumpaaren als auch in Koeffizienten.

Insbesondere erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$ *natürliche Transformationen*

$$\partial_k \colon H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,; Z) \Longrightarrow H_{k-1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,; Z) \circ U,$$

wobei $U \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ *der Unterraumfunktor ist (Definition 2.1).*

Beweisskizze. Die (natürliche) Sequenz

$$0 \longrightarrow C(A; Z) \xrightarrow{C(i;Z)} C(X; Z) \xrightarrow{\text{Projektion}} C(X, A; Z) \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ ist (gradweise) exakt; die (gradweise) Exaktheit an den Stellen $C(X, A; Z)$ bzw. $C(X)$ folgt dabei direkt aus der Konstruktion, die (gradweise) Exaktheit an der Stelle $C(A; Z)$ folgt daraus, dass die Injektion $C(i) \colon C(A) \longrightarrow C(X)$ einen Spalt besitzt und somit nach Anwenden von $Z \otimes_{\mathbb{Z}} \cdot$ injektiv bleibt.

Die Behauptung folgt nun aus der algebraischen langen exakten Homologiesequenz und der algebraischen Konstruktion der Verbindungshomomorphismen (Satz B.23). □

Unser nächstes Ziel ist nun, zu zeigen, dass

$$\big(\big(H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,; Z)\big)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$

eine additive gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) Z ist. Dazu fehlen noch der Beweis der Homotopieinvarianz und von Ausschneidung.

3.3. Homotopieinvarianz von singulärer Homologie

Wir zeigen nun, dass singuläre Homologie homotopieinvariant ist:

Satz 3.21 (Homotopieinvarianz von singulärer Homologie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Seien (X, A), (Y, B) Raumpaare und seien $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ stetige Abbildungen von Raumpaaren mit $f \simeq_{\mathsf{Top}^2} g$.*

1. *Dann gilt*
$$C(f; Z) \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C(g; Z)\colon C(X, A; Z) \longrightarrow C(Y, B; Z).$$
2. *Insbesondere folgt*
$$H_k(f; Z) = H_k(g; Z)\colon H_k(X, A; Z) \longrightarrow H_k(Y, B; Z)$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Wir zeigen dies zunächst mit einem geometrischen Argument für den Modellfall der Inklusion von Boden bzw. Deckel in den Zylinder und leiten dann daraus die allgemeine Aussage ab: Die technische Hauptschwierigkeit besteht dabei darin, dass $\Delta^k \times [0, 1]$ für $k > 0$ *kein* Simplex ist; daher ist es nötig, solche Prismen systematisch in $(k + 1)$-Simplizes zu zerlegen:

Lemma 3.22 (Zerlegung von Prismen)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann ist $(h_{X,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ mit*
$$\begin{aligned} h_{X,k}\colon C_k(X) &\longrightarrow C_{k+1}\big(X \times [0, 1]\big) \\ \mathrm{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma &\longmapsto \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,j} \end{aligned}$$
für alle $k \in \mathbb{N}$ und $h_{X,k} := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_\mathbb{Z}\mathsf{Ch}$ von $C(i_0)$ nach $C(i_1)$. Dabei sind $i_0, i_1\colon X \hookrightarrow X \times [0, 1]$ die Inklusionen des Bodens bzw. Deckels des Zylinders $X \times [0, 1]$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ und $j \in \{0, \dots, k\}$ ist (Abbildung (3.23))
$$\begin{aligned} \tau_{k,j}\colon \Delta^{k+1} &\longrightarrow \Delta^k \times [0, 1] \\ (t_0, \dots, t_{k+1}) &\longmapsto \big((t_0, \dots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \dots, t_{k+1}), t_{j+1} + \cdots + t_{k+1}\big). \end{aligned}$$
Diese Kettenhomotopie ist im folgenden Sinne natürlich: Für alle stetigen Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ ist
$$C_{k+1}(f \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ h_{X,k} = h_{Y,k} \circ C_k(f).$$

Beweisskizze. Die Natürlichkeit folgt direkt aus der Konstruktion.

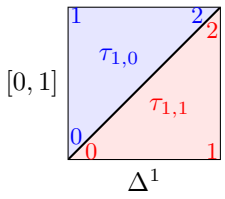


Abbildung (3.23): Triangulierung des Prismas $\Delta^k \times [0,1]$

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ gilt nach Definition

$$\begin{aligned}\partial_{k+1} \circ h_{X,k}(\sigma) &= \sum_{r=0}^{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{j+r} \cdot (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,j} \circ i_{k,j} \\ &= (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,0} \circ i_{k+1,0} \\ &+ \sum \text{„innere“ Seiten} \\ &+ \sum \text{„äußere“ Seiten} \\ &+ (-1)^{k+k+1} \cdot (\sigma \times \mathrm{id}_{[0,1]}) \circ \tau_{k,k} \circ i_{k+1,k+1}.\end{aligned}$$

Da jede „innere“ Seiten genau zweimal (und dann mit verschiedenen Vorzeichen) auftritt, ist der zweite Summand Null; der dritte Summand stimmt mit $-h_{X,k-1} \circ \partial_k(\sigma)$ überein. Insgesamt folgt damit

$$\partial_{k+1} \circ h_{X,k} = C_k(i_1) - h_{X,k-1} \circ \partial_k - C_k(i_0),$$

wie gewünscht. □

Beweisskizze von Satz 3.21. Wegen der Homotopieinvarianz von Homologie von Kettenkomplexen (Proposition B.37) genügt es, den ersten Teil zu zeigen.

Sei etwa $h\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ eine Homotopie in Top^2 von f nach g. Dann ist

$$\big(C_{k+1}(h) \circ h_{X,k}\colon C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(Y)\big)_{k \in \mathbb{Z}}$$

nach Lemma 3.22 eine Kettenhomotopie in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ von

$$C(h) \circ C(i_0) = C(h \circ i_0) = C(f)$$

nach

$$C(h) \circ C(i_1) = C(h \circ i_1) = C(g).$$

Wegen der Natürlichkeit der Konstruktion in Lemma 3.22 gilt

$$\operatorname{im}\big(C_{k+1}(h) \circ h_{X,k} \circ C_k(A \hookrightarrow X)\big) \subset \operatorname{im}\big(C_{k+1}(B \hookrightarrow Y)\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Deshalb induziert die obige Kettenhomotopie durch Tensorprodukt- und Restklassenbildung eine Kettenhomotopie

$$C(f;Z) \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C(g;Z)\colon C(X,A;Z) \longrightarrow C(Y,B;Z)$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$. □

Caveat 3.24. Sei X ein topologischer Raum und sei $k \in \mathbb{N}$. Sind $c = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \sigma_j$ und $c' = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot \sigma'_j \in C_k(X)$ singuläre Zykel und gilt

$$\forall_{j\in\{1,\dots,m} \quad \sigma_j \simeq_{\mathsf{Top}} \sigma'_j,$$

so folgt im allgemeinen *nicht* $[c] = [c'] \in H_k(X)$. Die entsprechenden Homotopien der singulären Simplizes sind im allgemeinen auf $\partial\Delta^k$ *nicht* kompatibel und die Prismenzerlegung liefert somit *keine* Kette $b \in C_{k+1}(X)$ mit $\partial_{k+1}(b) = c - c'$.

Diese Tatsache ist essentiell für die Konstruktion singulärer Homologie: Da Δ^k kontraktibel ist, sind alle stetigen Abbildungen $\Delta^k \longrightarrow X$ homotop zueinander (falls X wegzusammenhängend ist) ...

Falls es in der obigen Situation „auf dem Rand kompatible" Homotopien zwischen den singulären Simplizes gibt, kann man jedoch tatsächlich einen entsprechenden singulären Rand konstruieren. Dies ist z.B. nützlich, um glatte singuläre Ketten in glatten Mannigfaltigkeiten mit gewöhnlichen singulären Ketten zu vergleichen, oder um die Invarianz von singulärer Homologie unter sogenannten schwachen Äquivalenzen zu zeigen.

3.4. Ausschneidung in singulärer Homologie

Wir zeigen nun, dass singuläre Homologie Ausschneidung erfüllt, d.h., dass die Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X, A)$ für alle Raumpaare (X, A) und alle $B \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ sowie alle Ringe R mit Eins, alle $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen

$$H_k(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow H_k(X, A)$$

induziert.

Die technische Hauptschwierigkeit beim Beweis ist, dass singuläre Simplizes in X natürlich im allgemeinen *nicht* in $X \setminus B$ oder A liegen (Abbildung (3.25)).

Die Idee ist daher, singuläre Simplizes systematisch so in „kleine" singuläre Simplizes zu unterteilen, dass diese „kleinen" Simplizes jeweils in $X \setminus B$ oder A liegen. Wir verwenden dazu die baryzentrische Unterteilung (Abbildung (3.27)), wobei wir mit dem Fall von singulären Simplizes in konvexen Räumen beginnen:

Definition 3.26 (baryzentrische Unterteilung)**.** Sei $\Delta \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ eine konvexe Teilmenge (z.B. ein Standardsimplex).

– Der *Schwerpunkt* eines singulären Simplexes $\sigma\colon \Delta^k \longrightarrow \Delta$ ist

$$\beta(\sigma) := \frac{1}{k+1} \cdot \sum_{j=0}^{k} \sigma(e_{j+1}^{k+1}) \in \Delta.$$

Abbildung (3.25): Ein singuläres Simplex in X, das nicht in $X \setminus B$ oder A liegt und eine Unterteilung davon in „kleine“ Simplizes

– Sei $v \in \Delta$. Dann definieren wir den *Kegeloperator zu* v durch

$$\begin{aligned} v * \,\cdot : C_k(\Delta) &\longrightarrow C_{k+1}(\Delta) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, \Delta) \ni \sigma &\longmapsto \begin{pmatrix} \Delta^{k+1} & \longrightarrow & \Delta \\ (t_0, \dots, t_{k+1}) & \longmapsto & t_0 \cdot v + (1 - t_0) \cdot \sigma\Big(\frac{t_1}{1-t_0}, \dots, \frac{t_{k+1}}{1-t_0}\Big) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ (und durch $v * \,\cdot := 0$ für $k \in \mathbb{Z}_{<0}$).

– Die *baryzentrische Unterteilung* $B \colon C(\Delta) \longrightarrow C(\Delta)$ ist induktiv wie folgt definiert:
  – Für alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $B_k := 0$.
  – Es sei $B_0 := \mathrm{id}_{C_0(\Delta)}$.
  – Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} B_k \colon C_k(\Delta) &\longrightarrow C_k(\Delta) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, \Delta) \ni \sigma &\longmapsto \beta(\sigma) * \big(B_{k-1}(\partial_k \sigma)\big). \end{aligned}$$

– Außerdem definieren wir $(H_k \colon C_k(\Delta) \longrightarrow C_{k+1}(\Delta))_{k \in \mathbb{Z}}$ induktiv durch:
  – Für alle $k \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ sei $H_k := 0$.
  – Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} H_k \colon C_k(\Delta) &\longrightarrow C_{k+1}(\Delta) \\ \operatorname{map}(\Delta^k, \Delta) \ni \sigma &\longmapsto \beta(\sigma) * \big(B_k(\sigma) - \sigma - H_{k-1}(\partial_k \sigma)\big) \end{aligned}$$

Bemerkung 3.28. Die Konstruktionen aus Definition 3.26 sind im folgenden Sinne mit Inklusionen von konvexen Teilmengen von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ kompatibel: Sind $\Delta, \Delta' \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ konvex und ist $\Delta \subset \Delta'$, so gilt

$$C_k(\Delta \hookrightarrow \Delta') \circ B_k^{\Delta} = B_k^{\Delta'} \circ C_k(\Delta \hookrightarrow \Delta')$$

und

$$C_{k+1}(\Delta \hookrightarrow \Delta') \circ H_k^{\Delta} = H_k^{\Delta'} \circ C_k(\Delta \hookrightarrow \Delta')$$

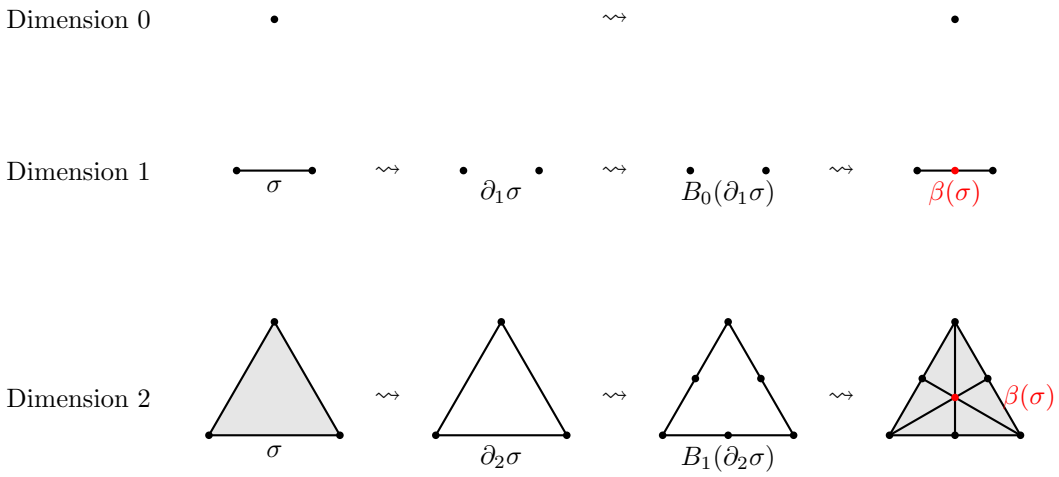


Abbildung (3.27): baryzentrische Unterteilung

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Daher verwenden wir für alle konvexen Teilmengen von $\bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ für „B“ und „H“ dieselbe Notation und für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \in C_k(\Delta^k) \quad \text{und} \quad H_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \in C_{k+1}(\Delta^k).$$

Für allgemeine topologische Räume definieren wir:

Definition 3.29 (baryzentrische Unterteilung in topologischen Räumen)**.** Sei X ein topologischer Raum.

- Wir definieren $B_X \colon C(X) \longrightarrow C(X)$ wie folgt: Für alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $B_{X,k} := 0$ und für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} B_{X,k} \colon C_k(X) &\longrightarrow C_k(X) \\ \mathrm{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma &\longmapsto C_k(\sigma) \circ B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}). \end{aligned}$$

- Zu $k \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $H_{X,k} := 0 \colon C_k(X) \longrightarrow C_{k+1}(X)$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} H_{X,k} \colon C_k(X) &\longrightarrow C_{k+1}(X) \\ \mathrm{map}(\Delta^k, X) \ni \sigma &\longmapsto C_{k+1}(\sigma) \circ H_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}). \end{aligned}$$

Proposition 3.30 (algebraische Eigenschaften der baryzentrischen Unterteilung in topologischen Räumen)**.** *Sei X ein topologischer Raum.*

1. *Dann ist $B_X \colon C(X) \longrightarrow C(X)$ eine Kettenabbildung in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.*
2. *Die Familie $(H_{X,k})_{k\in\mathbb{Z}}$ ist eine Kettenhomotopie $B_X \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(X)}$.*
3. *Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ stetig, so gilt*

$$C(f) \circ B_X = B_Y \circ C(f)$$

und

$$C_{k+1}(f) \circ H_{X,k} = H_{X,k} \circ C_k(f)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Für den Beweis verwenden wir die entsprechenden Eigenschaften im affinen Fall:

Lemma 3.31 (algebraische Eigenschaften der baryzentrischen Unterteilung; affiner Fall)**.** *Sei* $\Delta \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ *affin.*

0. Für alle $v \in \Delta$*, alle* $k \in \mathbb{N}$ *und alle* $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, \Delta)$ *gilt*

$$\partial_{k+1}(v * \sigma) = \begin{cases} \sigma - \operatorname{const}_v & \text{falls } k = 0 \\ \sigma - v * \partial_k(\sigma) & \text{falls } k > 0. \end{cases}$$

Ist $f \colon \Delta \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ *affin linear, so gilt außerdem*

$$f \circ (v * \sigma) = f(v) * \sigma.$$

1. Es ist $B \colon C(\Delta) \longrightarrow C(\Delta)$ *eine Kettenabbildung.*

2. Die Familie $(H_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ *ist eine Kettenhomotopie* $B \simeq_{\mathsf{Ch}_{\mathbb{Z}}} \mathrm{id}_{C(\Delta)}$.

3. Für alle $k \in \mathbb{N}$ *und alle affin linearen Abbildungen* $\sigma \colon \Delta^k \longrightarrow \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ *gilt*

$$B_k(\sigma) = C_k(\sigma) \circ B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k})$$

und

$$H_k(\sigma) = C_{k+1}(\sigma) \circ H_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}).$$

Beweisskizze. Teil 0 folgt mti einer einfachen Rechnung aus der Definition des Kegeloperators (Definition 3.26).

Teil 1 und Teil 2 lassen sich per vollständiger Induktion anhand der Definitionen von B und H nachrechnen.

Teil 3 folgt mit einer kleinen Rechnung induktiv aus Teil 0. □

Beweisskizze von Proposition 3.30. Wir zeigen nur Teil 1 (Teil 2 geht analog und Teil 3 folgt direkt aus der Konstruktion).

Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ gilt nach Konstruktion (und da $C(\sigma)$ und B Kettenabbildungen sind)

$$\begin{aligned} \partial_k \circ B_{X,k}(\sigma) &= \partial_k \circ C_k(\sigma) \circ B_k(\mathrm{id}_{\Delta^k}) \\ &= C_{k-1}(\sigma) \circ B_{k-1}(\partial_k \mathrm{id}_{\Delta^k}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_{k-1}(\sigma) \circ B_{k-1}(i_{k,j}). \end{aligned}$$

Da $i_{k,j}\colon \Delta^{k-1} \longrightarrow \Delta^k$ für alle $j \in \{0,\dots,k\}$ affin linear ist, erhalten wir aus dem dritten Teil von Lemma 3.31, dass

$$\begin{aligned}\partial_k \circ B_{X,k}(\sigma) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_{k-1}(\sigma) \circ C_{k-1}(i_{k,j}) \circ B_{k-1}(\mathrm{id}_{\Delta^{k-1}}) \\ &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot C_{k-1}(\sigma \circ i_{k,j}) \circ B_{k-1}(\mathrm{id}_{\Delta^{k-1}}) \\ &= B_{X,k-1} \circ \partial_k(\sigma),\end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Als nächsten Schritt zeigen wir mithilfe der baryzentrischen Unterteilung, dass „kleine“ Simplizes singuläre Homologie berechnen:

Setup 3.32. Für den Rest des Abschnitts sei R ein Ring und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$.

Definition 3.33 (kleine Simplizes)**.** Sei X ein topologischer Raum und sei $U = (U_i)_{i\in I}$ eine *verallgemeinerte offene Überdeckung von* X (d.h. für alle $i \in I$ ist $U_i \subset X$ und es gilt $\bigcup_{i\in I} U_i^\circ = X$).

- Der *Kettenkomplex* $C^U(X)$ *der* U*-kleinen singulären Simplizes in* X ist definiert durch

$$C_k^U(X) := \begin{cases} 0 & \text{falls } k < 0 \\ F(\bigcup_{i\in I} \mathrm{map}(\Delta^k, U_i)) = \bigoplus_{\bigcup_{i\in I} \mathrm{map}(\Delta^k, U_i)} \mathbb{Z} & \text{falls } k \geq 0 \end{cases}$$

  zusammen mit der Einschränkung der Randoperatoren von $C(X)$ (dies ist wohldefiniert!).
- Wir schreiben dann
$$H_*^U(X) := H_*\big(C_*^U(X)\big).$$
- Ist $A \subset X$, so definieren wir

$$C^U(X, A; Z) := Z \otimes_R C^U(X) \,/\, Z \otimes_R \mathrm{im}(C^{U\cap A}(A) \hookrightarrow C^U(X)) \in {}_R\mathsf{Ch}$$

  (wobei $U \cap A := (U_i \cap A)_{i\in I}$) und

$$H_*^U(X, A; Z) := H_*\big(C^U(X, A; Z)\big) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Grad}),$$

  sowie $C^*(X; Z) := C^U(X, \emptyset; Z)$ bzw. $H_*^U(X; Z) := H_*^U(X, \emptyset; Z)$.

Satz 3.34 (kleine Simplizes berechnen singuläre Homologie)**.** *Sei* X *ein topologischer Raum, sei* U *eine verallgemeinerte offene Überdeckung von* X *und sei* $j\colon C^U(X) \longrightarrow C(X)$ *die Inklusion. Dann ist*

$$H_*(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j)\colon H_*^U(X; Z) \longrightarrow H_*(X; Z)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Grad}$.

Bemerkung 3.35. Es gilt sogar, dass $Z \otimes_{\mathbb{Z}} j$ eine Kettenhomotopieäquivalenz ist, für die man eine „inverse“ Kettenhomotopieäquivalenz explizit angeben kann. Dies ist jedoch technisch etwas aufwendiger zu zeigen.

Für den Beweis des Satzes benötigen wir zwei Hilfsmittel:

Proposition 3.36 (Lebesgue-Lemma)**.** *Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und sei $U = (U_i)_{i \in I}$ eine verallgemeinerte offene Überdeckung von X. Dann existiert ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft:*

$$\forall_{x \in X} \quad \exists_{i \in I} \quad B_\varepsilon(x) \subset U_i$$

Beweisskizze. Angenommen, es gibt kein solches $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Dann gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein $x_n \in X$ mit

$$\forall_{i \in I} \quad B_{1/n}(x_n) \not\subset U_i.$$

Da X kompakt ist, besitzt die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ einen Häufungspunkt x in X. Für diesen gibt es jedoch ein $i \in I$ mit $x \in U_i^\circ$, was man leicht zum Widerspruch führen kann. □

Proposition 3.37 (baryzentrische Unterteilung verkleinert affine Simplizes)**.** *Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $\Delta \subset \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ konvex.*

1. *Ist $\sigma \colon \Delta^k \longrightarrow \Delta$ affin linear, so gilt für alle Summanden τ aus der Definition von $B_k(\sigma) \in C_k(\Delta)$ (Definition 3.26), dass*

$$\operatorname{diam}\big(\tau(\Delta^k)\big) \leq \frac{k}{k+1} \cdot \operatorname{diam}\big(\sigma(\Delta^k)\big).$$

2. *Insbesondere folgt: Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ und ist $\sigma \colon \Delta^k \longrightarrow \Delta$ affin linear, so existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass für alle Summanden τ aus der n-fachen baryzentrischen Unterteilung von σ bereits*

$$\operatorname{diam}\big(\tau(\Delta^k)\big) < \varepsilon$$

gilt.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt induktiv mit elementaren Überlegungen aus der konvexen Geometrie. Der zweite Teil ist eine direkte Konsequenz aus dem ersten Teil. □

Korollar 3.38. *Ist X ein topologischer Raum, ist U eine verallgemeinerte offene Überdeckung von X, ist $k \in \mathbb{N}$ und $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$, so gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit*

$$(B_{X,k})^{\circ n}(\sigma) \in C_k^U(X).$$

Beweisskizze. Sei $U = (U_i)_{i \in I}$. Die Behauptung folgt aus Proposition 3.36, Proposition 3.37 und der Natürlichkeit aus Proposition 3.30, da Δ^k ein kompakter metrischer Raum und $(\sigma^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine verallgemeinerte offene Überdeckung von Δ^k ist. □

Wir beweisen nun Satz 3.34:

Beweisskizze von Satz 3.34. Wie in der Konstruktion der langen exakten Paarsequenz für singuläre Homologie (Satz 3.20) folgt, dass

$$Z \otimes_{\mathbb{Z}} j \colon C^U(X;Z) \longrightarrow C(X;Z)$$

gradweise injektiv ist. Wir fassen daher $C^U(X;Z)$ als Unterkomplex von $C(X;U)$ auf.

Sei $k \in \mathbb{Z}$, ohne Einschränkung sei dabei $k \geq 0$.

- *Es ist $H_k(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j)$ surjektiv, denn:* Sei $c \in C_k(X;Z)$. Aus Korollar 3.38 erhalten wir (da c nur aus endlich vielen singulären Simplizes besteht) ein $n \in \mathbb{N}$ mit

  $$(Z \otimes_{\mathbb{Z}} (B_{X,k})^n)(c) \in C_k^U(X;Z).$$

  Wegen $Z \otimes_{\mathbb{Z}} (B_X)^n \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(X;Z)}$ (Proposition 3.30 und Proposition B.35) gilt in $H_k(X;Z)$, dass

  $$[c] = \left[(Z \otimes_{\mathbb{Z}} (B_{X,k})^n)(c)\right] \in \operatorname{im} H_k(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j).$$

- *Es ist $H_k(Z \otimes_{\mathbb{Z}} j)$ injektiv, denn:* Dies folgt analog, indem man $(k+1)$-Ketten in $C(X;Z)$ hinreichend oft baryzentrisch unterteilt. Man beachte dabei, dass auch $Z \otimes B_X|_{C^U(X;Z)}$ zu $\mathrm{id}_{C^U(X;Z)}$ kettenhomotop ist (da die baryzentrische Unterteilung und die zugehörige Kettenhomotopie nach Proposition 3.30 natürlich sind). □

Korollar 3.39 (kleine Simplizes berechnen singuläre Homologie, relativer Fall)**.** *Sei (X,A) ein Raumpaar und sei U eine verallgemeinerte offene Überdeckung von X. Dann induziert die kanonische Abbildung $C^U(X,A;Z) \longrightarrow C(X,A;Z)$ einen Isomorphismus*

$$H_*^U(X,A;Z) \longrightarrow H_*(X,A;Z)$$

in ${}_R\mathsf{Grad}$.

Beweisskizze. Wir betrachten das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C^{U\cap A}(A;Z) & \longrightarrow & C^U(X;Z) & \longrightarrow & C^U(X,A;Z) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & C(A;Z) & \longrightarrow & C(X;Z) & \longrightarrow & C(X,A;Z) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ (wobei alle Kettenabbildungen die entsprechenden kanonischen Abbildungen sind). Die untere Zeile ist gradweise exakt (Beweis von Satz 3.20); analog sieht man auch, dass die obere Zeile gradweise exakt ist. Mit der natürlichen langen exakten Sequenz von Kettenkomplexen (Satz B.23) und dem Fünfer-Lemma (Proposition B.6) folgt die Behauptung aus Satz 3.34. □

Korollar 3.40 (Ausschneidung in singulärer Homologie)**.** *Sei (X,A) ein Raumpaar und sei $B \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$. Dann induziert die Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \hookrightarrow (X,A)$ einen Isomorphismus*

$$H_*(X \setminus B, A \setminus B; Z) \longrightarrow H_*(X,A;Z)$$

in ${}_R\mathsf{Grad}$.

Beweisskizze. Sei $U := (X \setminus B, A)$; wegen $\overline{B} \subset A^\circ$ ist U eine verallgemeinerte offene Überdeckung von X. Dann ist

$$\begin{aligned} C^U(X, A; Z) &= \frac{Z \otimes_{\mathbb{Z}} C^U(X)}{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im}(C^{U \cap A}(A) \hookrightarrow C^U(X))} \\ &= \frac{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \big(C(X \setminus B) + C(A)\big)}{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im}(C(A \setminus B) + C(A) \hookrightarrow C(X \setminus B) + C(A))} \\ &\cong \frac{Z \otimes_{\mathbb{Z}} C(X \setminus B)}{Z \otimes_{\mathbb{Z}} \operatorname{im}(C(A \setminus B) \hookrightarrow C(X \setminus B))} \\ &= C(X \setminus B, A \setminus B; Z), \end{aligned}$$

wobei das Inverse dieses Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Ch}$ von der Inklusion induziert wird; dabei haben wir verwendet, dass $C(A) \cap C(X \setminus B) = C(A \setminus B)$ ist. Mit Korollar 3.39 folgt somit die Behauptung. □

3.5. Singuläre Homologie als gewöhnliche Homologietheorie

Wir fassen nun die bisherigen Ergebnisse nochmal zusammen:

Satz 3.41 (singuläre Homologie als gewöhnliche Homologietheorie)**.** *Sei R ein Ring und sei $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann ist singuläre Homologie*

$$\big(H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}\big)_{k \in \mathbb{Z}}$$

zusammen mit den Verbindungshomomorphismen

$$\big(\partial_k\colon H_k(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) \Longrightarrow H_{k-1}(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) \circ U\big)_{k \in \mathbb{Z}}$$

aus Satz 3.20 (wobei U der Unterraumfunktor aus Definition 2.1 ist) eine additive gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Koeffizienten (isomorph zu) Z.

Beweis. Die einzelnen Teile haben wir an den folgenden Stellen bewiesen:

- Funktorialität: (Proposition und) Definition 3.6, 3.9, 3.11
- Konstruktion der Verbindungshomomorphismen und ihre Natürlichkeit: Satz 3.20
- Homotopieinvarianz: Satz 3.21
- lange exakte Paarsequenz: Satz 3.20
- Ausschneidung: Korollar 3.40
- Dimensionsaxiom und Berechnung der Koeffizienten: Beispiel 3.15
- Additivität: Propositon 3.17 □

Als Konsequenz erhalten wir somit die Ergebnisse in Abbildung (3.42).

Wir können nun auch bestätigen, dass unsere ursprüngliche Idee zur Konstruktion singulärer Homologie in Kapitel 3.1 korrekt umgesetzt ist:

– Insbesondere existiert eine additive gewöhnliche Homologietheorie mit vorgegebenen Koeffizienten.
– Berechnung singulärer Homologie von Sphären und Abbildungsgrade für Selbstabbildungen von Sphären
(Korollar 2.18 und 2.20)
– Insbesondere sind Sphären *nicht* kontraktibel.
– Existenz „interessanter“ homotopieinvarianter Funktoren
(Satz 1.56 und Korollar 2.25)
– Invarianz der Dimension I und II
(Korollar 1.57, Korollar 2.19)
– Satz vom Igel
(Satz 1.59)
– Fundamentalsatz der Algebra
(Korollar 2.24)
– Brouwerscher Fixpunktsatz
(Aufgabe 3 von Blatt 3)
– Existenz von Nash-Gleichgewichten
(Bonusaufgabe von Blatt 3)
– Alle aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen abgeleiteten Aussagen treffen auch auf singuläre Homologie zu (z.B. Mayer-Vietoris-Sequenz, ...)
(Kapitel 2)

Abbildung (3.42): Konsequenzen aus Satz 3.41

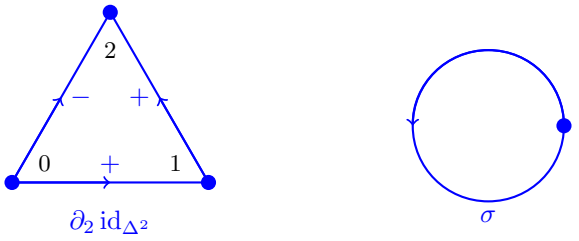


Abbildung (3.44): Der 1-Zykel $\partial_2 \mathrm{id}_{\Delta^2}$ erkennt das Loch in $\partial\Delta^2$; ebenso auch der Zykel σ für $S^1 \cong \partial\Delta^2$

Beispiel 3.43 (singuläre Homologie von Sphären, explizit)**.** Sei R ein Ring mit Eins.

- Eine sorgfältige induktive Analyse zeigt zusammen mit den Berechnungen aus Korollar 2.18: Für alle $n \in \mathbb{N}_{>1}$ gilt:
  - Es ist $1 \otimes \mathrm{id}_{\Delta^n} \in C_n(\Delta^n; R)$ eine singuläre Kette, deren zugehörige relative Homologieklasse von $(\Delta^n, \partial\Delta^n) \cong_{\mathsf{Top}^2} (D^n, S^{n-1})$ den Modul

$$H_n(\Delta^n, \partial\Delta^n; R) \cong H_n(D^n, S^{n-1}; R) \cong R$$

    erzeugt.
  - Es ist $1 \otimes \partial_n \mathrm{id}_{\Delta^n} \in C_{n-1}(\partial\Delta^n; R)$ ein Zykel (Abbildung (3.44)), dessen Homologieklasse

$$H_{n-1}(\partial\Delta^n; R) \cong H_{n-1}(S^{n-1}; R) \cong R$$

    erzeugt.
- Insbesondere liefert dies auch explizite, geometrische Erzeuger für $H_{n-1}(S^{n-1}; R)$ und $H_n(D^n, S^{n-1}; R)$.
- Sei

$$\begin{aligned} \sigma\colon \Delta^1 &\longrightarrow S^1 \\ (t, 1-t) &\longmapsto e^{2\cdot\pi\cdot i\cdot t}. \end{aligned}$$

  Dann erzeugt $[1 \otimes \sigma]$ die Homologie $H_1(S^1; R) \cong R$, da man leicht eine explizite singuläre 2-Kette konstruieren kann, deren Rand $\sigma -$ „$\partial_2 \mathrm{id}_{\Delta^2}$“ ist (und diese Zykel somit dieselbe Homologieklasse repräsentieren).

Beispiel 3.45 (singuläre Homologie des Torus, explizit)**.** Geht man durch die Berechnung gewöhnlicher Homologie des Torus $S^1 \times S^1$ mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten in Beispiel 2.29 und kombiniert dies mit dem obigen Beispiel 3.43, so sieht man (wobei die Notation in Abbildung (3.46) eingeführt wird):

- Die Klassen $[\sigma_a]$ und $[\sigma_b]$ in $H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ bilden eine Basis von $H_1(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

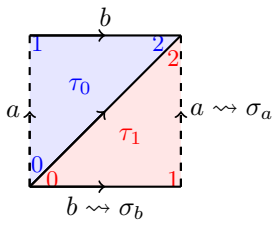


Abbildung (3.46): Singuläre Homologie des Torus, explizit

– Es ist $\tau_1 - \tau_0 \in C_2(S^1 \times S^1)$ ein Zykel und die Klasse $[\tau_1 - \tau_0]$ erzeugt $H_2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$.

Außerdem können wir nun mithilfe von singulärer Homologie die folgende Version des Jordanschen Kurvensatzes beweisen:

Satz 3.47 (Jordanscher Kurvensatz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$.*

1. *Ist $f\colon D^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so ist $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ wegzusammenhängend.*

1'. *Ist $D \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu D^n, so ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ wegzusammenhängend.*

2 *Ist $f\colon S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so besitzt $\mathbb{R}^n \setminus f(S^{n-1})$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.*

2' *Ist $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1}, so besitzt $\mathbb{R}^n \setminus S$ genau zwei Wegzusammenhangskomponenten.*

Der Fall stetiger injektiver Abbildungen $S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist der klassische Jordansche Kurvensatz; der Satz mag zunächst offensichtlich erscheinen, man bedenke aber, dass Teilmengen von $\mathbb{R}^2$, die zu S^1 homöomorph sind, durchaus „kompliziert aussehen“ können (Abbildung (3.50)).

Bemerkung 3.48. Mit etwas mehr Aufwand kann man folgende Verfeinerung des obigen Jordanschen Kurvensatzes zeigen: Ist $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und ist $S \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu S^{n-1}, so ist eine der beiden Wegzusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n \setminus S$ beschränkt, die andere unbeschränkt, und S ist der Rand der beiden Wegzusammenhangskomponenten.

Caveat 3.49 (gehörnte Alexander-Sphäre)**.** Ist $n \in \mathbb{N}_{>2}$ und ist $D \subset \mathbb{R}^n$ homöomorph zu D^n, so ist $\mathbb{R}^n \setminus D$ im allgemeinen *nicht* homöomorph zu $\mathbb{R}^n \setminus D^n$; ein Beispiel für eine solche Situation in $\mathbb{R}^3$ ist die sogenannte *gehörnte Alexander-Sphäre* (Abbildung (3.52)). Im Fall $n = 2$ ist diese Aussage jedoch wahr – nach dem Satz von Jordan-Schönflies.

Um den Jordanschen Kurvensatz zu beweisen nutzen wir aus, dass $H_0(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ (und damit auch $\widetilde{H}_0(\,\cdot\,;\mathbb{R})$) die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten bestimmt (Satz 3.18). Wir verwenden dazu die folgende Berechnung (die auch mit anderen Koeffizienten gilt):

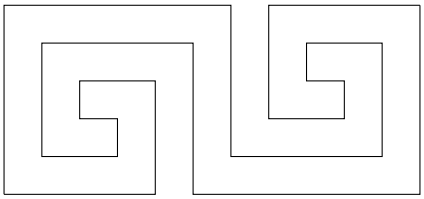


Abbildung (3.50): Teilmenge von $\mathbb{R}^2$, die zu S^1 homöomorph ist

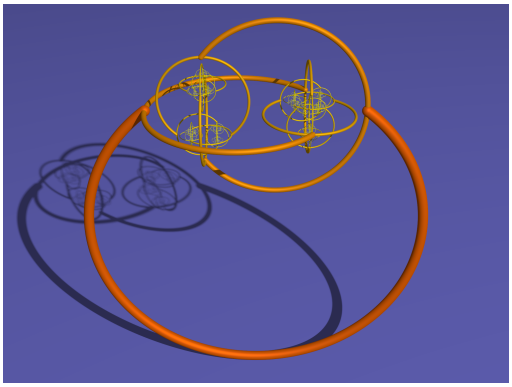


Abbildung (3.52): die gehörnte Alexander-Sphäre
(http://en.wikipedia.org/wiki/File:Alexander_horned_sphere.png)

Lemma 3.51. *Seien $n, m \in \mathbb{N}$.*

1. *Ist $f\colon D^m \longrightarrow S^n$ stetig und injektiv, so gilt*

$$\widetilde{H}_k\big(S^n \setminus f(D^m); \mathbb{R}\big) \cong 0$$

   für alle $k \in \mathbb{Z}$.

2. *Ist $m < n$ und ist $f\colon S^m \longrightarrow S^n$ stetig und injektiv, so gilt*

$$\widetilde{H}_k\big(S^n \setminus f(S^m); \mathbb{R}\big) \cong \widetilde{H}_k(S^{n-m-1}; \mathbb{R}) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } k = n-m-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beweisskizze. Zu 1: Wir zeigen die Behauptung durch Induktion über $m \in \mathbb{N}$ und verwenden $I^m := [0,1]^m \cong_{\mathsf{Top}} D^m$ statt D^m, weil das notationell etwas günstiger ist.

– *Induktionsanfang.* Im Fall $m = 0$ gilt

$$S^n \setminus f(D^0) \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n \simeq_{\mathsf{Top}} \bullet,$$

  woraus die Behauptung in diesem Fall folgt.

– *Indukionsschritt.* Sei $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und die Behauptung für $m-1$ bereits bewiesen; dann gilt sie auch für m, denn:
Sei $f\colon I^m \longrightarrow S^n$ stetig und injektiv und $k \in \mathbb{Z}$. *Angenommen,* es gibt ein $\alpha \in \widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^m); \mathbb{R}) \setminus \{0\}$; insbesondere ist dann $k \geq 0$. Wir betrachten

$$U := S^n \setminus f\big(I^{m-1} \times [0, 1/2]\big)$$
$$V := S^n \setminus f\big(I^{m-1} \times [1/2, 1]\big).$$

Dann ist $U \cap V = S^n \setminus f(I^m)$ und $U \cup V = S^n \setminus f(I^{m-1} \times \{1/2\})$ und die Voraussetzungen für die Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 2.27) sind erfüllt. Da f injektiv ist und $I^m \ncong_{\mathsf{Top}} S^n$ ist, ist dabei insbesondere $U \cap V$ nicht leer, und wir erhalten daher eine Mayer-Vietoris-Sequenz für reduzierte singuläre Homologie (Bemerkung 2.7). Diese liefert zusammen mit der Induktionsvoraussetzung (angewendet auf $U \cup V$), dass
  – das Bild von α in $\widetilde{H}_k(U; \mathbb{R})$ nicht 0 ist
  – oder dass das Bild von α in $\widetilde{H}_k(V; \mathbb{R})$ nicht 0 ist.

Induktiv erhalten wir so eine Folge $[0, 1] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots$ von Intervallen, deren Durchschnitt nur einen Punkt t enthält und so dass für alle $j \in \mathbb{N}$ das Bild von α in $\widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^{m-1} \times I_j; \mathbb{R})$ nicht 0 ist. Andererseits ist

$$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} S^n \setminus f(I^{m-1} \times I_j) = S^n \setminus f\big(I^{m-1} \times \{t\}\big)$$

und

$$\widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^{m-1} \times \{t\}); \mathbb{R}) \cong 0$$

nach Induktionsvoraussetzung. Dies widerspricht jedoch dem Verhalten von singulärer Homologie unter aufsteigenden Vereinigungen (Proposition 3.53). Also ist $\widetilde{H}_k(S^n \setminus f(I^m); \mathbb{R}) \cong 0$.

Zu 2: Auch den zweiten Teil zeigen wir induktiv über $m \in \{0, \ldots, n-1\}$:

– *Induktionsanfang.* Im Fall $m = 0 < n$ ist

$$S^n \setminus f(S^0) \cong_{\mathsf{Top}} S^{n-1} \times \mathbb{R} \simeq_{\mathsf{Top}} S^{n-1},$$

woraus die Behauptung in diesem Fall folgt.

– *Induktionsschritt.* Sei nun $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ und die Behauptung für $m-1$ bereits bewiesen; dann gilt sie auch für m, denn:
Wir betrachten die Zerlegung

$$S^m = D^m_+ \cup D^m_-$$

in die obere bzw. untere Hemisphäre; man beachte dabei, dass $D^m_+ \cong_{\mathsf{Top}} D^m \cong_{\mathsf{Top}} D^m_-$ und dass $D^m_+ \cap D^m_- = S^{m-1} \subset S^m$ ist. Sei

$$U := S^n \setminus f(D^m_+)$$
$$V := S^n \setminus f(D^m_-).$$

Dann ist $U \cap V = S^n \setminus f(S^m)$ und $U \cup V = S^n \setminus f(S^{m-1})$; da f injektiv, da $m < n$ und $S^m \ncong_{\mathsf{Top}} S^n$ ist, ist $U \cap V \neq \emptyset$. Mit der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 2.27) für reduzierte singuläre Homologie zusammen mit dem ersten Teil (angewendet auf U bzw. V) erhalten wir, dass

$$\begin{aligned}\widetilde{H}_k\big(S^n \setminus f(S^m); \mathbb{R}\big) &\cong \widetilde{H}_k(U \cap V; \mathbb{R}) \\ &\cong \widetilde{H}_{k+1}(U \cup V; \mathbb{R}) \\ &\cong \widetilde{H}_{k+1}\big(S^n \setminus f(S^{m-1}); \mathbb{R}\big)\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Mit der Induktionsvoraussetzung folgt somit die Behauptung. □

Im Beweis haben wir folgendes verwendet (für reduzierte singuläre Homologie):

Proposition 3.53 (singuläre Homologie und aufsteigende Vereinigungen)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei Z ein Links-R-Modul. Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen von X mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n^\circ = X$. Dann gilt: Die Inklusionen $(X_n \hookrightarrow X)_{n\in\mathbb{N}}$ induzieren für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z) \longrightarrow H_k(X; Z).$$

Dabei ist

$$\operatorname*{colim}_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z) := \Big(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H_k(X_n; Z)\Big) \Big/ \sim,$$

wobei „$\sim$“ die Äquivalenzrelation ist, die von

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{m\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad \forall_{\alpha\in H_k(X_n;Z)} \quad \alpha \sim H_k(i_{n,m})(\alpha) \in H_k(X_m; Z)$$

erzeugt wird, wobei $i_{n,m}\colon X_n \longrightarrow X_m$ die entsprechende Inklusion bezeichnet.

Beweisskizze. Dies ist ein einfaches Kompaktheitsargument. □

Beweisskizze (des Jordanschen Kurvensatzes (Satz 3.47)). Offenbar sind 1' und 2' direkte Konsequenze von 1 bzw. 2. Wir zeigen daher nur die Teile 1 und 2.

Wir beginnen mit dem ersten Teil: Ist $f\colon D^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so ist $f(D^n)$ kompakt; betrachten wir die stetige und injektive Abbildung

$$\overline{f}\colon D^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \hookrightarrow \text{„}\mathbb{R}^n \cup \{\infty\}\text{“} \cong_{\mathsf{Top}} S^n,$$

so haben also $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ und $S^n \setminus \overline{f}(D^n)$ dieselbe Anzahl an Wegzusammenhangskomponenten. Mit Lemma 3.51 und der Berechnung von singulärer Homologie in Grad 0 (Satz 3.18) folgt somit, dass $\mathbb{R}^n \setminus f(D^n)$ genau

$$\dim_{\mathbb{R}} H_0\big(S^n \setminus \overline{f}(D^n); \mathbb{R}\big) = \dim_{\mathbb{R}} \widetilde{H}_0\big(S^n \setminus \overline{f}(D^n); \mathbb{R}\big) + 1 = 0 + 1 = 1$$

Wegzusammenhangskomponenten besitzt.

Der zweite Teil folgt analog aus der Tatsache, dass nach Lemma 3.51

$$\dim_{\mathbb{R}} \widetilde{H}_0\big(S^n \setminus \overline{f}(S^{n-1}); \mathbb{R}\big) = 1$$

für alle stetigen und injektiven Abbildungen $\overline{f}\colon S^{n-1} \longrightarrow S^n$ gilt. □

Aus dem Jordanschen Kurvensatz erhalten wir unter anderem:

Korollar 3.54 (Gebietsinvarianz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $f\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv. Dann ist $f(U) \subset \mathbb{R}^n$ offen.*

Beweisskizze. Dies folgt mit einer geeigneten lokalen Betrachtung und grundlegenden Eigenschaften von (Weg)Zusammenhang in $\mathbb{R}^n$ aus dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 3.47). □

Korollar 3.55. *Sei $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Es gibt keine stetige und injektive Abbildung $S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*
2. *Ist $m \in \mathbb{N}_{>n}$, so gibt es keine stetige und injektive Abbildung $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$.*

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt wegen $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^m$ aus dem ersten Teil.

Wir zeigen nun den ersten Teil: Ohne Einschränkung sei $n > 0$. *Angenommen,* es gibt eine injektive und stetige Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Dann ist die Komposition

$$\overline{f}\colon S^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n \times \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

stetig und injektiv; nach dem Jordanschen Kurvensatz (Satz 3.47) hat $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{f}(S^n)$ somit genau zwei Wegzusammenhangskomponenten. Andererseits sieht man der Konstruktion von $\overline{f}$ jedoch an, dass $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \overline{f}(S^n)$ wegzusammenhängend ist (indem man die hinzugefügte Koordinate nutzt), was ein Widerspruch ist. Also gibt es keine stetige und injektive Abbildung $S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. □

3.6. Die ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie

Wir wollen nun verstehen wie „kompliziert“ singuläre Homologieklassen sind, gemessen daran, „wieviele“ singuläre Simplizes nötig sind um sie zu repräsentieren. Eine naheliegende Mögichkeit, dies zu modellieren, ist die sogenannte ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie (die die „Anzahl“ singulärer Simplizes mithilfe der Koeffizienten gewichtet):

Definition 3.56 (ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie)**.** Sei X ein topologischer Raum und sei $k \in \mathbb{N}$.

– Die *ℓ^1-Norm auf $C_k(X;\mathbb{R})$* ist die ℓ^1-Norm auf $C_k(X;\mathbb{R})$ bezüglich der Basis $\operatorname{map}(\Delta^k, X)$:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1\colon C_k(X;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \sum_{j=1}^{m} \underbrace{a_j}_{\in\mathbb{R}} \otimes \underbrace{\sigma_j}_{\substack{\in \operatorname{map}(\Delta^k, X) \\ \text{alle verschieden}}} &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} |a_j|. \end{aligned}$$

– Die ℓ^1-*Halbnorm auf* $H_k(X;\mathbb{R})$ ist die von der ℓ^1-Norm auf $C_k(X;\mathbb{R})$ induzierte Halbnorm:

$$\begin{aligned}\|\cdot\|_1 \colon H_k(X;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}\\ \alpha &\longmapsto \inf\big\{\|c\|_1 \;\big|\; c \in C_k(X;\mathbb{R}) \text{ ist ein Zykel mit } [c]=\alpha\big\}.\end{aligned}$$

Bemerkung 3.57. Entsprechend können wir ℓ^1-Halb„normen“ auf singulärer Homologie mit anderen „normierten“ Koeffizienten definieren (z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$, ...).

Die ℓ^1-Halbnorm ist im folgenden Sinne funktoriell:

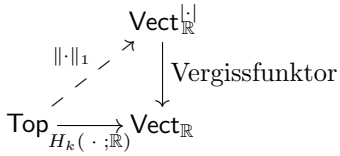
Proposition 3.58 (Funktorialität der ℓ^1-(Halb-)Norm)**.** *Sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und sei $k \in \mathbb{N}$.*

1. *Dann gilt für alle $c \in C_k(X;\mathbb{R})$, dass:*
$$\big\|C_k(f;\mathbb{R})(c)\big\|_1 \leq \|c\|_1.$$
2. *Und für alle $\alpha \in H_k(X;\mathbb{R})$ gilt*
$$\big\|H_k(f;\mathbb{R})(\alpha)\big\|_1 \leq \|\alpha\|_1.$$
3. *Insbesondere folgt: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Homotopieäquivalenz in* Top*, so ist die induzierte Abbildung $H_k(f;\mathbb{R})\colon H_k(X;\mathbb{R}) \longrightarrow H_k(Y;\mathbb{R})$ isometrisch.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus der Definition der ℓ^1-Halbnorm; man berücksichtige dabei, dass $C_k(f;\mathbb{R})$ verschiedene singuläre Simplizes nicht notwendig auf verschiedene Simplizes abbildet. Der zweite Teil folgt aus dem ersten, der dritte aus dem zweiten. □

Die ℓ^1-Halbnorm liefert somit ein Hindernis für die Existenz stetiger Abbildungen mit gewissen Eigenschaften in singulärer Homologie.

Bemerkung 3.59 (funktorielle Halbnorm)**.** Die obige Proposition sagt nichts anderes als, dass $H_k(\,\cdot\,;\mathbb{R})\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ über den Vergissfunktor $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}^{|\cdot|} \longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}$ faktorisiert:



Dabei bezeichnet $\mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}^{|\cdot|}$ die Kategorie der halbnormierten $\mathbb{R}$-Vektorräume, deren Morphismen die $\mathbb{R}$-linearen Abbildungen, die die Halbnorm nicht vergrößern, sind.

Beispiel 3.60.

- Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $f\colon S^n \longrightarrow S^n$ eine stetige Abbildung mit $H_n(f;\mathbb{R}) = 2 \cdot \mathrm{id}_{H_n(S^n;\mathbb{R})}$; eine solche existiert nach Korollar 2.20. Dann gilt wegen der Funktorialität im Sinne von Proposition 3.58

$$\begin{aligned} 2 \cdot \|\alpha\|_1 &= \|2 \cdot \alpha\|_1 \\ &= \big\|H_n(f;\mathbb{R})(\alpha)\big\|_1 \\ &\leq \|\alpha\|_1 \end{aligned}$$

  bzw. $\|\alpha\|_1 = 0$ für alle $\alpha \in H_n(S^n;\mathbb{R})$.
- Analog kann man mithilfe von Beispiel 3.45 zeigen, dass $\|\alpha\|_1 = 0$ für alle $\alpha \in H_1(S^1 \times S^1;\mathbb{R})$ bzw. $\in H_2(S^1 \times S^1;\mathbb{R})$ gilt.

Proposition 3.61 (die ℓ^1-Halbnorm auf $H_1(\,\cdot\,;\mathbb{R})$)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt*

$$\|\alpha\|_1 = 0$$

für alle $\alpha \in H_1(X;\mathbb{R})$.

Beweisskizze. Indem wir singuläre Zykel im Grad 1 genau analysieren, sehen wir, dass es $m \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in H_1(S^1;\mathbb{R})$ und $f_1, \ldots, f_m \in \mathrm{map}(S^1, X)$ mit

$$\alpha = \sum_{j=1}^{m} a_j \cdot H_1(f_j;\mathbb{R})(\alpha_j) \in H_1(X;\mathbb{R})$$

gibt. Nun folgt die Behauptung aus Beispiel 3.60. □

Bemerkung 3.62. Analog erhalten wir aus Beispiel 3.60: Ist (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum, ist $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist α im Bild der Komposition

$$\pi_k(X, x_0) \longrightarrow H_k(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(X;\mathbb{R}),$$

wobei der linke Homomorphismus der Hurewicz-Homomorphismus ist (Bemerkung 2.23) und der rechte der von der Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ der Koeffizienten induzierte Homomorphismus ist, so folgt

$$\|\alpha\|_1 = 0.$$

Insbesondere liefert die ℓ^1-Norm also ein Hindernis dafür, dass gewisse Elemente im Bild dieser Komposition liegen.

Auch im Grad 0 lässt sich die ℓ^1-Halbnorm explizit beschreiben (der Einfachheit halber beschränken wir uns auf den wegzusammenhängenden Fall):

Proposition 3.63 (die ℓ^1-Halbnorm auf $H_0(\,\cdot\,;\mathbb{R})$)**.** *Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum und sei $x_0 \in X$. Dann gilt*

$$\big\|[a \cdot x_0]\big\|_1 = |a|$$

für alle $a \in \mathbb{R}$, wobei wir $a \cdot x_0$ als Zykel in $C_0(X;\mathbb{R})$ auffassen.

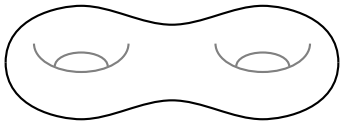


Abbildung (3.65): orientierte, geschlossene, zusammenhängende Fläche mit „zwei Henkeln“

Beweisskizze. Dies kann man analog zur Berechnung von $H_0(\bullet;\mathbb{R})$ (Beispiel 3.15) bzw. $H_0(X;\mathbb{R})$ (Satz 3.18) zeigen. □

Caveat 3.64. Im allgemeinen ist die ℓ^1-Halbnorm auf $H_*(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ sehr schwer exakt zu berechnen; dies ist Gegenstand aktueller Forschung. Die Methoden umfassen dabei (normierte) homologische Algebra, Funktionalanalysis, Maßtheorie, Geometrie und geometrische Gruppentheorie.

Wir geben nun einen kleinen Ausblick auf weitere Eigenschaften und Anwendungen der ℓ^1-Halbnorm:

Ist M eine orientierte, geschlossene, zusammenhängende n-dimensionale Mannigfaltigkeit, so besitzt M eine sogenannte (reelle) Fundamentalklasse $[M]_{\mathbb{R}} \in H_n(M;\mathbb{R})$ und man nennt

$$\|M\| := \left\|[M]_{\mathbb{R}}\right\|_1 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

das *simpliziale Volumen von M*. Dabei ist M *orientiert*, wenn man lokale Orientierungen von M wählt, die global kompatibel sind (Algebraische Topologie III).Man nennt M *geschlossen*, falls M kompakt ist und keinen Rand besitzt. Gibt es eine Triangulierung von M, so liefern die Simplizes einer solchen Triangulierung einen singulären Zykel, der $[M]_{\mathbb{R}}$ repräsentiert. Grob gesprochen misst das simpliziale Volumen also „wieviele“ Simplizes man benötigt, um M singulär zu triangulieren. Mit den grundlegenden Eigenschaften von Fundamentalklassen kann man folgern, dass das simpliziale Volumen eine Homotopieinvariante von orientierten geschlossenen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten ist.

Zum Beispiel gilt für alle $g \in \mathbb{N}_{>0}$, dass

$$\|F_g\| = 4 \cdot g - 4,$$

wobei F_g die orientierte, geschlossene, zusammenhängende Fläche mit „g Henkeln“ bezeichnet (Abbildung (3.65)); dies ist jedoch *nicht* offensichtlich. Andererseits ist es ein offenes Problem, den exakten Wert von $\|F_2 \times F_2 \times F_2\|$ zu bestimmen ...

Das folgende Resultat geht auf Gromov und Thurston zurück. Dieses kann als Baustein in Gromovs Beweis von Mostow-Starrheit verwendet werden.

Satz 3.66 (simpliziales Volumen hyperbolischer Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$. Dann gibt es eine Konstante $v_n \in \mathbb{R}_{>0}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle orientier-*

ten, geschlossenen, zusammenhängenden, hyperbolischen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten gilt

$$\|M\| = \frac{\mathrm{vol}(M)}{v_n} \in \mathbb{R}_{>0}.$$

Insbesondere ist das simplizale Volumen von M nicht 0 und das riemannsche Volumen ist in diesem Fall eine Homotopieinvariante(!).

Eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist *hyperbolisch*, wenn die Schnittkrümmung konstant -1 ist (oder, äquivalent, falls die riemannsche universelle Überlagerung zum hyperbolischen Raum der entsprechenden Dimension isometrisch ist. Außerdem besitzt auch v_n eine Interpretation in hyperbolischer Geometrie.

Dieser Satz besitzt vielfältige Verallgemeinerungen auf andere Situationen negativer Krümmung und erlaubt es, in manchen Situationen, das simpliziale Volumen als Ersatz für das riemannsche Volumen zu verwenden.

Ein weiterführenderer Überblick über das simpliziale Volumen findet sich zum Beispiel im *Manifold Atlas* (http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/Simplicial_volume).

Außerdem gibt es vielfältige, überraschende, Zusammenhänge zwischen der ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie und der Fundamentalgruppe. Ein erstes Beispiel dieser Art ist der folgende Satz von Gromov:

Satz 3.67 (die ℓ^1-Halbnorm auf $H_*(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ von einfach zusammenhängenden Räumen)**.** *Sei X ein einfach zusammenhängender topologischer Raum und sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gilt*

$$\|\alpha\|_1 = 0$$

für alle $\alpha \in H_k(X;\mathbb{R})$.

Verallgemeinerungen dieses Satzes machen den Zusammenhang mit (geometrischer) Gruppentheorie noch deutlicher.

Die Untersuchung der ℓ^1-Halbnorm auf singulärer Homologie ist ein aktives Forschungsgebiet im Spannungsfeld zwischen Topologie, Geometrie und Gruppentheorie mit vielfältigen Anwendungen zwischen diesen Gebieten.

3.7. Singuläre Homologie und Homotopiegruppen

Wir werden im folgenden singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten mit Homotopiegruppen vergleichen.

Zunächst geben wir eine kurze Einführung in Homotopiegruppen[9]: Homotopiegruppen sind Homotopieinvarianten von (punktierten) topologischen Räumen, die die „sphärischen Löcher“ beschreiben.

Definition 3.68 (punktierte topologische Räume)**.** Die *Kategorie* Top_* *der punktierten Räume* ist die volle Unterkategorie der Kategorie Top^2 der Raumpaare mit einpunktigem Unterraum, d.h. Top_* ist gegeben durch:

[9] Weitere Details zu Homotopiegruppen und ihren Eigenschaften finden Sie im Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie I
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie1_ws1314/lecture_notes.pdf

– Objekte: Die Klasse $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}_*)$ besteht aus allen Paaren (X, x_0), wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ist (sogenannten *punktierten topologischen Räumen*).
– Morphismen: Sind $(X, x_0), (Y, y_0)$ punktierte topologische Räume, so ist

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_*}\big((X, x_0), (Y, y_0)\big) &:= \mathrm{map}_*\big((X, x_0), (Y, y_0)\big) \\ &:= \big\{f \in \mathrm{map}(X, Y) \;\big|\; f(x_0) = y_0\big\}\end{aligned}$$

(solche stetigen Abbildungen nennt man *punktierte stetige Abbildungen*).
– Die Verknüpfungen sind durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog definiert man auch die *Homotopiekategorie* $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ *der punktierten topologischen Räume* als Kategorie der punktierten topologischen Räume zusammen mit punktierten Homotopieklassen punktierter stetiger Abbildungen als Morphismen und den entsprechenden Homotopieklassenfunktor $\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$.

Die Homotopiegruppen beschreiben punktierte topologische Räume vom Blickwinkel der Sphären aus:

Definition 3.69 (Homotopiegruppen als mengenwertige Funktoren)**.** Zu $n \in \mathbb{N}$ sei (analog zu Beispiel 1.33)

$$\pi_n := \big[(S^n, e_1^{n+1}),\ \cdot\ \big]_* \colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set},$$

wobei $[\ \cdot\ ,\ \cdot\ ]_* := \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}}(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ für die Menge der punktierten Homotopieklassen punktierter stetiger Abbildungen steht.

Nach Konstruktion sind die Funktoren $\pi_n \colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}$ homotopieinvariant in dem Sinne, dass sie über den Homotopieklassenfunktor $\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$ faktorisieren. Mithilfe der Abbildung $c_{S^n} \colon S^n \longrightarrow S^n \vee S^n$ (Lemma 2.21) kann man eine Gruppenstruktur auf Homotopiegruppen definieren:

Satz 3.70 (Gruppenstruktur auf Homotopiegruppen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann faktorisiert $\pi_n \colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}$ über den Vergissfunktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Set}$; ist (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum, so definiert*

$$\begin{aligned}\pi_n(X, x_0) \times \pi_n(X, x_0) &\longrightarrow \pi_n(X, x_0) \\ \big([f]_*, [g]_*\big) &\longmapsto \big[(f \vee g) \circ c_{S^n}\big]_*\end{aligned}$$

eine Gruppenstruktur auf $\pi_n(X, x_0)$ und diese Gruppenstruktur ist funktoriell bezüglich punktierten stetigen Abbildungen. Ist $n > 1$, so ist diese Gruppenstruktur sogar abelsch.

Definition 3.71 (Homotopiegruppen, Fundamentalgruppe)**.** Ist (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so bezeichnet man $\pi_n(X, x_0)$ als *n-te Homotopiegruppe von* (X, x_0); dabei nennt man $\pi_1(X, x_0)$ normalerweise *Fundamentalgruppe von* (X, x_0).

Die Fundamentalgruppe ist also durch punktierte Homotopieklassen von punktierten Schleifen gegeben und die Verknüpfung ist repräsentantenweise durch das Aneinanderketten von Schleifen gegeben (Abbildung (3.72)).

Wir stellen nun einige grundlegende Eigenschaften von Homotopiegruppen zusammen; die meisten dieser Ergebnisse sind jedoch *nicht* offensichtlich.

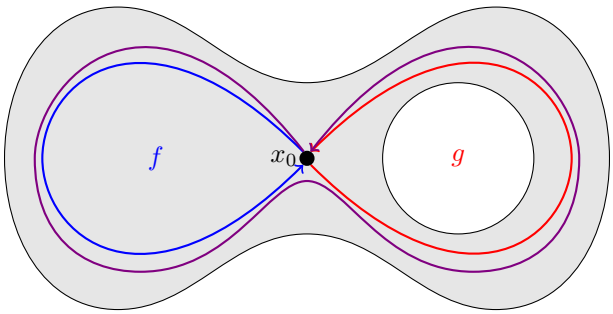


Abbildung (3.72): Die Gruppenstruktur auf π_1; die violette Schleife ist ein Repräsentant von $[f]_* \cdot [g]_*$.

Beispiel 3.73.

- Der Funktor $\pi_0 \colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}$ beschreibt die Wegzusammenhangskomponenten punktierter topologischer Räume. Auf π_0 gibt es *keine* vernünftige Gruppenstruktur.
- Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ist
$$\pi_k(S^1, e_1^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 1, \\ 0 & \text{falls } k > 1. \end{cases}$$
Im Grad 1 entspricht dabei die Gruppe $\mathbb{Z}$ (wie im Fall von $H_1(S^1;\mathbb{Z})$) dem „Herumwickeln“ von S^1 um S^1.
- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ ist
$$\pi_k(S^n, e_1^{n+1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = n, \\ 0 & \text{falls } k \in \{1, \ldots, n-1\}, \\ ?! & \text{falls } k > n. \end{cases}$$
Im allgemeinen sind die höheren Homotopiegruppen von Sphären *nicht* trivial (zum Beispiel ist $\pi_3(S^2, e_1^3) \cong \mathbb{Z}$ (!)) und im allgemeinen auch *nicht* bekannt. Grundsätzlich ist es sehr schwierig, Homotopiegruppen von verklebten topologischen Räumen aus den Homotopiegruppen der Einzelteile zu berechnen.
- Es gilt
$$\pi_1\big(S^1 \vee S^1, [e_1^2]\big) \cong \begin{cases} \text{freie Gruppe vom Rang 2,} & \\ \text{erzeugt von den beiden } S^1\text{-Summanden} & \text{falls } k = 1, \\ 0 & \text{falls } k > 1 \end{cases}$$
für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Insbesondere ist die Fundamentalgruppe von $(S^1 \vee S^1, [e_1^2])$ *nicht* abelsch.

– Homotopiegruppen sind mit Produkten verträglich. Insbesondere gilt

$$\pi_k\big(S^1 \times S^1, (e_1^2, e_1^2)\big) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{falls } k = 1, \\ 0 & \text{falls } k > 1 \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dabei ist eine Basis der Fundamentalgruppe durch die Inklusion der beiden S^1-Faktoren in $S^1 \times S^1$ gegeben.

Um Homotopiegruppen und singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten zu vergleichen verwenden wir den Hurewicz-Homomorphismus aus Bemerkung 2.23. Wir geben nun eine konkrete Beschreibung des Hurewicz-Homomorphismus in singulärer Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten:

Definition 3.74 (Hurewicz-Homomorphismus in singulärer Homologie)**.** Sei $k \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist der *Hurewicz-Homomorphismus*

$$h_{\,\cdot\,,k} \colon \pi_k \Longrightarrow H_k(\,\cdot\,;\mathbb{Z}) \circ P$$

(wobei $P \colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der den Basispunkt durch den leeren Unterraum ersetzt) *im Grad k* gegeben durch: Für jeden punktierten topologischen Raum (X, x_0) sei

$$\begin{aligned} h_{(X,x_0),k} \colon \pi_k(X, x_0) &\longrightarrow H_k(X;\mathbb{Z}) \\ [f]_* &\longmapsto H_k(f;\mathbb{Z})\big([S^k]\big); \end{aligned}$$

dabei ist $[S^k] \in H_k(S^k;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ der Erzeuger, der dem Element $[\partial_{k+1}\,\mathrm{id}_{\Delta^{k+1}}] \in H_k(\partial\Delta^k;\mathbb{Z})$ entspricht (Beispiel 3.43).

Beispiel 3.75.
- Im Grad 1 ist der Hurewicz-Homomorphismus im allgemeinen *kein* Isomorphismus, denn $H_1(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ ist abelsch, aber $\pi_1(\,\cdot\,)$ ist im allgemeinen *nicht* abelsch.
- Auch in höheren Graden ist der Hurewicz-Homomorphismus im allgemeinen *kein* Isomorphismus.

Der Satz von Hurewicz besagt jedoch, dass der Hurewicz-Homomorphismus für gewisse topologische Räume für gewisse Grade ein Isomorphismus ist. Bevor wir den Satz formulieren, führen wir zwei Begriffe ein – höhere Zusammenhangsbegriffe und die Abelianisierung von Gruppen:

Definition 3.76 (höhere Zusammenhangsbegriffe)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Ein punktierter topologischer Raum (X, x_0) heißt *n-zusammenhängend*, falls

$$\forall_{k \in \{0,\ldots,n\}} \quad \pi_k(X, x_0) \cong 0$$

ist.

Beispiel 3.77.
- Wegzusammenhang punktierter topologischer Räume entspricht 0-Zusammenhang.

– Einfach zusammenhängend entspricht 1-zusammenhängend.
– Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist (S^n, e_1^{n+1}) ein punktierter topologischer Raum, der $(n-1)$-zusammenhängend, aber nicht n-zusammenhängend ist.

Proposition und Definition 3.78 (Abelianisierung)**.**

1. *Sei G eine Gruppe. Die* Kommutatoruntergruppe $[G,G]$ *von G ist die von*

$$\{g \cdot h \cdot g^{-1} \cdot h^{-1} \mid g, h \in G\} \subset G$$

erzeugte Untergruppe von G. Die Kommutatoruntergruppe $[G,G]$ von G ist ein Normalteiler und die Quotientengruppe

$$G_{\mathrm{ab}} := G/[G,G]$$

ist abelsch. Die Gruppe G_{ab} heißt Abelianisierung[10] von G.

2. *Ist $f\colon G \longrightarrow H$ ein Gruppenhomomorphismus, so ist*

$$\begin{aligned} f_{\mathrm{ab}}\colon G_{\mathrm{ab}} &\longrightarrow H_{\mathrm{ab}} \\ [g] &\longmapsto \big[f(g)\big] \end{aligned}$$

ein wohldefinierter Gruppenhomomorphismus. Dadurch wird

$$\cdot_{\mathrm{ab}}\colon \mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

zu einem Funktor.

Beweisskizze. All diese Eigenschaften folgen durch einfache Rechnungen aus den Definitionen. □

Außerdem besitzt die Abelianisierung eine alternative Charakterisierung über eine universelle Eigenschaft:

Proposition 3.79 (alternative Charakterisierung der Abelianisierung)**.** *Sei G eine Gruppe.*

1. *Dann ist $[G,G] \subset G$ der bezüglich Inklusion kleinste Normalteiler N mit der Eigenschaft, dass der Quotient G/N abelsch ist.*
2. *Die kanonische Projektion $\pi\colon G \longrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ besitzt die folgende universelle Eigenschaft: Die Gruppe G_{ab} ist abelsch und für alle abelschen Gruppen A und alle Gruppenhomomorphismen $f\colon G \longrightarrow A$ gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{f}\colon G_{\mathrm{ab}} \longrightarrow A$ mit*

$$\overline{f} \circ \pi = f.$$

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\ f\ } & A \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & \nearrow_{\overline{f}} & \\ G_{\mathrm{ab}} & & \end{array}$$

Dadurch ist die Abelianisierung $\pi\colon G \longrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ bis auf kanonischen Isomorphismus eindeutig bestimmt.

[10] Oder „Abelisierung“ oder „Abelung“ (und entsprechend „abeln“) ...

Beweisskizze. Auch dies lässt sich mit einfachen Rechnungen anhand der Definitionen nachvollziehen. □

Beispiel 3.80.

- Ist G eine abelsche Gruppe, so ist die kanonische Projektion $G \longrightarrow G_{\mathrm{ab}}$ ein Isomorphismus.
- Sei X eine Menge und sei $F_{\mathsf{Group}}(X)$ die *freie von X erzeugte Gruppe*, d.h. $F_{\mathsf{Group}}(X)$ erfüllt zusammen mit der Inklusion $i\colon X \hookrightarrow F_{\mathsf{Group}}(X)$ die folgende universelle Eigenschaft: Ist G eine Gruppe und $f\colon X \longrightarrow G$ eine Abbildung von Mengen, so gibt es genau einen Gruppenhomomorphismus $\overline{f}\colon F_{\mathsf{Group}}(X) \longrightarrow G$ mit
$$\overline{f} \circ i = f.$$
Dann ist $F_{\mathsf{Group}}(X)_{\mathrm{ab}}$ eine freie abelsche Gruppe mit dem Bild von X unter der kanonischen Projektion als Basis.
- Ist $n \in \mathbb{N}_{>1}$, so induziert die Signumsabbildung $S^n \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ einen Isomorphismus $(S_n)_{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}/2$.

Nun können wir den Satz von Hurewicz formulieren:

Satz 3.81 (Satz von Hurewicz)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei (X, x_0) ein $(n-1)$-zusammenhängender punktierter topologischer Raum.*

1. *Ist $n = 1$, so induziert $h_{(X,x_0),1}\colon \pi_1(X, x_0) \longrightarrow H_1(X;\mathbb{Z})$ einen natürlichen Isomorphismus*
$$\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}} \cong_{\mathsf{Ab}} H_1(X;\mathbb{Z}).$$
2. *Ist $n > 1$, so ist*
$$H_k(X;\mathbb{Z}) \cong 0 \cong \pi_k(X, x_0)$$
für alle $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ und $h_{(X,x_0),n}\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$ ist ein natürlicher Isomorphismus abelscher Gruppen.

Beweisskizze. Als ersten Schritt ersetzen wir den singulären Kettenkomplex $C(X)$ durch einen Unterkomplex, in dem nur spezielle singuläre Simplizes erlaubt sind: Zu $k \in \mathbb{N}$ sei

$$S_k := \left\{\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^k, X) \;\middle|\; \text{für alle Seiten } \Delta \subset \Delta^k \text{ der Dimension} \leq n-1 \text{ ist } \sigma|_\Delta = x_0\right\}.$$

Sei $C^{x_0,n}(X) \subset C(X)$ der Unterkettenkomplex, der für $k \in \mathbb{N}$ im Grad k von S_k (statt $\mathrm{map}(\Delta^k, X)$) erzeugt wird. Insbesondere kann man die Elemente von S_n wegen $\Delta^n/\partial\Delta^n \cong S^n$ auch als stetige Abbildungen $(S^n, e_1^{n+1}) \longrightarrow (X, x_0)$ auffassen. Dies macht bereits den Zusammenhang mit den Homotopiegruppen von (X, x_0) deutlich.

Da (X, x_0) ein $(n-1)$-zusammenhängender Raum ist, können wir induktiv kompatible Homotopien wie in Lemma 3.82 konstruieren.

Lemma 3.82 (induktive Homotopien)**.** *Sei X ein topologischer Raum. Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $S_k \subset \mathrm{map}(\Delta^k, X)$ eine Teilmenge; dabei gelte $\sigma \circ i_{k,j} \in S_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $\sigma \in S_k$ und alle $j \in \{0, \ldots, k\}$. Außerdem gebe es eine Familie $(h_\sigma\colon \Delta^k \times [0,1] \longrightarrow X)_{k\in\mathbb{N},\sigma\in\mathrm{map}(\Delta^k,X)}$ stetiger Abbildungen mit folgenden Eigenschaften:*

– *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und jedes $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ ist h_σ eine Homotopie von σ zu einem singulären Simplex in S_k.*
– *Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$, alle $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^k, X)$ und alle $j \in \{0, \dots, k\}$ gilt*

$$h_{\sigma \circ i_{k,j}} = h_\sigma \circ (i_{k,j} \times \mathrm{id}_{[0,1]}).$$

– *Für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $\sigma \in S_k$ ist*

$$h_\sigma = \big((x,t) \mapsto \sigma(x)\big).$$

Sei $C^S(X) \subset C(X)$ der Unterkettenkomplex abelscher Gruppen, der in jedem Grad $k \in \mathbb{N}$ von S_k statt von $\operatorname{map}(\Delta^k, X)$ erzeugt wird.

Dann ist die Inklusion $C^S(X) \hookrightarrow C(X)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ und induziert somit einen Isomorphismus $H_*\big(C^S(X)\big) \longrightarrow H_*(X)$.

Beweisskizze von Lemma 3.82. Dies folgt ähnlich wie im Beweis der Homotopieinvarianz (Satz 3.21) von singulärer Homologie durch Zerlegung von Prismen. □

Wir fahren nun mit dem Beweis von Satz 3.81 fort. Aus dem Lemma folgt, dass die Inklusion

$$C^{x_0,n}(X) \hookrightarrow C(X)$$

eine Kettenhomotopieäquivalenz ist.

Nach Konstruktion stimmt $C^{x_0,n}(X)$ bis zum Grad $n-1$ mit $C(\{x_0\})$ überein und auch die Mengen der Ränder im Grad $n-1$ stimmen überein. Also gilt für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$H_k(X;\mathbb{Z}) \cong H_k\big(C^{x_0,n}(X)\big) = H_k\big(\{x_0\};\mathbb{Z}\big) \cong 0.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, dass

$$h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}} \colon \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}} \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$$

ein Isomorphismus ist: Dazu konstruieren wir zunächst einen „inversen“ Homomorphismus $\overline{\varphi} \colon H_n(C^{x_0,n}(X)) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$: Sei

$$\begin{aligned} \varphi \colon S_n &\longrightarrow \pi_n(X,x_0) \\ \sigma &\longmapsto [f_\sigma]_*, \end{aligned}$$

wobei $f_\sigma \colon (S^n, e_1^{n+1}) \longrightarrow (X, x_0)$ unter der kanonischen Identifikation $S^n \cong_{\mathsf{Top}} \partial\Delta^{n+1}$ der Abbildung entspricht, die auf der 0-ten Seite σ ist, und sonst überall konstant x_0 ist (dies ist möglich, da $\sigma \in S_n$ auf $\partial\Delta^n$ konstant x_0 ist). Daraus erhalten wir einen Homomorphismus

$$\widetilde{\varphi} \colon C^{x_0,n}(X) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Mithilfe der Definition der Verknüpfung auf $\pi_n(X,x_0)$ sieht man, dass (in $\pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$)

$$\sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j \cdot [f_{\sigma \circ i_{n+1,j}}]_{*,\mathrm{ab}} = 0$$

für alle $\sigma \in S_{n+1}$ gilt. Also induziert $\widetilde{\varphi}$ einen Homomorphismus

$$\overline{\varphi}\colon H_n\big(C^{x_0,n}(X)\big) \longrightarrow \pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}.$$

Man beachte dabei, dass nach Konstrukion

$$h_{(X,x_0),n}([f_\sigma]_*) = \big[\sigma + (1+(-1)^n)\cdot \mathrm{const}_{x_0}\big]$$

in $H_n(X;\mathbb{Z})$ für alle $\sigma \in S_n$ gilt.

Wir kommen nun zum Beweis, dass $h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}}$ ein Isomorphismus ist:

- *Surjektivität.* Sei $\alpha \in H_n(X;\mathbb{Z})$. Dann gibt es einen Zykel $c \in C^{x_0,n}(X)$, der α repräsentiert. Also erhalten wir

  $$h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}}\big(\overline{\varphi}(c)\big) = \alpha + \text{etwas in } H_n(\{x_0\};\mathbb{Z}) = \alpha$$

  in $H_n(X;\mathbb{Z})$.
- *Injektivität.* Sei $\gamma = [f]_{*,\mathrm{ab}} \in \ker h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}} \subset \pi_n(X,x_0)$. Dann gibt es ein $\sigma \in S_n$ mit

  $$f \simeq_* f_\sigma.$$

  Dann ist (in $H_n(X;\mathbb{Z})$)

  $$0 = h_{(X,x_0),n,\mathrm{ab}}(\gamma) = h_{(X,x_0),n}([f_\sigma]_*) = \big[\sigma + (1+(-1)^n)\cdot \mathrm{const}_{x_0}\big].$$

  Da $C^{x_0,n}(X) \hookrightarrow C(X)$ eine Kettenhomotopieäquivalenz ist und der Zykel $\sigma + (1+(-1)^n)\cdot \mathrm{const}_{x_0}$ in $C^{x_0,n}(X)$ liegt, folgt

  $$\big[\sigma + (1+(-1)^n)\cdot \mathrm{const}_{x_0}\big] = 0$$

  in $H_n(C^{x_0,n}(X))$. Anwenden von $\overline{\varphi}$ liefert dann

  $$\begin{aligned} 0 &= \overline{\varphi}\big(\big[\sigma + (1+(-1)^n)\cdot \mathrm{const}_{x_0}\big]\big) \\ &= \widetilde{\varphi}(\sigma) + (1+(-1)^n)\cdot \widetilde{\varphi}(\mathrm{const}_{x_0}) \\ &= [f_\sigma]_{*,\mathrm{ab}} + (1+(-1)^n)\cdot [\mathrm{const}_{x_0}]_{*,\mathrm{ab}} \\ &= \gamma + 0 \end{aligned}$$

  in $\pi_n(X,x_0)_{\mathrm{ab}}$

Dies vervollständigt den Beweis des Satzes von Hurewicz. □

Korollar 3.83 (Homotopiegruppen aus Homologiegruppen)**.** *Sei (X,x_0) ein einfach zusammenhängender punktierter Raum und sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ mit*

$$\forall_{k\in\{1,\ldots,n-1\}} \quad H_k(X;\mathbb{Z}) \cong 0.$$

Dann ist (X,x_0) bereits $(n-1)$-zusammenhängend und der Hurewicz-Homomorphismus

$$h_{(X,x_0),n}\colon \pi_n(X,x_0) \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$$

ist ein Isomorphismus.

Beweis. Sei

$$N := \min\{k \in \mathbb{N} \mid \pi_k(X, x_0) \ncong 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Da X einfach zusammenhängend ist, ist $N > 1$. Mit dem Satz von Hurewicz folgt $N \geq n$ und eine nochmalige Anwendung des Satzes von Hurewicz liefert die Behauptung. □

Bemerkung 3.84 (Homotopiegruppen von (Wedges von) Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

- Hat man bereits gezeigt, dass (S^n, e_1^{n+1}) einfach zusammenhängend ist (z.B. mit dem Satz von Seifert und van Kampen, s. Algebraische Topologie I), so folgt mit der Berechnung von $H_*(S^n; \mathbb{Z})$ und dem obigen Korollar, dass

$$\pi_k(S^n, e_1^{n+1}) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k \in \{1, \dots, n-1\} \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = n \end{cases}$$

  gilt.
- Ist I eine Menge, so kann man analog auch die Homotopiegruppen $\pi_k(\bigvee_I S^n)$ für $k \in \{1, \dots, n\}$ bestimmen.

Man kann den Satz von Hurewicz auch für relative Homotopiegruppen und $H_*(\,\cdot\,; \mathbb{Z})$ von (punktierten) Raumpaaren beweisen (z.B., indem man ihn mit geeigneten Kegel- und Zylinderkonstruktionen aus der absoluten Version herleitet). Dies liefert unter anderem auch die folgende Variante:

Satz 3.85 (Satz von Hurewicz für Abbildungen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und sei $f\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ eine punktierte stetige Abbildung einfach zusammenhängender punktierter Räume. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ist $\pi_k(f)\colon \pi_k(X, x_0) \longrightarrow \pi_k(Y, y_0)$ bijektiv und $\pi_n(f)\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, y_0)$ ist surjektiv.*
2. *Für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ ist $H_k(f; \mathbb{Z})\colon H_k(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(Y; \mathbb{Z})$ bijektiv und $H_n(f; \mathbb{Z})\colon H_n(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y; \mathbb{Z})$ ist surjektiv.*

Caveat 3.86. Die Voraussetzung, dass die beteiligten Räume einfach zusammenhängend sind, ist in diesen Versionen des Satzes von Hurewicz essentiell! Es gibt auch Versionen für Räume, die nicht einfach zusammenhängend sind; dann muss jedoch die Operation der Fundamentalgruppe und die Homologie der universellen Überlagerung miteinbezogen werden.

Bemerkung 3.87 (Darstellungssätze von Brown)**.** Es gibt noch einen weiteren wichtigen Zusammenhang zwischen Homologietheorien und Homotopiegruppen: die Darstellungssätze von Brown. Auf diese werden wir im Kontext von Kohomologie kurz eingehen.

4. Zelluläre Homologie

Da der singuläre Kettenkomplex sehr „groß“ ist, ist es im allgemeinen schwierig, konkret damit zu rechnen. Wir suchen daher geeignete „kleinere“ Kettenkomplexe zur Berechnung singulärer Homologie. Klassische Beispiele dafür sind:

- simpliziale Homologie für simpliziale Komplexe; mit simplizialen Komplexen lässt sich gut maschinell rechnen, aber simpliziale Komplexe sind manchmal nicht flexibel genug, um bequem damit zu arbeiten.[11]
- zelluläre Homologie für CW-Komplexe; dies ist eine etwas flexiblere Variante, die für Modellierung und Berechnung gut geeignet sind.

Wir werden in diesem Kapitel die folgenden Aspekte behandeln:

- CW-Komplexe
- zellulärer Kettenkomplex und zelluläre Homologie
- Vergleich von zellulärer Homologie und singulärer Homologie
- Euler-Charakteristik und ihre Anwendungen

4.1. CW-Komplexe

Wir beginnen mit einer kurzen Einführung in CW-Komplexe. Bei CW-Komplexen handelt es sich um topologische Räume, die induktiv aus einfachen, flexiblen Bausteinen, sogenannten Zellen, zusammengesetzt sind:

Definition 4.1 ((relativer) CW-Komplex)**.**

- Sei (X, A) ein Raumpaar. Eine *relative CW-Struktur auf* (X, A) ist eine Folge

$$A =: X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X$$

von Unterräumen mit den folgenden Eigenschaften:

- Es ist $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$.
- Die Topologie auf X stimmt mit der Kolimestopologie des Systems $A = X_{-1} \subset X_0 \subset X_1 \subset \dots$ überein (d.h. eine Teilmenge $U \subset X$ ist genau dann offen, wenn für alle $n \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ gilt, dass $U \cap X_n$ in X_n offen ist).
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ entsteht X_n aus X_{n-1} durch Ankleben von n-dimensionalen Zellen, d.h. es existiert eine Menge I_n und ein Pushout der Form

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{I_n} S^{n-1} & \longrightarrow & X_{n-1} \\ \text{Inklusion}\downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{I_n} D^n & \longrightarrow & X_n \end{array}$$

in Top; wir verwenden dabei die Konvention $S^{-1} := \emptyset$. Man nennt X_n auch das *n-Skelett von X*. (Die Anzahl $|I_n|$ ist die Anzahl der Wegzusammenhangskomponenten von $X_n \setminus X_{n-1}$, aber die Wahl der Pushouts ist *nicht* Teil der Struktur.)

[11] s. Seminar „Topologie vs. Kombinatorik“ im WS 2013/14

– Ein *relativer CW-Komplex* ist ein Raumpaar (X, A) zusammen mit einer relativen CW-Struktur auf (X, A). Ist $A = \emptyset$, so spricht man auch von einem *CW-Komplex*.
– Ist (X, A) ein relativer CW-Komplex und ist $n \in \mathbb{N}$, so sind die Wegzusammenhangskomponenten von $X_n \setminus X_{n-1}$ homöomorph zu $D^{n\circ}$ und werden *offene n-Zellen von* (X, A) genannt.
– Ist (X, A) ein relativer CW-Komplex, so ist die *Dimension von* (X, A) definiert durch

$$\dim(X, A) := \min\{n \in \mathbb{N} \mid \forall_{m \in \mathbb{N}_{\geq n}} \quad X_m = X_n\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

– Ein (relativer) CW-Komplex ist *endlich*, wenn er aus nur endlich viele Zellen besteht. Ein (relativer) CW-Komplex ist *von endlichem Typ*, wenn er in jeder Dimension nur endlich viele Zellen hat.

Caveat 4.2 (Existenz und Eindeutigkeit von CW-Strukturen?!)**.**
– *Nicht* jeder topologische Raum ist zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent! (Beispiel 4.70)
– In der Notation erwähnt man im Normalfall die gewählte CW-Struktur eines (relativen) CW-Komplexes nicht explizit. Da es jedoch im allgemeinen viele mögliche CW-Strukturen auf einem Raumpaar geben kann, kann dies zu Missverständnissen führen. Die Tatsache, dass auf Raumpaaren verschiedene CW-Strukturen existieren können, ist jedoch wichtig – man kann daher für jedes Problem versuchen, eine entsprechende, passende CW-Struktur auszuwählen (z.B. eine mit möglichst wenigen Zellen oder eine, die „symmetrisch“ ist ...).

Wir beginnen mit dem Modellfall des grundlegenden Bausteins von CW-Komplexen:

Beispiel 4.3 (CW-Struktur auf (D^n, S^{n-1}))**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist durch

$$X_{n-1} := X_{n-2} := \cdots := X_{-1} := S^{n-1}$$
$$\forall_{k \in \mathbb{N}_{\geq n}} \quad X_k := D^n$$

eine relative CW-Struktur auf (D^n, S^{n-1}) definiert. Ein Pushout für den Übergang vom $(n-1)$-Skelett zum n-Skelett ist zum Beispiel (wobei die vertikalen Abbildungen die Inklusionen sind)

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\mathrm{id}_{S^{n-1}}} & X_{n-1} = S^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \xrightarrow[\mathrm{id}_{D^n}]{} & X_n = D^n. \end{array}$$

Beispiel 4.4 (CW-Strukturen)**.** Beispiele für CW-Strukturen auf dem Kreis, der zweidimensionalen Sphäre, auf dem zweidimensionalen Torus und auf $\mathbb{R}P^2$ sind in Abbildung (4.5) skizziert.

Als nächsten Schritt führen wir einen geeigneten Morphismenbegriff für CW-Komplexe ein:

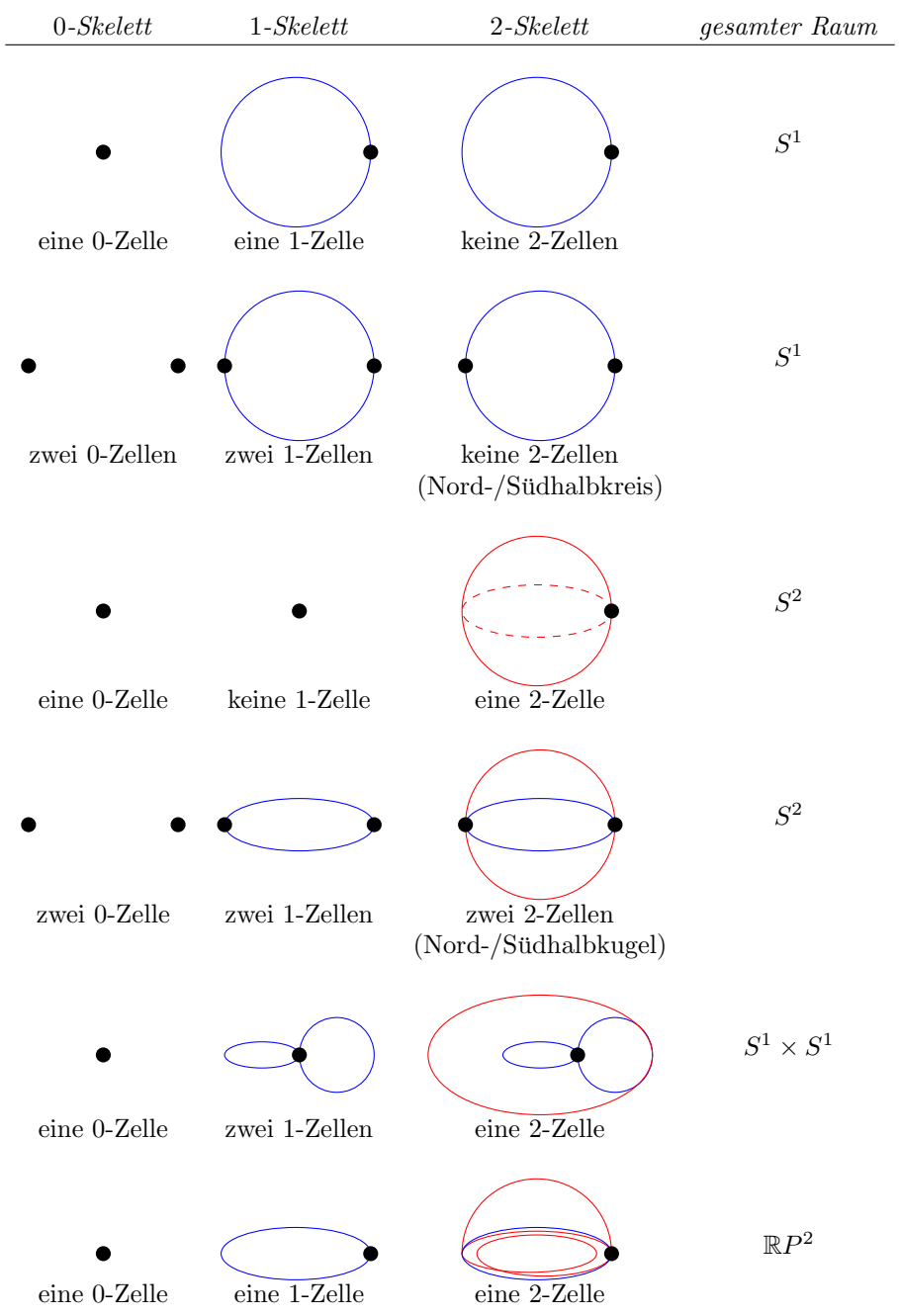


Abbildung (4.5): Beispiele für CW-Strukturen

Abbildung (4.10): Eine CW-Struktur auf $[0,1]$

Definition 4.6 (zelluläre Abbildung)**.** Seien (X,A) und (Y,B) relative CW-Komplexe. Eine *zelluläre Abbildung* $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ ist eine stetige Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ mit

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} \quad f(X_n) \subset Y_n$$

(wobei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ bzw. $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ die relativen CW-Strukturen auf (X,A) bzw. (Y,B) sind).

Beispiel 4.7. Wir betrachten S^1 mit den ersten beiden CW-Strukturen aus Abbildung (4.5).

- Dann ist die Spiegelung $S^1 \longrightarrow S^1$ an der horizontalen Koordinatenachse eine zelluläre Abbildung, sowohl bezüglich der ersten CW-Struktur als auch bezüglich der zweiten CW-Struktur.
- Die Spiegelung $S^1 \longrightarrow S^1$ an der vertikalen Koordinatenachse ist bezüglich der ersten CW-Struktur *keine* zelluläre Abbildung (aber bezüglich der zweiten).

Dies liefert Kategorien von CW-Komplexen:

Definition 4.8 (Kategorien von CW-Komplexen)**.**

- Sei CW die Kategorie, die wie folgt gegeben ist:
  - Objekte: Die Klasse der Objekte ist die Klasse aller CW-Komplexe.
  - Morphismen: Die Morphismenmenge zwischen je zwei CW-Komplexen ist die Menge der zellulären Abbildungen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.
- Sei CW^2 die Kategorie, die wie folgt gegeben ist:
  - Objekte: Die Klasse der Objekte ist die Klasse aller relativen CW-Komplexe.
  - Morphismen: Die Morphismenmenge zwischen je zwei relativen CW-Komplexen ist die Menge der zellulären Abbildungen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Außerdem möchten wir einen zellulären Homotopiebegriff einführen. Dazu geben wir zunächst ein zelluläres Modell des Intervalls bzw. von Zylindern:

Beispiel 4.9 (CW-Struktur auf dem Einheitsintervall)**.** Im folgenden betrachten wir die CW-Struktur

$$\emptyset \subset \{0,1\} \subset [0,1] \subset [0,1] \subset \cdots \subset [0,1]$$

auf $[0,1]$ (Abbildung (4.10)).

Proposition 4.11 (CW-Struktur auf dem Zylinder)**.** *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Dann ist $(X'_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ mit*

$$\begin{aligned} X'_{-1} &:= A \times [0,1] \\ \forall_{n\in\mathbb{N}} \quad X'_n &:= \big(X_n \times \{0,1\}\big) \cup \big(X_{n-1} \times [0,1]\big) \end{aligned}$$

eine relative CW-Struktur auf $(X \times [0,1], A \times [0,1])$.

Beweisskizze. Wählt man Pushouts für die relative CW-Struktur auf (X, A), so kann man explizit entsprechende Pushouts für $(X \times [0,1], X \times [0,1])$ konstruieren. □

Caveat 4.12. Sind X und Y CW-Komplexe, so ist $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ mit $Z_{-1} := \emptyset$ und

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad Z_n := \bigcup_{k\in\{0,\dots,n\}} X_k \times Y_{n-k}$$

im allgemeinen *keine* CW-Struktur auf $X \times Y$.

Die CW-Struktur aus Proposition 4.11 gibt uns eine Möglichkeit, zelluläre Homotopie zu definieren:

Definition 4.13 (zellulär homotop)**.** Seien (X, A) und (Y, B) relative CW-Komplexe und seien $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ zelluläre Abbildungen. Wir nennen f und g *zellulär homotop*, wenn es eine zelluläre Abbildung $h\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ mit

$$h \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad h \circ i_1 = g$$

gibt. Dabei betrachten wir die relative CW-Struktur aus Proposition 4.11 auf dem Zylinder $(X \times [0,1], A \times [0,1])$ und $i_0, i_1\colon (X, A) \longrightarrow (X \times [0,1], A \times [0,1])$ bezeichnen die Inklusion von „Boden“ bzw. „Deckel“ des Zylinders.

Man kann leicht nachprüfen, dass dieser Homotopiebegriff die üblichen Vererbungseigenschaften erfüllt. Insbesondere erhalten wir so entsprechende Homotopiekategorien von CW-Komplexen:

Definition 4.14 (Homotopiekategorien von CW-Komplexen)**.**

- Die Kategorie CW_h ist wie folgt gegeben:
  - Objekte: Die Objekte von CW_h sind alle CW-Komplexe.
  - Morphismen: Morphismen zwischen CW-Komplexen sind zelluläre Homotopieklassen von zellulären Abbildungen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch repräsentantenweise Abbildungskomposition gegeben.
- Die Kategorie CW_h ist wie folgt gegeben:
  - Objekte: Die Objekte von CW^2_h sind alle relativen CW-Komplexe.
  - Morphismen: Morphismen zwischen relativen CW-Komplexen sind zelluläre Homotopieklassen von zellulären Abbildungen von relativen CW-Komplexen.
  - Verknüpfungen: Die Verknüpfungen sind durch repräsentantenweise Abbildungskomposition gegeben.

Diese Homotopiekategorien besitzen auch alternative Beschreibungen, wie wir in Abschnitt 4.5 sehen werden.

4.2. Zelluläre Homologie

Wir wollen nun die zelluläre Struktur von CW-Komplexen nutzen, um Homologie geeignet berechnen zu können. Dazu führen wir zelluläre Homologie ein und vergleichen diese dann mit (gewöhnlichen) Homologietheorien.

Setup 4.15. Im folgenden sei R ein Ring und sei $h := \big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Wir geben zunächst die abstrakte Definition des zellulären Kettenkomplexes zu h an und erklären dann, wie man ihn (im Fall einer gewöhnlichen Homologietheorie) bequem von der zellulären Struktur ablesen kann.

Proposition und Definition 4.16 (zellulärer Kettenkomplex)**.** *Der Funktor*

$$C^h\colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$$

ist wie folgt definiert:

1. *Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit relativer CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei*
$$C_n^h(X, A) := h_n(X_n, X_{n-1})$$
und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $C_n^h(X, A) := 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir $\partial_n^{h,(X,A)}$ durch
$$\begin{array}{ccccc} C_n^h(X,A) & = & h_n(X_n, X_{n-1}) & \xrightarrow{\partial_n^{(X_n,X_{n-1})}} & \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_n^{h,(X,A)}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \partial_n^{(X_n,X_{n-1},X_{n-2})}} & & h_{n-1}(X_{n-1}) \\ C_{n-1}^h(X,A) & = & h_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2}) & \xrightarrow{h_{n-1}(\text{Inklusion})} & \end{array}$$
Dann ist $C^h(X, A) := \big((C_n^h(X, A))_{n\in\mathbb{Z}}, (\partial_n^{h,(X,A)})_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ ein Kettenkomplex in ${}_R\mathsf{Ch}$, der zelluläre Kettenkomplex von (X, A) bezüglich h.
2. *Ist $f\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ eine zelluläre Abbildung relativer CW-Komplexe, so definieren wir für alle $n \in \mathbb{N}$*
$$C_n^h(f) := h_n(f|_{X_n})\colon C_n^h(X, A) = h_n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow h_n(Y_n, Y_{n-1}) = C_n^h(Y, B)$$
und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ definieren wir $C_n^h(f) := 0$. Dann ist $C^h(f) := \big(C_n^h(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C^h(X, A) \longrightarrow C^h(Y, B)$.

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist

$$\partial_n^{h,(X,A)} \circ \partial_{n+1}^{h,(X,A)} = 0,$$

denn in dieser Komposition treten nach Definition zwei aufeinanderfolgende Terme der langen exakten Paarsequenz von (X_n, X_{n-1}) auf.

Der zweite Teil folgt aus der Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus der langen exakten Tripelsequenz (Proposition 2.8), welche eine Konsequenz der Funktorialität von h und der Natürlichkeit der Verbindungshomomorphismen $(\partial_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist.

Dass C^h tatsächlich einen Funktor definiert, kann man leicht anhand der Definition nachvollziehen. □

Definition 4.17 (zelluläre Homologie)**.** Wir definieren *zelluläre Homologie bezüglich h* als den Funktor

$$H_*^h := H_* \circ C^h \colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$

Bemerkung 4.18 (zelluläre Homotopieinvarianz)**.** Da h_n für alle $n \in \mathbb{Z}$ homotopieinvariant ist, ist der Funktor H_*^h in dem Sinne zellulär homotopieinvariant, dass er über den Homotopieklassenfunktor $\mathsf{CW}^2 \longrightarrow \mathsf{CW}^2_\mathsf{h}$ faktorisiert.

Die Definition des zellulären Kettenkomplexes mag zunächst kompliziert erscheinen; tatsächlich lässt er sich aber aus der CW-Struktur einfach explizit berechnen:

Beispiel 4.19 (zelluläre Homologie des Einheitsintervalls)**.** Wir betrachten die CW-Struktur auf $[0,1]$ aus Beispiel 4.9:

$$\emptyset \subset \{0,1\} \subset [0,1] = [0,1] = \cdots\,.$$

Sei h singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten. Mithilfe der konkreten Berechnung von $H_1([0,1],\{0,1\};\mathbb{Z}) \cong H_1(D^1,S^0;\mathbb{Z})$ (Beispiel 3.43) und der expliziten Beschreibung des Verbindungshomomorphismus in singulärer Homologie (Satz 3.20) folgt, dass $C^h([0,1)$ zum folgenden Kettenkomplex (in ${}_\mathbb{Z}\mathsf{Ch}$) isomorph ist:

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\
\cdots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \cdots \\
 & & & & & & x & \longmapsto & (-x,x) & & & & & &
\end{array}$$

Dieser Kettenkomplex ist der Komplex I aus Definition B.25.

Es folgt

$$H_k^h\big([0,1]\big) \cong \begin{cases} 0 & \text{falls } k \neq 0 \\ \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \end{cases} \cong H_k\big([0,1];\mathbb{Z}\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 4.20 (zelluläre Homologie von Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, der Einfachheit halber sei $n \geq 2$ und wir schreiben $Z := h_0(\bullet)$. Wir betrachten S^n mit der CW-Struktur

$$\emptyset \subset \{e_1^{n+1}\} = \{e_1^{n+1}\} = \cdots = \{e_1^{n+1}\} \subset S^n = S^n = \cdots\,,$$

die aus genau einer 0-Zelle und genau einer n-Zelle besteht (analog zum dritten Beispiel in Abbildung (4.5)). Mit Korollar 2.18 folgt dann, dass $C^h(S^n)$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ zum folgenden Kettenkomplex isomorph ist:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
\text{Grad} & & & n+1 & & n & & n-1 & \cdots & 1 & & 0 & & -1 & \\
\cdots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Wegen $n \geq 2$ ist bei jedem der Randoperatoren von $C^h(S^n)$ der Start- oder Zielraum trivial. D.h. $\partial_k^{h,S^n} = 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Insbesondere liefert dies

$$H_k^h(S^n) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k \in \{0, n\} \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, n\} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Falls h eine gewöhnliche Homologietheorie ist, stimmt dies mit $h(S^n)$ überein (Korollar 2.18).

Diese beiden Beispiele legen nahe, dass zelluläre Kettenmoduln im wesentlichen durch die Anzahl der Zellen in der entsprechenden Dimension bestimmt sind. Wir werden dies nun präzise formulieren:

Bemerkung 4.21 (Homologie von angeklebten Zellen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei (Y, X) ein Raumpaar, für das es ein Pushout der Form

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_I S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_I D^n & \xrightarrow[\Phi]{} & Y \end{array}$$

in Top gibt (wobei die vertikalen Abbildungen die Inklusionen sind). Falls die Homologietheorie h *nicht* additiv ist, nehmen wir hierbei zusätzlich an, dass die Menge I endlich ist.

1. a) Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist $k \in \mathbb{Z}$, so ist die folgende Komposition ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$:

$$h_k(Y,X) \xleftarrow[h_k(\Phi)]{\cong} h_K\Big(\bigsqcup_I D^n, \bigsqcup_I S^{n-1}\Big) \xleftarrow[\bigoplus_I h_k(\mathrm{Inkl})]{\cong} \bigoplus_I h_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-1}\big(S^{n-1}, \{e_1^n\}\big) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-n}(\bullet)$$

   Der erste Isomorphismus ist dabei eine Konsequenz von Ausschneidung (nach Aufdicken von X), der zweite folgt aus Ausschneidung bzw. Additivität, den dritten erhält man aus der langen exakten Tripelsequenz des Tripels $(D^n, S^{n-1}, \{e_1^n\})$, und der letzte ist ein iterierter Einhänungsisomorphismus (Korollar 2.18).

   b) Im Fall $n = 0$ ist analog

$$h_k(Y,X) \xleftarrow[h_k(\Phi)]{\cong} h_K\Big(\bigsqcup_I D^n, \bigsqcup_I S^{n-1}\Big) \xleftarrow[\bigoplus_I h_k(\mathrm{Inkl})]{\cong} \bigoplus_I h_k(D^n, S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_I h_k\big(\bullet, \emptyset\big) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-n}(\bullet)$$

   für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

2. a) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $X \neq \emptyset$. Der Standard-Homöomorphismus $D^n/S^{n-1} \cong S^n$ induziert zusammen mit dem obigen Pushout einen Homöomorphismus

$$Y/X \cong_{\mathsf{Top}} \bigvee_I S^n.$$

   Dann stimmt

$$h_k(Y,X) \xrightarrow[h_k(\text{Proj})]{} h_K(Y/X,\bullet) \xrightarrow[h_k(\text{s.o.})]{\cong} h_k\Big(\bigvee_I S^n, \{e_1^{n+1}\}\Big) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_I h_k\big(S^n,\{e_1^n\}\big) \xleftarrow{\cong} \bigoplus_I h_{k-n}(\bullet)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ mit dem obigen Isomorphismus überein.

b) Ist $n = 0$, so induzieren $D^0 \longrightarrow \{-1\} \subset S^0$ und $X \longrightarrow \{1\} \subset S^0$ eine stetige Abbildung $Y/X \longrightarrow \bigvee_I S^0$; diese ist ein Homöomorphismus, wenn $X \neq \emptyset$ ist.

Proposition 4.22 (zellulärer Kettenkomplex, explizit)**.** *Sei h eine gewöhnliche Homologietheorie und sei $Z := h_0(\bullet)$. Sei (X,A) ein relativer CW-Komplex mit CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$; ist h* keine *additive Homologietheorie, so nehmen wir zusätzlich an, dass es sich dabei um einen CW-Komplex von endlichem Typ handelt. Zu $n \in \mathbb{N}$ wählen wir ein Pushout*

$$\begin{array}{ccc} \bigsqcup_{I_n} S^{n-1} & \xrightarrow{\varphi=\bigsqcup_{i\in I_n}\varphi_i} & X_{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bigsqcup_{I_n} D^n & \xrightarrow[\Phi=\bigsqcup_{i\in I_n}\Phi_n]{} & X_n \end{array}$$

in Top *(wobei die vertikalen Abbildungen die Inklusionen sind).*

1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ liefern dann die Abbildungen aus Bemerkung 4.21 einen Isomorphismus*
$$C_n^h(X,A) \cong \bigoplus_{I_n} Z$$
und für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ ist $h_k(X_n, X_{n-1}) \cong 0$.
2. *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zu $i \in I_n$ und $j \in I_{n-1}$ sei $f_{i,j}^{(n)}$ die Komposition*
$$S^{n-1} \xrightarrow{\varphi_i} X_{n-1} \xrightarrow{\text{Proj}} X_{n-1}/X_{n-2} \longrightarrow \bigvee_{I_{n-1}} S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$$
wobei die vorletzte Abbildung wie in Bemerkung 4.21 definiert ist und die letzte Abbildung die Projektion auf den j-ten Summanden ist.

   a) *Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Dann entspricht $\partial_n^{h,(X,A)} \colon C_n^h(X,A) \longrightarrow C_{n-1}^h(X,A)$ unter den Isomorphismen aus dem ersten Teil der „Matrix“*
   $$F_n := \big((\sigma^{n-1})^{-1} \circ h_{n-1}(f_{i,j}^{(n)}) \circ \sigma^{n-1}\big)_{j\in I_{n-1}, i\in I_n} \in M_{I_{n-1}\times I_n}\big(\mathrm{Hom}_R(Z,Z)\big),$$
   wobei $\sigma^{n-1} \colon Z = h_0(\bullet) \longrightarrow h_{n-1}(S^{n-1},\{e_1^n\}) \cong h_{n-1}(S^{n-1})$ den iterierten Einhängungsisomorphismus bezeichnet (Korollar 2.18).
   Insbesondere: Ist $Z \cong_{R\mathsf{Mod}} R$, so können wir F_n als Matrix in $M_{I_{n-1}\times I_n}(R)$ auffassen und man nennt die Einträge dieser Matrix Inzidenzzahlen.

   b) *Der Randoperator $\partial_1^{h,(X,A)}$ entspricht analog der Matrix*
   $$F_1 := \big(d_{i,j}^{(1)} \cdot \mathrm{id}_Z\big)_{j\in I_0, i\in I_1}$$

wobei

$$d_{i,j}^{(1)} := \begin{cases} 0 & \text{falls } f_{i,j}^{(1)}(1) = f_{i,j}^{(1)}(-1) \\ 1 & \text{falls } f_{i,j}^{(1)}(1) = -1 \neq f_{i,j}^{(1)}(-1) \\ -1 & \text{falls } f_{i,j}^{(1)}(1) = 1 \neq f_{i,j}^{(1)}(-1) \end{cases}$$

für alle $i \in I_n$, $j \in I_{n-1}$ ist.

Beweisskizze von Proposition 4.22. Der erste Teil ist eine direkte Konsequenz von Bemerkung 4.21.

Wir beweisen nun den zweiten Teil im Fall $n \in \mathbb{N}_{>1}$ (die Beschreibung für $\partial_1^{h,(X,A)}$ kann man analog zeigen). Dazu betrachten wir das Diagramm in Abbildung (4.23); da das Diagramm kommutiert und die obere bzw. untere Zeile nach Bemerkung 4.21 mit den Isomorphismen aus dem ersten Teil übereinstimmen, folgt daraus die behauptete Beschreibung für $\partial_n^{h,(X,A)}$. □

Bemerkung 4.24 (Inzidenzzahlen)**.** Wir verwenden die Notation aus Proposition 4.22. Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Man kann zeigen, dass

$$\begin{aligned} [S^{n-1}, S^{n-1}] &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ [f] &\longmapsto \deg_{H_{n-1}(\,\cdot\,;\mathbb{Z})} f \end{aligned}$$

eine Bijektion ist. Insbesondere können wir Inzidenzzahlen immer als ganze Zahlen auffassen.

Man kann die obigen Bijektion auch formulieren und beweisen, ohne singuläre Homologie zu verwenden. Daher kann man mithilfe von Korollar 2.20 den zellulären Kettenkomplex zu einer gewöhnlichen Homologietheorie (mit Ringkoeffizienten) aus den Koeffizienten direkt konstruieren (und damit auch zelluläre Homologie), indem man die Beschreibung des zellulären Kettenkomplexes aus Proposition 4.22 verwendet. Es ist jedoch technisch etwas aufwendig, die Konstruktion so zu modifizieren, dass sie nicht von der Wahl von Pushouts, sondern nur von relativen CW-Strukturen abhängt.

Man kann den zellulären Kettenkomplex also nach Proposition 4.22 berechnen, indem man

- Pushouts in allen Dimensionen wählt,
- die Anzahl der Zellen pro Dimension bestimmt,
- und dann untersucht, wie die anheftenden Abbildungen die Zellen an die Zellen niedrigerer Dimension ankleben.

Dies ist für ein einfaches Beispiel in Abbildung (4.25) illustriert.

Beispiel 4.26 (zelluläre Homologie reell-projektiver Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Induktiv kann man zeigen, dass

$$\emptyset \subset \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^n = \cdots$$

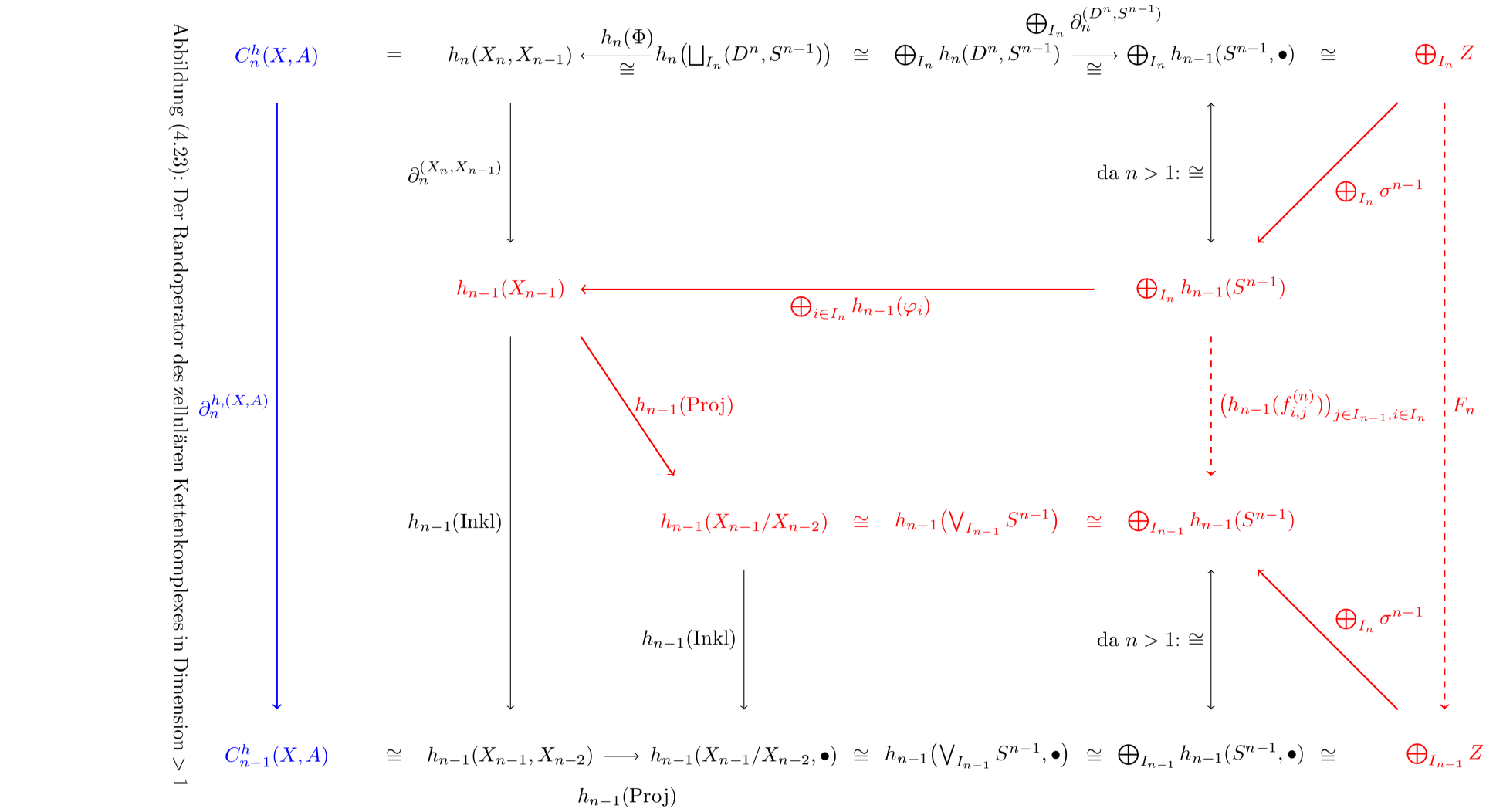


Abbildung (4.23): Der Randoperator des zellulären Kettenkomplexes in Dimension > 1

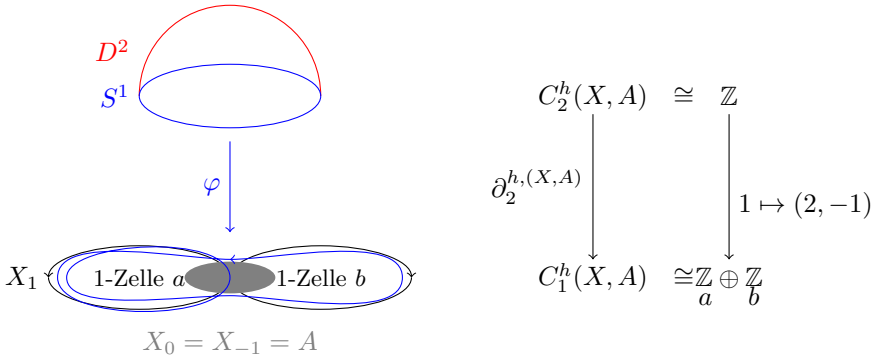


Abbildung (4.25): Der zelluläre Kettenkomplex nach Proposition (4.25); als gewöhnliche Homologietheorie h betrachten wir dabei singuläre Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.

eine CW-Struktur auf $\mathbb{R}P^n$ definiert, da

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \longrightarrow & \mathbb{R}P^{n-1} \\ \downarrow & & \downarrow \\ D^n & \longrightarrow & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

ein Pushout in Top ist; dabei sind die vertikalen Abbildungen die Inklusionen, die obere Abbildung ist die kanonische Projektion, die untere Abbildung ist die Inklusion $D^n \subset S^n$ als nördliche Hemisphäre gefolgt von der kanonischen Projektion $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$. Insbesondere hat diese CW-Struktur nur in den Dimensionen $0, \ldots, n$ Zellen und dort jeweils genau eine.

Sei h eine gewöhnliche Homologietheorie mit $h_0(\bullet) \cong_{R\mathsf{Mod}} R$. Dann ist der zelluläre Kettenkomplex $C^h(\mathbb{R}P^n)$ zu einem Kettenkomplex (in ${}_R\mathsf{Ch}$) der folgenden Form isomorph:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{n}{R} \xrightarrow{\partial_n} \underset{n-1}{R} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \longrightarrow \underset{2}{R} \xrightarrow{\partial_2} \underset{1}{R} \xrightarrow{\partial_1} \underset{0}{R} \longrightarrow \underset{-1}{0} \longrightarrow \cdots$$

Die Randoperatoren $\partial_1, \ldots, \partial_n$ können wir durch die entsprechenden Inzidenzzahlen bestimmen: Da die CW-Struktur nur genau eine 0-Zelle hat, ist $\partial_1 = 0$. Sei $k \in \{2, \ldots, n\}$. Dann ist das Diagramm in Abbildung (4.27) bis auf Homotopie kommutativ. In h_{n-1} induziert diese Abbildung somit (Lemma 2.21 und Korollar 2.20)

$$\left(1 + (-1)^k\right) \cdot \mathrm{id}_{h_{k-1}(S^{k-1})}\,.$$

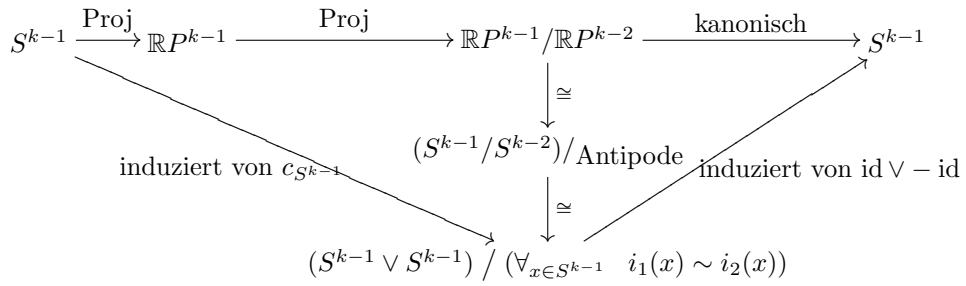


Abbildung (4.27): Bestimmung der Inzidenzzahlen für $\mathbb{R}P^n$

Nach Proposition 4.22 ist $C^h(X, A)$ somit zum folgenden Kettenkomplex isomorph:

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{n}{R} \xrightarrow{1+(-1)^n} \underset{n-1}{R} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{0} \underset{2}{R} \xrightarrow{2} \underset{1}{R} \xrightarrow{0} \underset{0}{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{-1}{0} \longrightarrow \cdots$$

Also ist

$$H_k^h(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} R & \text{falls } k = 0 \\ R/2 \cdot R & \text{falls } k \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ ungerade ist} \\ \{x \in R \mid 2 \cdot x = 0\} & \text{falls } k \in \{2, \ldots, n\} \text{ gerade ist} \\ R & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten daher zum Beispiel:

	$H_k^h(\mathbb{R}P^n)$		
R	$k \in \{1, \ldots, n-1\}$ ungerade	$k \in \{2, \ldots, n\}$ gerade	falls $k = n$ ungerade
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}/2$	0	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
$\mathbb{Q}$	0	0	$\mathbb{Q}$

4.3. Vergleich von Homologietheorien auf CW-Komplexen

Wir werden nun Homologietheorien auf CW-Komplexen miteinander vergleichen. Wir beginnen mit gewöhnlichen Homologietheorien (und insbesondere dem Vergleich mit singulärer Homologie) und gehen danach kurz auf den allgemeinen Fall ein.

Satz 4.28 (zelluläre Homologie einer gewöhnlichen Homologietheorie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei $h := \big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann sind die Funktoren*

$$H_n^h\colon \mathsf{CW}^2_{\mathit{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod},$$
$$h_n\colon \mathsf{CW}^2_{\mathit{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$

natürlich isomorph, wobei $\mathsf{CW}^2_{\mathit{fin}}$ die Kategorie der endlichen relativen CW-Komplexe bezeichnet. Genauer gilt:

1. *Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex und $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, so ist*

$$H_n^h(X, A) \cong 0 \cong h_n(X, A).$$

2. *Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex, so induzieren die von den Inklusionen induzierten Abbildungen*

$$C_n^h(X, A) = h_n(X_n, X_{n-1}) \longleftarrow h_n(X_n, A) \longrightarrow h_n(X, A)$$

einen Isomorphismus $H_n^h(X, A) \cong h_n(X, A)$.

Bemerkung 4.29. Ist die Homologietheorie h im obigen Satz zusätzlich additiv, so gilt die analoge Aussage auch für die Kategorie CW^2 aller relativen CW-Komplexe. Im Fall von singulärer Homologie folgt dies aus einem Kompaktheitsargument (analog zu Proposition 3.53), im allgemeinen Fall benötigt man ein allgemeines (Homotopie)Kolimesargument.

Insbesondere können wir singuläre Homologie durch die zugehörige zelluläre Homologie berechnen. D.h. die Berechnungen für zelluläre Homologie im vorigen Abschnitt liefern auch die entsprechenden Ergebnisse für singuläre Homologie, zum Beispiel für reell-projektive Räume (Beispiel 4.26).

Beweisskizze von Satz 4.28. Sei (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex mit relativer CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Wir beginnen mit ein paar einfachen Vorüberlegungen zu den auftretenden relativen Homologiegruppen:

a. Nach Bemerkung 4.21 gilt (da h eine *gewöhnliche* Homologietheorie ist)

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{n\}} \quad h_k(X_n, X_{n-1}) \cong 0.$$

b. Induktiv folgt daraus

$$\forall_{n\in\mathbb{N}} \quad \forall_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0,\dots,n\}} \quad h_k(X_n, A) \cong 0$$

c. bzw.

$$\forall_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}} \quad \forall_{N\in\mathbb{N}_{\geq n}} \quad \forall_{k\in\mathbb{Z}_{\leq n}} \quad h_k(X_N, X_n) \cong 0.$$

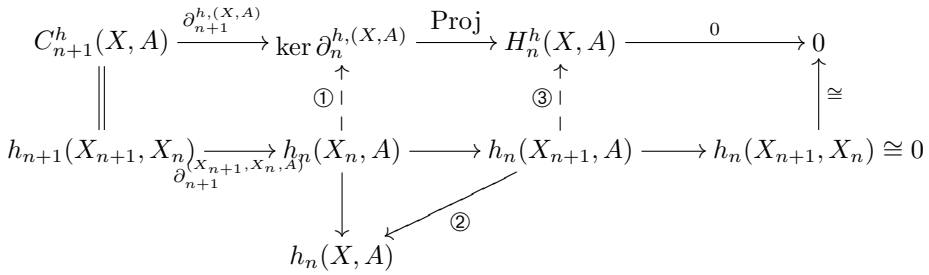
Da (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$X_N = X.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Sei $n < 0$. Dann ist (nach Vorüberlegung b bzw. der Definition von zellulärer Homologie)
$$h_n(X, A) = h_n(X_N, A) \cong 0 \cong H_n^h(X, A).$$

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das folgende Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen:



   Der Homomorphismus ② ist dabei ein Isomorphismus (dies folgt aus Vorüberlegung c und der langen exakten Tripelsequenz für $(X = X_N, X_{n+1}, A)$).
   Wie wird der Homomorphismus ① konstruiert? aus der langen exakten Tripelsequenz von (X_n, X_{n-1}, A) und Vorüberlegung b folgt, dass die Inklusion einen Isomorphismus
$$h_n(X_n, A) \cong \ker \partial_n^{(X_n, X_{n-1}, A)}$$
   induziert. Außerdem kann man sich mit der langen exakten Tripelsequenz des Tripels (X_{n-1}, X_{n-2}, A) und Vorüberlegung b leicht überlegen, dass
$$\ker \partial_n^{(X_n, X_{n-1}, A)} = \ker \partial_n^{h,(X,A)}$$
   gilt. Dies liefert den Isomorphismus ②.
   Da das linke Quadrat des obigen Diagramms kommutiert, induziert ① einen wohldefinierten Homomorphismus ③. Nach dem Fünfer-Lemma (Proposition B.6) ist ③ dabei ein Isomorphismus.
   Also liefern ② und ③ zusammen den gewünschten Isomorphismus $H_n^h(X, A) \cong h_n(X, A)$. Dieser ist natürlich. □

Korollar 4.30 (Endlichkeits-/Verschwindungsresultate für gewöhnliche Homologietheorien)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex der Dimension N.*

1. *Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \dots, N\}$*
$$h_k(X, A) \cong H_k^h(X, A) \cong 0.$$

2. *Ist R noethersch (z.B. $\mathbb{Z}$ oder ein Körper) und ist $h_0(\bullet) \cong_{{}_R\mathsf{Mod}} R$, so gilt: Für alle $k \in \{0, \dots, N\}$ ist $h_k(X, A) \cong H_k^h(X, A)$ ein endlich erzeugter R-Modul.*

Beweis. Dies folgt direkt aus dem obigen Satz bzw. aus der expliziten Beschreibung der Kettenmoduln (Proposition 4.22). □

Korollar 4.31 (Eindeutigkeit gewöhnlicher Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}}$)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$, und sei $Z := h_0(\bullet)$. Sei außerdem $n \in \mathbb{Z}$.*

1. *Ist k eine gewöhnliche Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und ist $k_0(\bullet) \cong Z$, so sind h_n und k_n als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.*
2. *Insbesondere sind h_n und $H_n(\,\cdot\,; Z)$ als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.*

(Sind die betrachteten Homologietheorien additiv, so gelten die analogen Aussagen für CW^2 statt $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}}$.)

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten. Wir skizzieren nun den Beweis des ersten Teils: Aus der Diskussion der Beschreibung der zellulären Kettenkomplexe mithilfe von Inzidenzzahlen (Bemerkung 4.24) folgt: Die zellulären Kettenkomplexe C^h und C^k sind als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$ natürlich isomorph. Daher sind auch $H^h_n = H_n \circ C^h$ und $H^k_n = H_n \circ C^k$ als Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph. Mit Satz 4.28 folgt somit die Behauptung. □

Caveat 4.32. Es gibt gewöhnliche Homologietheorien h auf Top^2 mit Werten in ${}_{\mathbb{R}}\mathsf{Mod}$ und Koeffizienten (isomorph zu) $\mathbb{R}$, für die es topologische Räume X und $n \in \mathbb{N}$ mit

$$h_n(X) \ncong_{\mathbb{R}} H_n(X; \mathbb{R})$$

gibt (z.B. sogenannte Maßhomologie). Diese Beispiele von topologischen Räumen sind aber keine CW-Komplexe.

Caveat 4.33. Ist h eine Homologietheorie auf Top^2, die *nicht* gewöhnlich ist, so ist die zelluläre Homologie zu h *nicht* isomorph zu h (man betrachte etwa den Einpunktraum).

Es gibt aber dennoch auch im Falle allgemeiner Homologietheorien einen systematischen Zusammenhang zwischen der betrachteten verallgemeinerten Homologietheorie und singulärer Homologie:

Satz 4.34 (Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei h eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex, so gibt es eine (in (X, A) und h) natürliche, konvergente Spektralsequenz*

$$E^1_{pq} = h_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Longrightarrow h_{p+q}(X, A)$$

bzw.

$$E^2_{pq} = H_p\big(X, A; h_q(\bullet)\big) \Longrightarrow h_{p+q}(X, A).$$

Was sind Spektralsequenzen? Spektralsequenzen sind eine Verallgemeinerung von langen exakten Sequenzen und bestehen aus einer Folge $(E^r, d^r)_{r \in \mathbb{N}_{\geq 1}}$ von bigraduierten Kettenkomplexen (den *Seiten* der Spektralsequenz), wobei der Randoperator d^r den Grad $(-r, r-1)$ besitzt und E^{r+1} aus E^r durch Homologie bezüglich d^r entsteht (Abbildung (4.35)). Im Beispiel der Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz ist die Zeile von E^1, die zu „$q = 0$“ gehört, gerade der zelluläre Kettenkomplex $C^h(X, A)$.

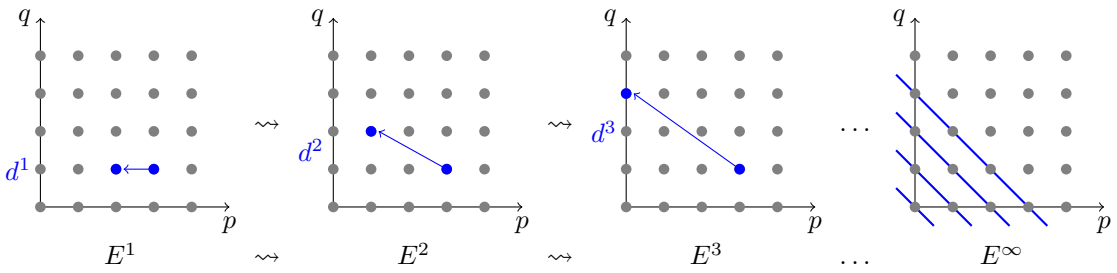


Abbildung (4.35): Seiten einer homologischen Spektralsequenz

In günstigen Fällen, stabilisiert dieser Prozess und liefert die sogenannte ∞-Seite E^∞ der Spektralsequenz. Falls Konvergenz

$$E^1_{pq} \Longrightarrow B_{p+q}$$

der Spektralsequenz vorliegt, so bedeutet dies, dass E^∞ in einem gewissen Sinne eine Approximation an B liefert; genauer liefert die Folge $(E^\infty_{p,n-p})_{p\in\mathbb{Z}}$ eine Approximation an A_n. Im allgemeinen lässt sich der „Grenzwert“ B aber nicht genau aus E^∞ bestimmen, sondern nur bis auf sogenannte Erweiterungsprobleme. Außerdem ist zu bedenken, dass die Randoperatoren in den höheren Seiten einer Spektralsequenz im allgemeinen nicht vernünftig berechenbar sind. Dennoch können Spektralsequenzen und die zugehörige Trickkiste in vielen Fällen helfen, allerlei Rückschlüsse über den Grenzwert zu ziehen.[12]

Wir werden auf die Begrifflichkeiten und den Beweis hier nicht weiter eingehen und nur ein damit verwandtes (einfacheres) Resultat genauer diskutieren – den Vergleichssatz für Homologietheorien auf CW-Komplexen (Satz 4.41). Zur Vorbereitung klären wir zunächst ein paar Begriffe:

Definition 4.36 (Unterkomplex, CW-Paar)**.** Sei X ein CW-Komplex mit CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ und sei $A \subset X$.

- Wir nennen A einen *Unterkomplex von* X, wenn für alle offenen Zellen $e \subset X$ mit $e \cap A \neq \emptyset$ bereits $\overline{e} \subset A$ gilt (in diesem Fall ist $(A \cap X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$ eine CW-Struktur auf A und (X, A) ist ein relativer CW-Komplex).
- Ist A ein Unterkomplex von X, so nennen wir (X, A) ein CW-Paar.

Beispiel 4.37.

- Skelette von CW-Komplexen sind Unterkomplexe.
- Bezüglich der durch $\emptyset \subset \{0, 1\} \subset [0, 1]$ gegebenen CW-Struktur auf $[0, 1]$ sind $[0, 1)$ und $[0, 1/2]$ *keine* Unterkomplexe; aber $\{0\}$ ist ein Unterkomplex.

Wir erhalten so die (Homotopie)Kategorie der CW-Paare:

[12] Eine kurze Einführung in Spektralsequenzen, Literaturangaben und die einfachsten Techniken finden Sie im Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III aus dem WS 2009/10
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie3_ws0910/prelim.pdf

Definition 4.38 (Kategorie der CW-Paare, Homotopiekategorie der CW-Paare)**.**

- Die *Kategorie* $\mathsf{CW}^{②}$ *der CW-Paare* besteht aus:
  - Objekte sind die CW-Paare im Sinne der obigen Definition.
  - Morphismen: Sind (X, A) und (Y, B) CW-Paare, so ist
$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{CW}^{②}}\big((X,A),(Y,B)\big) := \big\{f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{CW}}(X,Y) \;\big|\; f(A) \subset B\big\}.$$
  - Verknüpfungen: Diese sind durch die gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.
- Sind (X, A) und (Y, B) CW-Paare, so sind Abbildungen $f, g\colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ von CW-Paaren *zellulär homotop als Abbildungen von CW-Paaren*, kurz $f \simeq_{\mathsf{CW}^{②}} g$, wenn es eine zelluläre Abbildung $h\colon (X \times [0,1], A \times [0,1]) \longrightarrow (Y, B)$ von CW-Paaren mit
$$h(\,\cdot\,, 0) = f \qquad \text{und} \qquad h(\,\cdot\,, 1) = g$$
gibt. Dabei versehen wir $X \times [0, 1]$ mit der CW-Struktur aus Proposition 4.11.
- Die *Homotopiekategorie* $\mathsf{CW}^{②}_{\mathsf{h}}$ *der CW-Paare* besteht aus:
  - Objekte sind die CW-Paare im Sinne der obigen Definition.
  - Morphismen: Sind (X, A) und (Y, B) CW-Paare, so ist
$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{CW}^{②}_{\mathsf{h}}}\big((X,A),(Y,B)\big) := \mathrm{Mor}_{\mathsf{CW}^{②}}\big((X,A),(Y,B)\big) \,/{\simeq_{\mathsf{CW}^{②}}}\,.$$
  - Verknüpfungen: Diese sind durch die repräsentantenweise gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Analog zum Fall von Raumpaaren können wir nun formulieren, was Homologietheorien auf CW-Paaren sind:

Definition 4.39 (Homologietheorie auf CW-Paaren)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Eine *Homologietheorie auf* $\mathsf{CW}^{②}$ *mit Werten in* ${}_R\mathsf{Mod}$ ist ein Paar $\big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$, bestehend aus

- einer Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von Funktoren $\mathsf{CW}^{②} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ und
- einer Folge $(\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ von natürlichen Transformationen
$$\partial_k\colon h_k \Longrightarrow h_{k-1} \circ U_{\mathsf{CW}},$$
wobei $U_{\mathsf{CW}}\colon \mathsf{CW}^{②} \longrightarrow \mathsf{CW}^{②}$ den durch
  - auf Objekten: $(X, A) \longmapsto (A, \emptyset)$
  - auf Morphismen: $\big(f\colon (X, A) \to (Y, B)\big) \longmapsto \big(f|_A\colon (A, \emptyset) \to (B, \emptyset)\big)$

  gegebenen Unterkomplexfunktor bezeichnet (hierbei ist es essentiell, dass wir mit $\mathsf{CW}^{②}$ statt CW^{2} arbeiten).

mit folgenden Eigenschaften:

- *Homotopieinvarianz.* Für alle $k \in \mathbb{Z}$ faktorisiert $h_k\colon \mathsf{CW}^{②} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ über den Homotopieklassenfunktor $\mathsf{CW}^{②} \longrightarrow \mathsf{CW}^{②}_{\mathsf{h}}$.
- *lange exakte Paarsequenz.* Für alle CW-Paare (X, A) ist die Sequenz
$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} h_k(A,\emptyset) \xrightarrow{h_k(i)} h_k(X,\emptyset) \xrightarrow{h_k(j)} h_k(X,A) \xrightarrow{\partial_k} h_{k-1}(A,\emptyset) \xrightarrow{h_{k-1}(i)} \cdots$$
exakt, wobei $i\colon (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ und $j\colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind.

– *Ausschneidung.* Für alle CW-Paare (X, A) und alle Unterkomplexe $C \subset X$ ist die von der Inklusion $(C, C \cap A) \longrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung

$$h_k(C, C \cap A) \longrightarrow h_k(X, A)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

Wir haben die obigen Formulierung von Ausschneidung gewählt, da Komplemente von Unterkomplexen im allgemeinen *keine* CW-Komplexe sind.

Als letzte Zutat benötigen wir noch eine Möglichkeit, Homologietheorien zu vergleichen:

Definition 4.40 (natürliche Transformation von Homologietheorien)**.** Sei R ein Ring mit Eins und seien $h := \big((h_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ und $h' := \big((h'_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Eine *natürliche Transformation* $h \Longrightarrow h'$ *von Homologietheorien auf* $\mathsf{CW}^{②}$ ist eine Folge $(T_k \colon h_k \Longrightarrow h'_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ natürlicher Transformationen mit

$$T_{k-1}(A, \emptyset) \circ \partial_k^{(X,A)} = \partial_k'^{(X,A)} \circ T_k(X, A)$$

für alle CW-Paare (X, A).

Wir können nun den Vergleichssatz formulieren:

Satz 4.41 (Vergleichssatz für Homologietheorien)**.** *Sei R ein Ring, seien h und h' Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $(T_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine natürliche Transformation $h \Longrightarrow h'$ von Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$T_k(\bullet) \colon h_k(\bullet) \longrightarrow h'_k(\bullet)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist. Dann folgt: Für alle endlichen CW-Paare (X, A) ist

$$T_k(X, A) \colon h_k(X, A) \longrightarrow h'_k(X, A)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Dies folgt durch eine Induktion über die Skelette. □

Caveat 4.42. Sei R ein Ring mit Eins und seien h und h' Homologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit

$$h_k(\bullet) \cong h'_k(\bullet)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Im allgemeinen folgt dann *nicht*, dass h und h' bereits auf allen endlichen CW-Paaren übereinstimmen (Beipsiele solcher Art lassen sich etwa über sogenannten orientierten Bordismus konstruieren). Es ist im obigen Satz also wichtig, dass der Isomorphismus auf den Werten des Einpunktraumes von einer natürlichen Transformation $h \Longrightarrow h'$ induziert ist.

4.4. Die Euler-Charakteristik

Die Euler-Charakteristik ist eine der ältesten topologischen Invarianten. Sie hat den Vorteil, dass sie leicht aus einer Zellenstruktur berechnet werden kann, aber den Nachteil, dass sie nicht funktoriell ist. Wir geben eine kurze Einführung in die grundlegenden Eigenschaften und Anwendungen der Euler-Charakteristik.

Definition 4.43 (Euler-Charakteristik eines endlichen CW-Komplexes)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex.

- Zu $n \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit $c_n(X)$ die Anzahl der offenen n-Zellen von X.
- Die *Euler-Charakteristik von* X ist definiert als (die endliche Summe!)

$$\chi(X) := \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n \cdot c_n(X) \in \mathbb{Z}.$$

Beispiel 4.44. Eine kleine Sammlung von ersten Beispielen findet sich in Abbildung (4.45).

Das kleine Wunder der algebraischen Topologie, dass die Euler-Charakteristik *nicht* von der CW-Struktur abhängt (und sogar eine Homotopieinvariante ist), wurde von Poincaré entdeckt (Satz 4.48). Zur Formulierung führen wir den klassischen Begriff der Betti-Zahlen ein:

Definition 4.46 (Betti-Zahlen)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei R ein noetherscher Ring mit Eins, der einen geeigneten Rangbegriff rk_R für endlich erzeugte Links-R-Moduln besitzt.[13] Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$b_n(X; R) := \mathrm{rk}_R \, H_n(X; R) \in \mathbb{N}$$

die *n-te Betti-Zahl von X bezüglich R* (diese ist nach Korollar 4.30 wohldefiniert); wir schreiben

$$b_n(X) := b_n(X; \mathbb{Z})$$

und nennen dies die *n-te Betti-Zahl von X*.

Beispiel 4.47. Es gilt (nach Beispiel 4.26 und Satz 4.28)

$$b_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}) = 0 \neq 1 = b_2(\mathbb{R}P^2; \mathbb{Z}/2).$$

Wir können nun den Satz von Poincaré formulieren. Aufgrund dieses Satzes bezeichnet man singuläre Homologie auch als Kategorifizierung der Euler-Charakteristik (eine Begriffsbildung, die z.B. in der Knotentheorie verwendet wird).

Satz 4.48 (Homotopieinvarianz der Euler-Charakteristik)**.** *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei R ein noetherscher Ring mit Eins, der einen geeigneten Rangbegriff (im Sinne der obigen Definition) besitzt.*

[13] D.h. für alle $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{rk}_R \, R^d = d$ und rk_R ist unter kurzen exakten Sequenzen endlich erzeugter R-Moduln additiv; einen solchen Rangbegriff gibt es zum Beispiel für Hauptidealringe (und Körper).

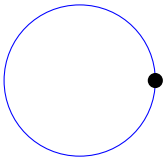
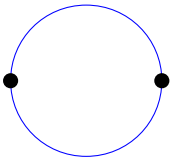
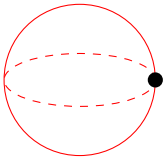
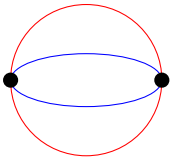
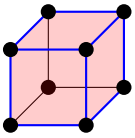
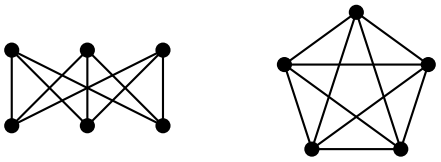
Raum	*CW-Struktur*	*Euler-Charakteristik*
		1
$[0,1]$		$2-1=1$
S^1		$1-1=0$
S^1		$2-2=0$
S^2		$1-0+1=2$
S^2		$2-2+2=2$
S^2		$8-12+6=2$

Abbildung (4.45): Erste Beispiele für die Euler-Charakteristik

1. *Dann gilt*
$$\chi(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot b_n(X;R)$$
(und diese Summe ist nach Korollar 4.30 endlich).
2. *Insbesondere gilt: Ist Y ein endlicher CW-Komplex mit $X \simeq_{\mathsf{Top}} Y$, so folgt*
$$\chi(X) = \chi(Y).$$
Also ist die Euler-Charakteristik insbesondere unabhängig von der betrachteten endlichen CW-Struktur(!).

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten Teil (da singuläre Homologie und somit auch Betti-Zahlen homotopieinvariant sind). Den ersten Teil erhalten wir aus (wobei wir h für die singuläre Homologietheorie mit R-Koeffizienten schreiben):
$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot c_n(X) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{rk}_R C_n^h(X) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{rk}_R H_n\big(C_n^h(X)\big) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{rk}_R H_n(X;R) \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot b_n(X;R);
\end{aligned}$$
die zweite Gleichheit folgt aus Proposition 4.22, die dritte aus einer konsequenten Anwendung der „Dimensionsformel“ (Additivität von rk_R für kurze exakte Sequenze von endlich erzeugten R-Moduln), die vierte aus Satz 4.28. □

Beispiel 4.49.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\chi(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 2 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases}$$
$$\chi(\mathbb{R}P^n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 1 & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases}$$
$$\chi(\mathbb{C}P^n) = n+1.$$
- Man kann leicht abzählen, dass die Fläche die Euler-Charakteristik -2 besitzt. Analog sieht man, dass die entsprechende Fläche mit $g \in \mathbb{N}$ „Henkeln“ die Euler-Charakteristik $2 - 2 \cdot g$ besitzt.



$K_{3,3}$ K_5

Abbildung (4.51): Die (nicht-planaren) Graphen $K_{3,3}$ und K_5

Beispiel 4.50 (Eulersche Polyederformel für CW-Strukturen)**.** Für jede (endliche) (zweidimensionale) CW-Struktur auf S^2 mit e Ecken (0-Zellen), k Kanten (1-Zellen) und f Flächen (2-Zellen) gilt

$$e - k + f = 2.$$

Die Eulersche Polyederformel hat zahlreiche klassische Anwendungen:
- Bestimmung der kombinatorischen Struktur regulärer Polyeder.
- Nicht-Planaritätsresultate für gewisse Graphen, z.B. für die Graphen K_5 und $K_{3,3}$ (Abbildung (4.51)).
- Färbungssätze für planare Graphen.

Wir gehen kurz auf die erste Anwendung ein:

Korollar 4.52 (Kombinatorik der regulären Polyeder)**.** *Sei $P \subset \mathbb{R}^3$ ein konvexes, reguläres dreidimensionales Polyeder mit e Ecken, k Kanten und f Seitenflächen. Dann ist (e, k, f) eines der folgenden Tripel:*

e	k	f	*entspricht der Kombinatorik von*
4	6	4	*Tetraeder*
6	12	8	*Oktaeder*
8	12	6	*Hexaeder (Würfel)*
20	30	12	*Dodekaeder*
12	30	20	*Ikosaeder*

Mithilfe von euklidischer Geometrie folgt außerdem, dass es zu jedem kombinatorischen Typ nur das jeweils angegebene reguläre Polyeder gibt.

Beweisskizze. Der Rand $\partial P \cong_{\mathsf{Top}} S^2$ erbt von P eine CW-Struktur mit e Ecken (0-Zellen), k Kanten (1-Zellen) und f Flächen (2-Zellen). Die Eulersche Polyederformel (Beispiel 4.50) liefert somit

$$2 = \chi(S^2) = \chi(\partial P) = e - k + f.$$

Da P regulär ist, existieren $m, n \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ mit:
- Jede Seitenfläche von P hat genau m Ecken/Kanten.
- An jeder Ecke von P treffen sich genau n Kanten/Seitenflächen.

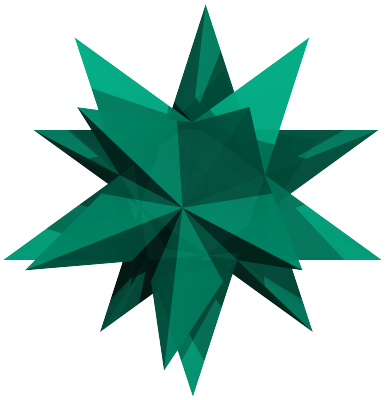


Abbildung (4.53): Großer Sterndodekaeder

Da jede Kante die Kante von genau zwei Seitenflächen ist und jede Kante genau zwei Ecken miteinander verbindet, folgt

$$\frac{m \cdot f}{2} = k \qquad \text{und} \qquad \frac{n \cdot e}{2} = k.$$

Also ist $2 = e - k + f = 2 \cdot k/n - k + 2 \cdot k/m$ bzw.

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{k} + \frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}.$$

Insbesondere kann daher (m, n) nur die folgenden Werte annehmen:

$$(3,3), \quad (3,4), \quad (4,3), \quad (3,5), \quad (5,3).$$

Daraus ergeben sich die angegebenen Möglichkeiten für (e, k, f). □

Ein Beispiel für ein nicht-konvexes, reguläres dreidimensionales Polyeder ist der große Sterndodekaeder (Abbildung (4.53)).

Beispiel 4.54 (Kombinatorik via Topologie)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^n \cdot \binom{n}{k} = 0.$$

Dies kann man mithilfe der binomischen Formel aus $(1+(-1))^n = 0$ folgern. Alternativ ist es aber auch eine Konsequenz aus

$$\chi(\Delta^{n-1}) = \chi(\bullet) = 1$$

und der Betrachtung der durch die Kombinatorik von Δ^{n-1} gegebenen CW-Struktur auf Δ^{n-1}.

Bemerkung 4.55 (L^2-Betti-Zahlen)**.** Sei X ein wegzusammenhängender endlicher CW-Komplex, sei $x_0 \in X$ und sei $G := \pi_1(X, x_0)$. Die *Gruppen-von-Neumann-Algebra* $\mathcal{N}G$ von G ist eine gewisse Vervollständigung des Gruppenrings $\mathbb{Z}G$ bzw. $\mathbb{C}G$; als abelsche Gruppe ist $\mathbb{Z}G = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{Z}\cdot g$ und die Ringstruktur ist durch formales Ausmultiplizieren gegeben, wobei die zu Gruppenelementen gehörigen Basiselemente wie in der Gruppe multipliziert werden. Ist G nicht abelsch, so sind die Ringe $\mathbb{Z}G$ bzw. $\mathcal{N}G$ *nicht* kommutativ. Man kann jedoch zeigen, dass der Ring $\mathcal{N}G$ einen vernünftigen Rangbegriff zulässt (der jedoch nicht ganzzahlig ist). Man definiert nun zu $n \in \mathbb{N}$ die *n-te L^2-Betti-Zahl von X* durch

$$b_n^{(2)}(X) := \operatorname{rk}_{\mathcal{N}G} H_n\big(C(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathcal{N}G\big),$$

wobei wir auf $\widetilde{X}$ bzw. $C(\widetilde{X})$ „die“ Operation von G durch Decktransformationen betrachten. Man kann nun zeigen, dass das Analogon zu Satz 4.48 auch für diese Betti-Zahlen gilt:

$$\chi(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot b_n^{(2)}(X).$$

Der Vorteil an L^2-Betti-Zahlen gegenüber gewöhnlichen Betti-Zahlen ist, dass sie häufiger verschwinden; daher kann man manchmal das Verschwinden der Euler-Charakteristik zeigen, indem man nachweist, dass alle L^2-Betti-Zahlen verschwinden.

Zur Berechnung der Euler-Charakteristik sind die folgenden Eigenschaften nützlich:

Proposition 4.56 (Euler-Charakteristik, Vererbungseigenschaften)**.**

1. *Seien X und Y endliche CW-Komplexe. Dann liefert*

$$\Big(\bigcup_{k=0}^{n} X_k \times Y_{n-k}\Big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine endliche CW-Struktur auf $X \times Y$ und

$$\chi(X \times Y) = \chi(X) \cdot \chi(Y).$$

2. *Sei*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j} \\ X & \xrightarrow[g]{} & Y \end{array}$$

ein Pushout in Top*, wobei A, B und X endliche CW-Komplexe sind, $i\colon A \longrightarrow X$ die Inklusion eines Unterkomplexes und $f\colon A \longrightarrow B$ zellulär ist. Dann liefert*

$$\big(g(X_n) \cup j(B_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine endliche CW-Struktur auf Y und es gilt

$$\chi(Y) = \chi(X) + \chi(B) - \chi(A)$$

3. *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei $p\colon Y \longrightarrow X$ eine endliche Überlagerung mit $d \in \mathbb{N}$ Blättern. Dann liefert*

$$\big(p^{-1}(X_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine endliche CW-Struktur auf Y und es gilt

$$\chi(Y) = d \cdot \chi(X).$$

Eine gemeinsame Verallgemeinerung der Multiplikatvität der Euler-Charakteristik bezüglich Produkten und endlichen Überlagerungen ist die Multiplikativität für gewisse Faserungen (was mithilfe einer geeigneten Spektralsequenz gezeigt werden kann).

Beweisskizze. Dass die angegebenen Filtrierungen tatsächlich CW-Strukturen liefern, folgt durch die Betrachtung geeigneter Pushouts. In den drei Fällen erhalten wir dabei für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Relationen zwischen den Anzahlen der offenen n-Zellen:

$$\begin{aligned} c_n(X \times Y) &= \sum_{k=0}^{n} c_k(X) \cdot c_{n-k}(Y), \quad \text{bzw.} \\ c_n(Y) &= c_n(X) + c_n(B) - c_n(A), \quad \text{bzw.} \\ c_n(Y) &= d \cdot c_n(X). \end{aligned}$$

Daraus folgen dann die entsprechenden Zusammenhänge zwischen den Euler-Charakteristiken. □

Beispiel 4.57.

- Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist
$$\chi\big((S^1)^n\big) = \big(\chi(S^1)\big)^n = 0.$$
- Ist X ein endlicher CW-Komplex mit $\chi(X) \neq 0$, so gibt es keinen endlichen CW-Komplex Y mit
$$X \simeq_{\mathsf{Top}} S^1 \times Y.$$
Tatsächlich gilt dies noch viel allgemeiner (für gewisse nicht-triviale S^1-Operationen), wie man zum Beispiel mithilfe von L^2-Betti-Zahlen (Bemerkung 4.55) sehen kann.
- Gibt es eine endliche Überlagerung einer Fläche mit „g Henkeln“ durch eine Fläche mit „h-Henkeln“, so folgt (Beispiel 4.49)
$$1 - g \mid 1 - h.$$
(Die Umkehrung gilt auch.)
- Ist G eine Gruppe, für die es einen endlichen CW-Komplex X vom Typ $K(G, 1)$ gibt, so können wir die *Euler-Charakteristik der Gruppe G* durch
$$\chi(G) = \chi(X)$$
definieren (und dies ist wohldefiniert). Die obigen Vererbungseigenschaften für die Euler-Charakteristik endlicher CW-Komplexe übersetzen sich dann in entsprechende Vererbungseigenschaften für die Euler-Charakteristik solcher Gruppen.

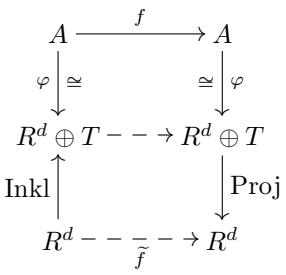


Abbildung (4.60): Spur von Endomorphismen über Hauptidealringen

Dass Wechselsummen (wie in der Definition der Euler-Charakteristik) bessere topologische Invarianzeigenschaften besitzen als die entsprechenden vorzeichenlosen Varianten, ist ein allgemeines Prinzip der Topologie und spielt zum Beispiel auch bei der Lefschetz-Zahl und Indexsätzen eine Rolle.

Definition 4.58 (Lefschetz-Zahl für zelluläre Selbstabbbildungen von endlichen CW–Komplexen)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei $f\colon X \longrightarrow X$ zellulär. Dann ist (die endliche Summe)

$$\Lambda(f) := \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \operatorname{tr}_{\mathbb{Z}} C_n^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(f)$$

die *Lefschetz-Zahl von* f.

Bemerkung 4.59 (Spur über Hauptidealringen)**.** Sei R ein Hauptidealring, sei A ein endlich erzeugter R-Modul und sei $f\colon A \longrightarrow A$ ein R-Homomorphismus. Nach dem Hauptsatz über endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen, gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ und einen R-Torsionsmodul T und einen R-Isomorphismus

$$\varphi\colon A \longrightarrow R^d \oplus T.$$

Dann definiert man die *Spur von* f durch

$$\operatorname{tr}_R f := \operatorname{tr}_R M_{\widetilde{f}} \in R,$$

wobei $M_{\widetilde{f}} \in M_{d\times d}(R)$ die Matrix zu $\widetilde{f}$ bezüglich der Standardbasis von R^d ist und $\widetilde{f}\colon R^d \longrightarrow R^d$ wie im Diagramm in Abbildung (4.60) definiert ist. Diese Definition ist (wegen der Spureigenschaft der Matrizenspur) tatsächlich unabhängig vom obigen Isomorphismus φ.

Beispiel 4.61. Ist X ein endlicher CW-Komplex, so ist

$$\begin{aligned}\Lambda(\mathrm{id}_X) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \mathrm{tr}_{\mathbb{Z}}\, C_n^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(\mathrm{id}_X)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \mathrm{tr}_{\mathbb{Z}}\, \mathrm{id}_{C_n^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(X)}\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}\, C_n^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(X)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot c_n(X)\\ &= \chi(X).\end{aligned}$$

Wie die Euler-Charakteristik können auch Lefschetz-Zahlen über Homologie berechnet werden:

Satz 4.62 (Lefschetz-Zahl via Homologie)**.** *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei $f\colon X \longrightarrow X$ zellulär.*

1. *Ist R ein Hauptidealring, so gilt*

$$\Lambda(f) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot \mathrm{tr}_R\, H_n(f;R)$$

   in R (bzw. in $\mathbb{Z}/(charR)$).
2. *Insbesondere ist die Lefschetz-Zahl homotopieinvariant, d.h.: Ist $g\colon X \longrightarrow X$ zellulär und $f \simeq_{\mathsf{Top}} g$, so gilt*

$$\Lambda(g) = \Lambda(f).$$

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt direkt aus dem ersten Teil. Den ersten Teil kann man analog zum Fall der Euler-Charakteristik mithilfe einer geeigneten Additivität der Spur bzgl. kurzer exakter Sequenzen zeigen; zu beachten ist dabei, dass wegen Bemerkung 4.24 in R bzw. in $\mathbb{Z}/(\mathrm{char}R)$

$$\mathrm{tr}_R\, C_n^{H_*(\,\cdot\,;R)}(f) = \mathrm{tr}_{\mathbb{Z}}\, C_n^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(f)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Analog zur Euler-Charakteristik erfüllt auch die Lefschetz-Zahl entsprechende Vererbungseigenschaften. Außerdem hat auch die Lefschetz-Zahl die Spureigenschaft.

Eine interessante Eigenschaft der Lefschetz-Zahl ist der folgende Bezug zur Existenz von Fixpunkten:

Satz 4.63 (Lefschetzscher Fixpunktsatz)**.** *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei $f\colon X \longrightarrow X$ zellulär.*

1. *Hat f keine Fixpunkte, so gilt $\Lambda(f) = 0$.*
2. *Bzw.: Ist $\Lambda(f) \neq 0$, so besitzt f mindestens einen Fixpunkt in X.*

Beweisskizze. Es genügt, den ersten Teil zu zeigen. Endliche CW-Komplexe sind metrisierbar; sei etwa $d\colon X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine Metrik, die die Topologie auf X induziert. Da X als endlicher CW-Komplex kompakt ist und $f\colon X \longrightarrow X$ keine Fixpunkte hat, gibt es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ mit

$$\forall_{x \in X} \quad d\big(f(x), x\big) > 3 \cdot \varepsilon.$$

Man kann nun eine endliche CW-Struktur X' auf X finden, deren offene Zellen Durchmesser kleiner als ε haben; außerdem gibt es eine zelluläre Abbildung $g\colon X' \longrightarrow X'$

- die (in Top) homotop zu f ist
- und folgende Eigenschaft erfüllt: Für alle offenen Zellen e von X' ist

$$g(\overline{e}) \cap \overline{e} = \emptyset.$$

Mit Satz 4.62 folgt aus der ersten Eigenschaft $\Lambda(f) = \Lambda(g)$. Die zweite Eigenschaft liefert zusammen mit Proposition 4.22, dass $C^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(g)$ durch Matrizen dargestellt wird, deren Diagonaleinträge alle 0 sind; insbesondere haben diese Matrizen Spur 0. Damit folgt $\Lambda(g) = 0$, und damit auch $\Lambda(f) = 0$. □

Korollar 4.64 (Brouwerscher Fixpunktsatz, zellulär)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f\colon D^n \longrightarrow D^n$ bezüglich einer endlichen CW-Struktur auf D^n zellulär. Dann folgt mit Satz 4.62 und Satz 3.18*

$$\begin{aligned}\Lambda(f) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k \cdot \operatorname{tr}_{\mathbb{Z}} H_k(f; \mathbb{Z}) \\ &= \operatorname{tr}_{\mathbb{Z}} H_0(f; \mathbb{Z}) \\ &= \operatorname{tr}_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}_{H_0(D^n;\mathbb{Z})} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Nach dem Lefschetzschen Fixpunktsatz hat f somit mindestens einen Fixpunkt.

Bemerkung 4.65 (freie Operationen auf Sphären)**.** Außerdem kann man mit dem Lefschetzschen Fixpunktsatz zum Beispiel auch zeigen, dass eine endliche Gruppe, die frei auf einer geradedimensionalen Sphäre operiert, trivial oder isomorph zu $\mathbb{Z}/2$ ist.

4.5. Homotopietheorie von CW-Komplexen

Wir geben nun eine kurze Zusammenfassung (ohne Beweise) über die wichtigsten elementaren homotopietheoretischen Eigenschaften von CW-Komplexen. Dabei untersuchen wir die folgenden Fragen:

- Wie kann man überprüfen, ob CW-Komplexe homotopieäquivalent sind? Insbesondere suchen wir hinreichende Kriterien für Homotopieäquivalenz.
- Wie kann man allgemeine Räume/Abbildungen durch CW-Komplexe bzw. zelluläre Abbildungen approximieren?

Da CW-Komplexe induktiv aus Zellen zusammengebaut sind, wissen Homotopiegruppen (fast) alles über den Homotopietyp von CW-Komplexen:

Satz 4.66 (Satz von Whitehead für Homotopiegruppen)**.** *Seien X und Y CW-Komplexe und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz in* Top*.*
2. *Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist eine* schwache Homotopieäquivalenz*, d.h. für alle $x_0 \in X$ und alle $n \in \mathbb{N}$ ist*

$$\pi_n(f)\colon \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n\big(Y, f(x_0)\big)$$

   bijektiv.
3. *Für alle CW-Komplexe Z ist*

$$\begin{aligned} [Z, X] &\longrightarrow [Z, Y] \\ [g] &\longmapsto [f \circ g] \end{aligned}$$

   bijektiv.

Beweisskizze.

$1 \Longrightarrow 2$ Dies folgt aus der (unpunktierten!) Homotopieinvarianz der Homotopiegruppen.

$2 \Longrightarrow 3$ Dies ist der komplizierteste Teil des Beweises und beruht auf einer induktiven Konstruktion; grob gesagt, funktioniert dies, da CW-Komplexe induktiv aus Zellen zusammengesetzt sind, und die Homotopiegruppen diese Information hinreichend gut zur Verfügung stellen.

$3 \Longrightarrow 1$ Dies ist ein allgemeines Argument (Yoneda-Trick): man setzt einfach $Z = Y$ als Testraum ein und betrachtet das Urbild von $[\mathrm{id}_Y]$. □

Caveat 4.67. Es genügt *nicht*, nur abstrakte Isomorphismen zwischen den Homotopiegruppen zu haben; es ist wichtig, dass diese Isomorphismen von stetigen Abbildungen induziert werden. Zum Beispiel zeigt Überlagerungstheorie, dass $\mathbb{R}P^2 \times S^3$ und $S^2 \times \mathbb{R}P^3$ isomorphe Homotopiegruppen haben; mithilfe zellulärer Homologie kann man aber zeigen, dass

$$H_5(\mathbb{R}P^2 \times S^3; \mathbb{Z}) \cong 0 \ncong \mathbb{Z} \cong H_5(S^2 \times \mathbb{R}P^3; \mathbb{Z})$$

gilt. Insbesondere sind $\mathbb{R}P^2 \times S^3$ und $S^2 \times \mathbb{R}P^3$ *nicht* homotopieäquivalent.

Korollar 4.68 (Satz von Whitehead für Homologie)**.** *Seien X und Y einfach zusammenhängende CW-Komplexe und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Dann sind äquivalent:*

1. *Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist eine Homotopieäquivalenz in* Top*.*
2. *Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $H_n(f; \mathbb{Z})\colon H_n(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(Y; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus.*

Beweis.

$1 \Longrightarrow 2$ Dies folgt aus der Homotopieinvarianz von singulärer Homologie.

$2 \Longrightarrow 1$ Dies folgt zusammen mit dem Satz von Hurewicz für Abbildungen (Satz 4.66) aus dem Satz von Whitehead für Homotopiegruppen (Satz 3.85). □

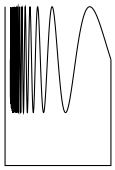


Abbildung (4.69): der Warschauer Kreis

Beispiel 4.70 (Warschauer Kreis)**.** Der *Warschauer Kreis* (Abbildung (4.69))

$$\begin{aligned} S := &\big\{(x, \sin(2 \cdot \pi/x)) \;\big|\; x \in (0,1]\big\} \\ &\cup \big(\{1\} \times [-2,0]\big) \cup \big([0,1] \times \{-2\}\big) \cup \big(\{0\} \times [-2,1]\big) \end{aligned}$$

mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$ ist

- *nicht* kontraktibel,
- aber die konstante Abbildung $S \longrightarrow \bullet$ induziert für alle $n \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen $H_n(S;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(\bullet;\mathbb{Z})$,
- und S ist einfach zusammenhängend.

Mit Korollar 4.68 erhalten wir somit, dass S *nicht* zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent sein.

Beispiel 4.71 (Homologie-Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Ein topologischer Raum X ist eine *Homologie-n-Sphäre*, wenn

$$\forall_{k \in \mathbb{Z}} \quad H_k(X;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k \in \{0,n\} \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,n\} \end{cases} \cong H_k(S^n;\mathbb{Z})$$

gilt. Beispiele sind Sphären und etwa auch die sogenannte Poincaré-Sphäre (eine Homologie-3-Sphäre, die *nicht* einfach zusammenhängend, aber eine dreidimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ohne Rand ist).

Die *Poincaré-„Vermutung“* besagt: Ist M eine kompakte Mannigfaltigkeit der Dimension n ohne Rand und gilt $M \simeq_{\mathsf{Top}} S^n$, so ist M bereits zu S^n homöomorph.

Die Poincaré-Vermutung wurde mittlerweile in allen Dimensionen bestätigt:

- In den Dimensionen ≤ 2 folgt dies aus der (klassischen) Klassifikation der kompakten Mannigfaltigkeiten ohne Rand in diesen Dimensionen.
- In den Dimensionen ≥ 5 wurde dies mithilfe von Chirurgie-Theorie gezeigt (Fields-Medaille 1966 für Smale).
- In Dimension 4 wurde dies mit einer Verfeinerung von Chirurgie-Theorie gezeigt (Fields-Medaille 1986 für Freedman).
- In Dimension 3 wurde dies mithilfe von Methoden aus der riemannschen Geometrie (mit dem sogenannten Ricci-Fluss) gezeigt (Fields-Medaille 2006 für Perelman (der diese abgelehnt hat)).

Obwohl nicht jeder topologische Raum zu einem CW-Komplex homotopieäquivalent ist, gibt es dennoch einen starken homotopietheoretischen Bezug zwischen allgemeinen topologischen Räumen und CW-Komplexen:

Satz 4.72 (zelluläre Approximation)**.** *Seien X und Y CW-Komplexe.*

1. *Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig, so gibt es eine zelluläre Abbildung $f'\colon X \longrightarrow Y$ mit*
$$f \simeq_{\mathsf{Top}} f'.$$
2. *Sind $f, g\colon X \longrightarrow Y$ zelluläre Abbildungen und gilt $f \simeq_{\mathsf{Top}} g$, so sind f und g bereits zellulär homotop.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus einer induktiven Konstruktion über die Skelette (dabei ist essentiell, dass sich die Homotopiegruppen der Skelette X_n und X in niedrigen Graden nicht unterscheiden).

Der zweite Teil folgt, indem man eine geeignete relative Version des ersten Teils auf Homotopien anwendet. □

Korollar 4.73 (alternative Beschreibung $\mathsf{CW_h}$)**.** *Sind X und Y CW-Komplexe, so gilt*
$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_{\mathsf{CW}_h}(X,Y) &= \left\{f \in \mathrm{map}(X,Y) \;\middle|\; f \text{ ist zellulär}\right\} /\simeq_{\mathsf{CW}} \\ &= \mathrm{map}(X,Y)\,/\simeq_{\mathsf{Top}}.\end{aligned}$$

Satz 4.74 (CW-Approximation)**.**

1. *Sei X ein topologischer Raum. Dann existiert ein CW-Komplex Y und eine schwache Homotopieäquivalenz $f\colon Y \longrightarrow X$; man nennt ein solches Paar (Y, f) eine* CW-Approximation von X.
Ist $n \in \mathbb{N}$ und ist X ein n-zusammenhängender Raum, so kann man eine CW-Approximation (Y, f) von X finden, die $Y_n = \bullet$ erfüllt.
2. *Sind X, X' topologische Räume, sind (Y, f) bzw. (Y', f') CW-Approximationen von X bzw. X' und ist $g\colon X \longrightarrow X'$ stetig, so gibt es eine (bis auf zelluläre Homotopie eindeutige) zelluläre Abbildung $\widetilde{g}\colon Y \longrightarrow Y'$ mit*
$$g \circ f \simeq_{\mathsf{Top}} f' \circ \widetilde{g}.$$

Beweisskizze. Der Beweis beruht auf einer induktiven Konstruktion der CW-Approximation (bzw. von zellulären Abbildungen dazwischen); diese induktive Konstruktion verläuft ähnlich zur Konstruktion von Eilenberg-MacLane-Räumen in der Vorlesung Algebraische Topologie I. □

Als direkte Konsequenzen aus diesem Satz erhalten wir:

Korollar 4.75 (CW-Approximation als Funktor)**.** *Es gibt einen (bis auf natürliche Isomorphismen eindeutigen) Funktor*
$$A\colon\ \mathsf{Top}_h \longrightarrow \mathsf{CW}_h$$
mit folgenden Eigenschaften:

- *Die Komposition $\mathsf{CW}_h \longrightarrow \mathsf{Top}_h \xrightarrow{A} \mathsf{CW}_h$ ist die Identität, wobei der linke Funktor durch Vergessen der CW-Struktur gegeben ist.*
- *Sind X und Y schwach homotopieäquivalente topologische Räume, so gilt*
$$A(X) = A(Y).$$

5. Ausblick

Zum Abschluss geben wir noch einen kurzen Ausblick zu weiterführenden Themen und offenen Fragen, mit denen wir uns bisher noch nicht beschäftigen konnten:

- Können wir singuläre Homologie so verfeinern, dass wir graduierte Algebren statt graduierten Moduln erhalten?
- Wie verhält sich (Ko)Homologie (topologisch und algebraisch) bezüglich gewissen algebraischen Operationen?
- Gibt es (Ko)Homologietheorien, die sich essentiell von singulärer (Ko)Homologie unterscheiden?
- Welche besonderen Eigenschaften hat singuläre (Ko)Homologie von Mannigfaltigkeiten?
- Wie kann man (Ko)Homologie topologischer Räume einsetzen, um Gruppentheorie besser zu verstehen?

5.1. Produktstrukturen

Wir haben bisher Homologietheorien auf topologischen Räumen betrachtet; diese liefern graduierte Moduln. Außer den Verbindungshomomorphismen kennen wir jedoch noch keinen Bezug zwischen den Moduln in den einzelnen Graden.

Frage 5.1. *Können wir singuläre Homologie so verfeinern, dass wir graduierte Algebren statt graduierten Moduln erhalten?*

Auf singulärer Homologie geht dies nicht auf sinnvolle Art und Weise. Man kann aber die Konstruktion dualisieren (dies liefert sogenannte *singuläre Kohomologie*) und dann zeigen, dass diese Theorie eine entsprechende Produktstruktur besitzt: Ist R ein Ring mit Eins, so definiert man

$$H^*(\,\cdot\,;R) := H^*\big(\mathrm{Hom}_Z\big(C(\,\cdot\,;\mathbb{Z}),R\big)\big).$$

Durch das Dualisieren wird jedoch die Richtung der Morphismen „umgedreht“, d.h. man erhält einen kontravarianten Funktor, keinen kovarianten. Im Fall von Mannigfaltigkeiten ist diese Theorie (mit $\mathbb{R}$-Koeffizienten) mit de Rham-Kohomologie verwandt.

Die zusätzliche Produktstruktur auf $H^*(\,\cdot\,;R)$ ist in vielen Fällen äußerst nützlich (zum Beispiel bei reell- oder komplex-projektiven Räumen), insbesondere im Zusammenhang mit Konfigurationsräumen in der Robotik.[14]

5.2. Universelle Koeffizienten

Frage 5.2. *Wie verhält sich (Ko)Homologie (topologisch und algebraisch) bezüglich gewissen algebraischen Operationen?*

Genauer betrachten wir die Fragen in Abbildung (5.3); dabei sei R ein Ring mit Eins, X und Y seien topologische Räume und C und D seien $\mathbb{Z}$-Kettenkomplexe.

[14] M. Farber. *Topological Robotics*, 2007. http://agt.cie.uma.es/∼cata/robotics.pdf

topologisch	*algebraisch*
(Wie) Kann man $H_*(X;R)$ aus $H_*(X;\mathbb{Z})$ berechnen? Und umgekehrt??	(Wie) Kann man $H_*(C \otimes_{\mathbb{Z}} R)$ aus $H_*(C)$ berechnen?
(Wie) Kann man $H_*(X \times Y;\mathbb{Z})$ aus $H_*(X;\mathbb{Z})$ und $H_*(Y;\mathbb{Z})$ berechnen?	(Wie) Kann man $H_*(C \otimes_{\mathbb{Z}} D)$ aus $H_*(C)$ und $H_*(D)$ berechnen?
Was hat $C(X \times Y)$ mit $C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y)$ zu tun?	
(Wie) Kann man $H^*(X;\mathbb{Z})$ aus $H_*(X;\mathbb{Z})$ berechnen?	(Wie) Kann man $H^*(\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,\mathbb{Z}))$ aus $H_*(C)$ berechnen?

Abbildung (5.3): Vererbungseigenschaften von (Ko)Homologie?

Bei all diesen Fragen stoßen wir auf dasselbe Problem: Tensorprodukt- und Hom-Funktoren bilden im allgemeinen exakte Sequenzen *nicht* auf exakte Sequenzen ab und sind daher im allgemeinen *nicht* mit Homologie verträglich.

Dieses Problem lässt sich mit dem Hilfsmittel der sogenannten abgeleiteten Funktoren aus der homologischen Algebra behandeln.

5.3. Weitere (Ko)Homologietheorien

Frage 5.4. *Gibt es (Ko)Homologietheorien, die sich essentiell von singulärer (Ko)Homologie unterscheiden?*

Zwei prominente Beispiele dafür sind die Bordismustheorien (Homologietheorien) und topologische K-Theorie (Kohomologietheorie; kovariante Version davon: K-Homologie topologischer Räume).

Wir skizzieren kurz die Definition von *unorientiertem Bordismus*: Die grundlegende Idee hinter Bordismus ist, (singuläre) Simplizes und ihre Ränder durch (singuläre, glatte) Mannigfaltigkeiten und ihre Ränder zu ersetzen:

– Ist X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$, so definieren wir

$$\Omega_n^{\mathrm{O}}(X) := \big\{(M,f) \;\big|\; M \text{ geschlossene } n\text{-Mannigfaltigkeit},\ f \in \mathrm{map}(M,X)\big\} \,/\!\sim .$$

Eine Mannigfaltigkeit heißt *geschlossen*, wenn sie kompakt ist und ihr Rand leer ist. Die Äquivalenzrelation „$\sim$“ ist dabei wie folgt definiert: Sind M, M' geschlossene n-Mannigfaltigkeiten und sind $f \in \mathrm{map}(M,X)$, $f' \in \mathrm{map}(M',X)$, so schreiben wir $(M,f) \sim (M',f')$, wenn es eine $(n+1)$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit W mit Rand ∂W und eine stetige Abbildung $F\colon W \longrightarrow X$ mit folgenden Eigenschaften gibt (Abbildung (5.5)):

– Es ist $\partial W = B \sqcup B'$

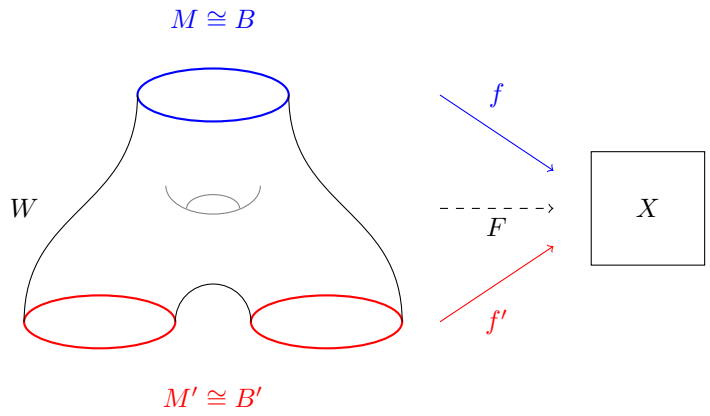


Abbildung (5.5): Bordismus über X, schematisch

– und es gibt Homöomorphismen $b\colon M \longrightarrow B$ und $b'\colon M' \longrightarrow B'$ mit

$$f = F \circ b \quad \text{und} \quad f' = F \circ b'.$$

In diesem Fall sind (M, f) und (M', f') *über* X *bordant* und (W, F) ist ein entsprechender *Bordismus zwischen* (M, f) *und* (M', f'). Die obige Relation „$\sim$“ ist tatsächlich eine Äquivalenzrelation (Transitivität folgt durch Verklebung von Bordismen entlang von Randkomponenten).

– Auf $\Omega_n^{\mathrm{O}}(X)$ betrachten wir die Verknüpfung, die repräsentantenweise durch disjunkte Vereinigung gegeben ist. Dies macht $\Omega_n^{\mathrm{O}}(X)$ zu einer abelschen Gruppe.
– Ist $g\colon X \longrightarrow Y$ stetig, so ist

$$\begin{aligned} \Omega_n^{\mathrm{O}}(X) &\longrightarrow \Omega_n^{\mathrm{O}}(Y) \\ [M, f] &\longmapsto [M, g \circ f] \end{aligned}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Dadurch wird Ω_n^{O} zu einem Funktor

$$\Omega_n^{\mathrm{O}}\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Ab}\,.$$

Man kann diese Definition (mithilfe von Mannigfaltigkeiten mit Rand/Ecken) auch auf Raumpaare erweitern; durch Bildung des topologischen Randes erhält man passende Verbindungshomomorphismen und klassische Methoden (der Differentialtopologie) zeigen, dass man so eine Homologietheorie bekommt. Und $\Omega_*^{\mathrm{O}}(\bullet)$ besitzt sogar eine geeignete Produktstruktur (gegeben durch repräsentantenweises Produkt von Mannigfaltigkeiten).

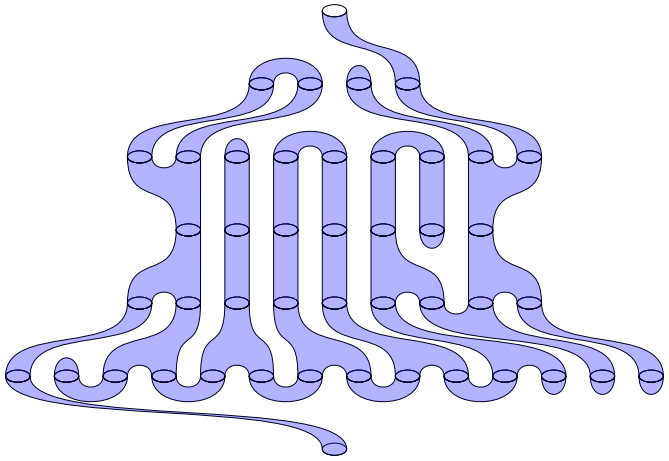


Abbildung (5.7): Ein Blorxismus (über $\bullet$) zwischen S^1 und S^1

Beispiel 5.6.

- Das neutrale Element der Bordismusgruppen ist durch $[\emptyset, \emptyset]$ gegeben.
- Sei X ein topologischer Raum, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $[M, f] \in \Omega_n^{\mathrm{O}}(X)$. Dann zeigt der Zylinder $M \times [0,1]$ zusammen mit

$$\begin{aligned} M \times [0,1] &\longrightarrow X \\ (x,t) &\longmapsto f(x), \end{aligned}$$

  dass $[M, f] + [M, f] = 0 \in \Omega_n^{\mathrm{O}}(X)$. Also können wir $\Omega_n^{\mathrm{O}}(X)$ als Vektorraum über $\mathbb{Z}/2$ auffassen.
- Ist X ein wegzusammenhängender Raum, so ist

$$\Omega_0^{\mathrm{O}}(X) \cong \mathbb{Z}/2.$$

- Die Koeffizienten, d.h. die Gruppen $(\Omega_n^{\mathrm{O}}(\bullet))_{n\in\mathbb{N}}$ sind für alle $n \in \mathbb{N}$ bekannt. Zum Beispiel gilt $\Omega_1^{\mathrm{O}}(\bullet) \cong 0$; dies kann man sich leicht überlegen – es ist jedoch zu beachten, dass Bordismen zwischen eindimensionalen Mannigfaltigkeiten durchaus bereits „kompliziert“ sein können (Abbildung (5.7)). Außerdem ist $\Omega_2^{\mathrm{O}}(\bullet) \cong \mathbb{Z}/2$ (wobei diese Gruppe von $\mathbb{R}P^2$ erzeugt wird); dies zu zeigen erfordert jedoch tiefere Methoden.

Es stellt sich heraus, dass unorientierter Bordismus und singuläre Homologie sehr nahe miteinander verwandt sind: Für alle topologischen Räume X und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt nämlich (als Tensorprodukt von graduierten Moduln)

$$\Omega_n^{\mathrm{O}}(X) \cong \bigoplus_{k\in\{0,\dots,n\}} H_k(X; \mathbb{Z}/2) \otimes_{\mathbb{Z}/2} \Omega_{n-k}^{\mathrm{O}}(X)$$

(dies ist jedoch *nicht* offensichtlich). Signifikant verschieden davon ist jedoch der sogenannte *orientierte Bordismus* Ω^{SO}, der über sogenannte orientierte Mannigfaltigkeiten definiert wird.

Topologische K-Theorie ist eine Kohomologietheorie, die über Äquivalenzklassen von Vektorbündeln über topologischen Räumen definiert ist; diese Theorie ist 2-periodisch (via *Bott-Periodizität*) und daher *keine* gewöhnliche Kohomologietheorie. Auch diese Theorie ist signifikant von singulärer Kohomologie verschieden.

Sowohl für die Bordismustheorien als auch für topologische K-Theorie gibt es alternative homotopietheoretische Beschreibungen. Aus dieser Erkenntnis hat sich stabile Homotopietheorie und damit die Theorie der *Spektren*[15] entwickelt. Tatsächlich stellt sich heraus, dass *alle* (Ko)Homologietheorien eine solche homotopietheoretische Beschreibung zulassen (*Brownscher Darstellungssatz*).

5.4. (Ko)Homologie von Mannigfaltigkeiten

Frage 5.8. *Welche besonderen Eigenschaften hat singuläre (Ko)Homologie von Mannigfaltigkeiten?*

Sei M eine kompakte n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand.

- Dann gibt es eine topologische Beschreibung des Orientierbarkeitsbegriffs für M durch $H_*(M;\mathbb{Z})$, der dem geometrischen Orientierbarkeitsbegriff entspricht. Ist M orientierbar, so ist
$$H_n(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}.$$
Wählt man eine Orientierung auf M, so erhält man einen entsprechenden Erzeuger $[M]_{\mathbb{Z}} \in H_n(M;\mathbb{Z})$, die *Fundamentalklasse von M*. Ist M triangulierbar, so kann man die Fundamentalklasse $[M]_{\mathbb{Z}}$ auch durch Triangulierungen beschreiben.
- Insbesondere gibt es für orientierte kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand eine entsprechende Theorie für Abbildungsgrade. Im glatten Fall kann dies auch differentialtopologisch beschrieben werden.
- Für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt es einen Isomorphismus
$$\cdot \cap [M]_{\mathbb{Z}} \colon H^k(M;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_{n-k}(M;\mathbb{Z}).$$
Dieses Phänomen wird als *Poincaré-Dualität* bezeichnet und hat weitreichende Konsequenzen für die Topologie und Geometrie von Mannigfaltigkeiten. Auch Poincaré-Dualität besitzt im glatten Fall eine explizite differentialtopologische Beschreibung (Abbildung (5.9)).

5.5. (Ko)Homologie von Gruppen

Frage 5.10. *Wie kann man (Ko)Homologie topologischer Räume einsetzen, um Gruppentheorie besser zu verstehen?*

[15] nicht die Spektren aus der Funktionalanalysis oder der algebraischen Geometrie ...

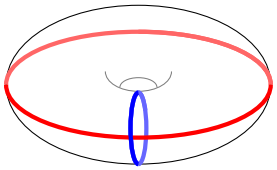


Abbildung (5.9): Die Zykel, die dem roten bzw. blauen Kreis entsprechen, sind durch Poincaré-Dualität miteinander verbunden

Mithilfe der sogenannten Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $K(\,\cdot\,,1)$ erhalten wir einen Funktor $\mathsf{Group} \longrightarrow \mathsf{Top}_{\mathsf{h}}$ (bzw. punktierte Versionen davon), der ein einseitiges Inverses zum Fundamentalgruppenfunktor liefert. Somit erhalten wir durch Verknüpfung mit singulärer (Ko)Homologie *(Ko)Homologie von Gruppen*. Diese Theorie besitzt außerdem auch eine algebraische Beschreibung (durch abgeleitete Funktoren). Dieses Zusammenspiel zwischen Topologie und Algebra hat in der Gruppentheorie zum Beispiel die folgenden Anwendungen:

- Endlichkeitsbegriffe in der Gruppentheorie, die „endlich erzeugt“ und „endlich präsentiert“ verfeinern.
- Beschreibung/Klassifikation von Erweiterungen von Gruppen (mit abelschem Kern).
- Welche Gruppen können frei (und eigentlich) auf Sphäre operieren?
- ...

A. Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie

Wir sammeln die wichtigsten Grundbegriffe und Aussagen aus der mengentheoretische Topologie aus den Grundvorlesungen. Detailliertere Erklärungen, sowie Beispiele finden sich in allen Büchern über mengentheoretische Topologie.

A.1. Topologische Räume

Die Grundidee topologischer Räume ist, Nähe nicht durch Abstände, sondern durch Systeme von Teilmengen auszudrücken – den sogenannten offenen Mengen:

Definition A.1 (topologischer Raum, Topologie)**.** Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, T), wobei X eine Menge und T eine *Topologie auf* X ist, d.h. T ist eine Teilmenge der Potenzmenge $P(X)$ von X mit folgenden Eigenschaften:

- Es ist $\emptyset \in T$ und $X \in T$.
- Ist $U \subset T$, so ist $\bigcup U \in T$.
- Ist $U \subset T$ endlich, so ist $\bigcap U \in T$.

Die Elemente von T heißen *offene Mengen* (bezüglich T); ist $A \subset X$ und $X \setminus A \in T$, so heißt A *abgeschlossen* (bezüglich T).

Warum man gerade diese Axiome für offene Mengen betrachtet, kann man gut anhand des Beispiels metrischer Räume illustrieren:

Proposition A.2 (die von einer Metrik induzierte Topologie)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist*

$$T := \big\{U \subset X \;\big|\; \forall_{x\in U} \quad \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} \quad U(x,\varepsilon) \subset U\big\}$$

eine Topologie auf X. Man nennt T die von d auf X induzierte Topologie*. Dabei verwenden wir für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ die Notation*

$$U(x,\varepsilon) := \big\{y \in X \;\big|\; d(y,x) < \varepsilon\big\}.$$

Bemerkung A.3.

- Der Begriff offener Mengen bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ stimmt also mit dem Begriff aus der Analysis I überein.
- Die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ heißt *Standardtopologie auf* $\mathbb{R}^n$.
- Ist (X, d) ein metrischer Raum, ist $x \in X$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist $U(x, \varepsilon)$ in X offen. D.h. offene Bälle sind tatsächlich offene Mengen bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie.
- Analog zum Fall von Teilmengen von $\mathbb{R}$ kann Abgeschlossenheit in metrischen Räumen auch durch Konvergenz von Folgen ausgedrückt werden. Daraus folgt, dass abgeschlossene Bälle tatsächlich bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie abgeschlossen sind.

Caveat A.4. Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar! (Korollar A.26).

Bemerkung A.5 (Klumpentopologie, diskrete Topologie)**.** Sei X eine Menge.
- Dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, die sogenannte *Klumpentopologie auf X*.
- Außerdem ist $P(X)$ eine Topologie auf X, die sogenannte *diskrete Topologie auf X*; iese stimmt mit der von der diskreten Metrik induzierten Topologie überein.

Zwei elementare Konstruktionen topologischer Räume sind Teilräume und Produkte:

Bemerkung A.6 (Teilraumtopologie)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist

$$\{U \cap Y \mid U \in T\}$$

eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraumtopologie*. Ist T auf X von einer Metrik d auf X induziert, so stimmt die Teilraumtopologie auf Y mit der von d auf Y induzierten Metrik induzierten Topologie überein.

Bemerkung A.7 (Produkttopologie)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Dann ist

$$\left\{U \subset X \times Y \;\middle|\; \forall_{x \in U} \quad \exists_{U_X \in T_X} \quad \exists_{U_Y \in T_Y} \quad x \in U_X \times U_Y \subset U\right\}$$

eine Topologie auf $X \times Y$, die sogenannte *Produkttopologie*.

Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stimmt dabei mit der Produkttopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ überein. Die Produkttopologie erfüllt auch die universelle Eigenschaft des Produkts im kategorientheoretischen Sinne.

Außerdem ist es oft nützlich, die folgenden Begriffe zur Verfügung zu haben:

Definition A.8 ((offene) Umgebung)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.
- Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine *offene Umgebung von x*, wenn U offen ist und $x \in U$ ist.
- Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine *Umgebung von x*, wenn es eine offene Umgebung $V \subset X$ von x mit $V \subset U$ gibt.

Definition A.9 (Abschluss, Inneres, Rand)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$.
- Das *Innere von Y* ist

  $$Y^\circ := \bigcup \{U \mid U \in T \text{ und } U \subset Y\}.$$

  D.h. Y° ist die (bezüglich Inklusion) größte in X offene Menge, die in Y enthalten ist.
- Der *Abschluss von Y* ist

  $$\overline{Y} := \bigcap \{A \mid X \setminus A \in T \text{ und } Y \subset A\}.$$

  D.h. $\overline{Y}$ ist die (bezüglich Inklusion) kleinste in X abgeschlossene Menge, die Y enthält.
- Der *Rand von Y* ist

  $$\partial Y := \overline{Y} \cap \overline{(X \setminus Y)}.$$

A.2. Stetige Abbildungen

Stetige Abbildungen spielen die Rolle der strukturverträglichen Abbildungen in der Welt der topologischen Räume:

Definition A.10 (stetig)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist *stetig* (bezüglich T_X und T_Y), wenn

$$\forall_{U \in T_Y} \quad f^{-1}(U) \in T_X,$$

d.h., wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Bemerkung A.11.

- Für Abbildungen vom Typ $X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ stimmt dieser Begriff von Stetigkeit mit dem aus der Analysis I überein.
- Dasselbe Argument über das ε-δ-Kriterium zeigt: Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen stimmt dieser Begriff von Stetigkeit mit dem bereits zuvor definierten überein.
- Sei X eine Menge und seien T bzw. T' Topologien auf X. Dann ist die Identität $\mathrm{id}_X\colon (X, T) \longrightarrow (X, T')$ genau dann stetig, wenn $T' \subset T$ ist, d.h. wenn T' gröber als T ist.
- Die Abbildungen $+, \cdot, -\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $/\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind bezüglich der Standardtopologie stetig.
- Ist (X, T) ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Inklusion $Y \hookrightarrow X$ bezüglich der Teilraumtopologie auf Y stetig.
- Konstante Abbildungen sind stetig.

Proposition A.12 (Vererbungseigenschaften stetiger Abbildungen)**.** *Seien (X, T_X), (Y, T_Y) und (Z, T_Z) topologische Räume und seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.*

1. *Sind f und g stetig, so ist auch $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ stetig.*
2. *Ist f stetig und ist $A \subset X$, so ist auch die Einschränkung $f|_A\colon A \longrightarrow Y$ stetig (bezüglich der Teilraumtopologie auf A).*
3. *Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f\colon X \longrightarrow f(X)$ bezüglich der Teilraumtopologie auf $f(X)$ stetig ist.*

Proposition A.13 (Verkleben stetiger Funktionen)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume, seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $A \cup B = X$ und seien $f\colon A \longrightarrow Y$ und $g\colon B \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen (bezüglich der Teilraumtopologie auf A bzw. B) mit $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Dann ist die (wohldefinierte) Abbildung*

$$\begin{aligned} f \cup_{A\cap B} g\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ g(x) & \text{falls } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

stetig.

Der Isomorphiebegriff in der Kategorie der topologischen Räume ist Homöomorphie:

Definition A.14 (Homöomorphismus)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist ein *Homöomorphismus*, wenn sie stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt. Falls es einen Homöomorphismus $X \longrightarrow Y$ gibt, heißen X und Y *homöomorph*.

Caveat A.15. *Nicht* jede stetige bijektive Abbildung ist ein Homöomorphismus!

Anschaulich gesprochen sind topologische Räume genau dann homöomorph, wenn man sie durch „verbiegen“ und „aufblasen/schrumpfen“ ineinander überführen kann, ohne zu „schneiden“ oder zu „kleben“.

A.3. (Weg-)Zusammenhang

Einer der zentralen Sätze über stetige Funktionen vom Typ $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der Zwischenwertsatz. Im allgemeineren Kontext der topologischen Räume kann man dieses Phänomen durch die Begriffe Wegzusammenhang und Zusammenhang beschreiben.

Definition A.16 (Weg, wegzusammenhängend)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum.
- Ein *Weg in X* ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ (bezüglich der Standardtopologie auf $[0, 1] \subset \mathbb{R}$). Man nennt $\gamma(0)$ den *Startpunkt* und $\gamma(1)$ den *Endpunkt von γ*. Der Weg γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist.
- Der Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Für alle $x, y \in X$ gibt es einen Weg $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Bemerkung A.17.
- Das Einheitsintervall ist (bezüglich der Standardtopologie) wegzusammenhängend.
- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend (bezüglich der Standardtopologie).
- Ist X eine Menge mit $|X| \geq 2$, so ist X bezüglich der diskreten Topologie *nicht* wegzusammenhängend.

Proposition A.18 (Stetigkeit und Wegzusammenhang)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so ist auch $f(X)$ bezüglich der Teilraumtopologie wegzusammenhängend.*

Insbesondere gilt: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn Y wegzusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Wegzusammenhang ist eine topologische Invariante.

Zum Beispiel kann man diese Eigenschaft (und einen kleinen Trick) verwenden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ nur dann zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist (bezüglich der Standardtopologie), wenn $n = 1$ ist.

Eine Abschwächung des Wegzusammenhangsbegriffs ist Zusammenhang:

Definition A.19 (zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum (X, T_X) ist *zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Für alle $U, V \in T_X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$ ist bereits $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. (D.h. X lässt sich nur trivial in offene Mengen zerlegen).

Bemerkung A.20. Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist bezüglich der Standardtopologie zusammenhängend.

Proposition A.21 (Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang)**.** *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

Caveat A.22. Es gibt topologische Räume, die zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend sind!

In diesem allgemeinen Kontext lautet der verallgemeinerte Zwischenwertsatz nun wie folgt:

Proposition A.23 (Verallgemeinerter Zwischenwertsatz)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend (bezüglich der Teilraumtopologie).*

Insbesondere: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Zusammenhang ist eine topologische Invariante.

In der algebraischen Topologie studiert man außer Zusammenhang und Wegzusammenhang auch noch höhere Zusammenhangsbegriffe.

A.4. Hausdorffräume

Die Klumpentopologie zeigt bereits, dass es viele exotische und unintuitive Topologien gibt. Daher gibt es viele Begriffe für topologische Räume, die sicherstellen, dass Räume hinreichend gutartig sind. Ein Beispiel ist der folgende Begriff, der zu den sogenannten Trennungseigenschaften gehört:

Definition A.24 (hausdorffsch)**.** Ein topologischer Raum (X, T) ist *hausdorffsch*, wenn folgendes gilt: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. (D.h. je zwei Punkte können durch offene Mengen getrennt werden.)

Proposition A.25 (metrische Räume sind hausdorffsch)**.** *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist X bezüglich der von der Metrik d auf X induzierten Topologie hausdorffsch.*

Korollar A.26. *Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$. Dann gibt es keine Metrik auf X, die die Klumpentopologie auf X induziert.*

Bemerkung A.27. Sind (X, T_X) und (Y, T_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist X genau dann hausdorffsch, wenn Y hausdorffsch ist.

Es gibt noch weitere Trennungseignschaften topologischer Räume, sowie sogenannte Abzählbarkeitseigenschaften; die Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen sind etwas unübersichtlich und können gut in dem Buch *Counterexamples in Topology* von L.A. Steen und J.A. Seebach Jr nachgelesen werden.

A.5. Kompaktheit

Einer der wichtigsten und nützlichsten topologischen Begriffe ist Kompaktheit; grob gesprochen ist Kompaktheit eine Art topologische Endlichkeitsbedingung. Wir beginnen mit der abstrakten Definition als Endlichkeitsbedingung von Überdeckungen und zeigen später, dass dieser Begriff den bisherigen Kompaktheitsbegriff in $\mathbb{R}$ verallgemeinert (Satz A.36).

Definition A.28 (kompakt)**.** Ein topologischer Raum (X, T) ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., wenn folgendes gilt: Für alle $U \subset T$ mit $\bigcup U = X$ gibt es eine endliche Teilmenge $V \subset U$ mit $\bigcup V = X$.

Bemerkung A.29. Sei X eine Menge. Dann ist X bezüglich der Klumpentopologie kompakt. Außerdem ist X genau dann bezüglich der diskreten Topologie kompakt, wenn X endlich ist.

Wir werden später eine Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ geben und zunächst allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen aus der Definition ableiten:

Proposition A.30 (Verallgemeinertes Extremalprinzip)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt (bezüglich der Teilraumtopologie).*

Korollar A.31 (Kompaktheit ist eine topologische Invariante)**.** *Insbesondere gilt: Sind (X, T_X) und (Y, T_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist X genau dann kompakt, wenn Y kompakt ist.*

Proposition A.32 (Abgeschlossenheit und Kompaktheit)**.** *Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$.*

1. *Ist X kompakt und Y in X abgeschlossen, so ist Y bezüglich der Teilraumtopologie kompakt.*
2. *Ist X hausdorffsch und Y bezüglich der Teilraumtopologie kompakt, so ist Y in X abgeschlossen.*

Korollar A.33. *Sei (X, T_X) ein kompakter topologischer Raum, sei (Y, T_Y) ein Hausdorffraum und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f bereits ein Homöomorphismus(!).*

Zum Abschluss des Abschnitts über allgemeine Kompaktheitseigenschaften betrachten wir noch die Verträglichkeit von Kompaktheit mit Produkten:

Proposition A.34 (Produkt zweier kompakter Räume)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) kompakte topologische Räume. Dann ist das Produkt $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie kompakt.*

Bemerkung A.35 (Satz von Tychonoff)**.** Der *Satz von Tychonoff*

> Beliebige (auch unendliche!) Produkte kompakter topologischer Räume sind kompakt.

ist äquivalent zum Auswahlaxiom (!), und damit auch äquivalent zum Zornschen Lemma bzw. dem Wohlordnungssatz.

In euklidischen Räumen gibt es eine einfache Charakterisierung kompakter Mengen:

Satz A.36 (Satz von Heine-Borel)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten auf A die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Teilraumtopologie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Menge A ist kompakt.*
2. *Die Menge A ist in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt und abgeschlossen.*
3. *Die Menge A ist bezüglich der euklidischen Metrik* folgenkompakt*, d.h. jede Folge in A besitzt eine bezüglich der euklidischen Metrik konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in A liegt.*

Etwas allgemeiner gilt auch:

Proposition A.37. *Kompakte Mengen in metrischen Räumen sind beschränkt und abgeschlossen.*

Caveat A.38. Die Umkehrung der obigen Proposition gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. es gibt beschränkte und abgeschlossene Mengen in gewissen (sogar vollständigen) metrischen Räumen, die *nicht* kompakt sind (zum Beispiel sind unendliche Mengen bezüglich der diskreten Metrik in sich selbst beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt).

B. Homologische Algebra

Dieses Kapitel enthält die für die algebraische Topologie nötigen Grundlagen aus der homologischen Algebra. Homologische Algebra ist die Algebra von exakten bzw. nicht-exakten Sequenzen und Funktoren, die Exaktheit erhalten bzw. nicht erhalten.

Wir betrachten der Einfachheit halber nur homologische Algebra in Modulkategorien statt in allgemeinen sogenannten abelschen Kategorien; nach dem Einbettungssatz von Freyd-Mitchell ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung.

B.1. Exakte Sequenzen

Wir geben eine kurze Einführung in exakte Sequenzen; wir formulieren alles für Linksmoduln – analog geht dies natürlich auch für Rechtsmoduln.

Setup B.1. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition B.2 ((kurze) exakte Sequenz)**.**

- Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist *exakt an der Stelle* B, wenn $\operatorname{im} f = \ker g$ ist.
- Wir nennen eine Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

  in ${}_R\mathsf{Mod}$ eine *kurze exakte Sequenz in* ${}_R\mathsf{Mod}$, wenn die Sequenz an allen Stellen exakt ist (d.h. f ist injektiv, g ist surjektiv, und $\operatorname{im} f = \ker g$).
- Eine $\mathbb{N}$- oder $\mathbb{Z}$-indizierte Sequenz

$$\cdots \longrightarrow A_k \xrightarrow{f_k} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-2} \longrightarrow \cdots$$

  in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist.

Beispiel B.3. Die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & (x,0) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (x,y) & \longmapsto & y & & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & 2 \cdot x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \longmapsto & [x] & & \end{array}$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} = \mathsf{Ab}$ sind exakt; man beachte dabei, dass die mittleren Moduln *nicht* isomorph sind, obwohl die äußeren isomorph sind. Die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \longmapsto & x & & \end{array}$$

ist *nicht* exakt.

Caveat B.4. Ist S ein Ring mit Eins, so bilden Funktoren ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ im allgemeinen exakte Sequenzen *nicht* auf exakte Sequenzen ab.

Besonders einfache exakte Sequenzen sind die sogenannten spaltenden exakten Sequenzen (die sich außerdem auch unter Funktoren besser verhalten als allgemeine exakte Sequenzen):

Proposition B.5 (spaltende exakte Sequenzen)**.** *Sei*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt einen R-Modulhomomorphismus $r\colon C \longrightarrow B$ mit $p \circ r = \mathrm{id}_C$.*
2. *Es gibt einen R-Modulhomomorphismus $s\colon B \longrightarrow A$ mit $s \circ i = \mathrm{id}_A$.*

Falls diese Aussagen zutreffen, nennt man die obige Sequenz eine spaltende kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ *und in diesem Fall sind*

$$\begin{array}{ccccc} A \oplus C & \longrightarrow & B & \longrightarrow & A \oplus C \\ (a,c) & \longmapsto & (i(a), r(c)) & & \\ & & b & \longmapsto & (s(b), p(b)) \end{array}$$

Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$*.*

Beweisskizze. Wir zeigen die Implikation $2 \Longrightarrow 1$: Sei also $s\colon B \longrightarrow A$ ein Homomorphismus mit $s \circ i = \mathrm{id}_A$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \widetilde{r}\colon B &\longrightarrow B \\ b &\longmapsto b - i \circ s(b). \end{aligned}$$

Dann ist $\ker p \subset \ker \widetilde{r}$, denn: Sei $b \in \ker p$. Wegen der Exaktheit existiert also ein $a \in A$ mit $i(a) = b$ und es folgt

$$\widetilde{r}(b) = i(a) - i \circ s(i(a)) = i(a) - i(\mathrm{id}_A(a)) = 0.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten induziert $\widetilde{r}$ somit einen Homomorphismus $r\colon C \cong B/\ker p \longrightarrow B$ und dieser erfüllt nach Konstruktion $p \circ r = \mathrm{id}_C$.

Ähnlich zeigt man die Implikation $1 \Longrightarrow 2$.

Falls die Aussagen 1 und 2 erfüllt sind, rechnet man leicht nach, dass die angegebenen Homomorphismen zwischen B und $A \oplus C$ bijektiv (und somit Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$) sind. □

Beim Vergleich von exakten Sequenzen ist oft das Fünfer-Lemma nützlich:

Proposition B.6 (Fünfer-Lemma)**.** *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_D} & & \downarrow{\scriptstyle f_E} \\ A' & \xrightarrow[a']{} & B' & \xrightarrow[b']{} & C' & \xrightarrow[c']{} & D' & \xrightarrow[d']{} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Dann gilt:

1. *Sind f_B, f_D injektiv und ist f_A surjektiv, so ist f_C injektiv.*
2. *Sind f_B, f_D surjektiv und ist f_E injektiv, so ist f_C surjektiv.*
3. *Insbesondere gilt: Sind f_A, f_B, f_D, f_E Isomorphismen, so ist f_C ein Isomorphismus.*

Beweisskizze. Wir beweisen den ersten Teil mithilfe einer sogenannten Diagrammjagd (viele Aussagen in der homologischen Algebra werden auf diese Weise bewiesen). Der Beweis des zweiten Teils geht analog; der dritte Teil ist eine direkte Folgerung aus den ersten beiden Teilen.

Es seien also f_B und f_D injektiv und f_A sei surjektiv. Sei $x \in C$ mit $f_C(x) = 0$. Dann ist $x = 0$, denn (Abbildung (B.7)):

- Wegen $f_D \circ c(x) = c' \circ f_C(x) = c'(0) = 0$ und der Injektivität von f_D folgt $c(x) = 0$.
- Wegen $\operatorname{im} b = \ker c$ existiert ein $y \in B$ mit $b(y) = x$.
- Wegen $b' \circ f_B(y) = f_C \circ b(y) = f_C(x) = 0$ und $\operatorname{im} a' = \ker b'$ folgt: Es gibt ein $z' \in A'$ mit $a'(z') = f_B(y)$.
- Da f_A surjektiv ist, existiert ein $z \in A$ mit $f_A(z) = z'$.
- Dabei ist $a(z) = y$, denn: Es gilt

  $$f_B\big(a(z)\big) = a' \circ f_A(z) = a'(z') = f_B(y)$$

  und f_B ist injektiv.
- Also ist (wegen $\operatorname{im} a \subset \ker b$)

  $$x = b(y) = b \circ a(z) = 0,$$

  wie gewünscht. □

Für den Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz 2.27) verwenden wir die folgende Konstruktion langer exakter Sequenzen:

Proposition B.8 (algebraische Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{c_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{a_k} & B_k & \xrightarrow{b_k} & C_k & \xrightarrow{c_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{a_{k-1}} & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{A,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{B,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{C,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{A,k-1}} & & \\ \cdots & \xrightarrow[c'_{k+1}]{} & A'_k & \xrightarrow[a'_k]{} & B'_k & \xrightarrow[b'_k]{} & C'_k & \xrightarrow[c'_k]{} & A'_{k-1} & \xrightarrow[a'_{k-1}]{} & \cdots \end{array}$$

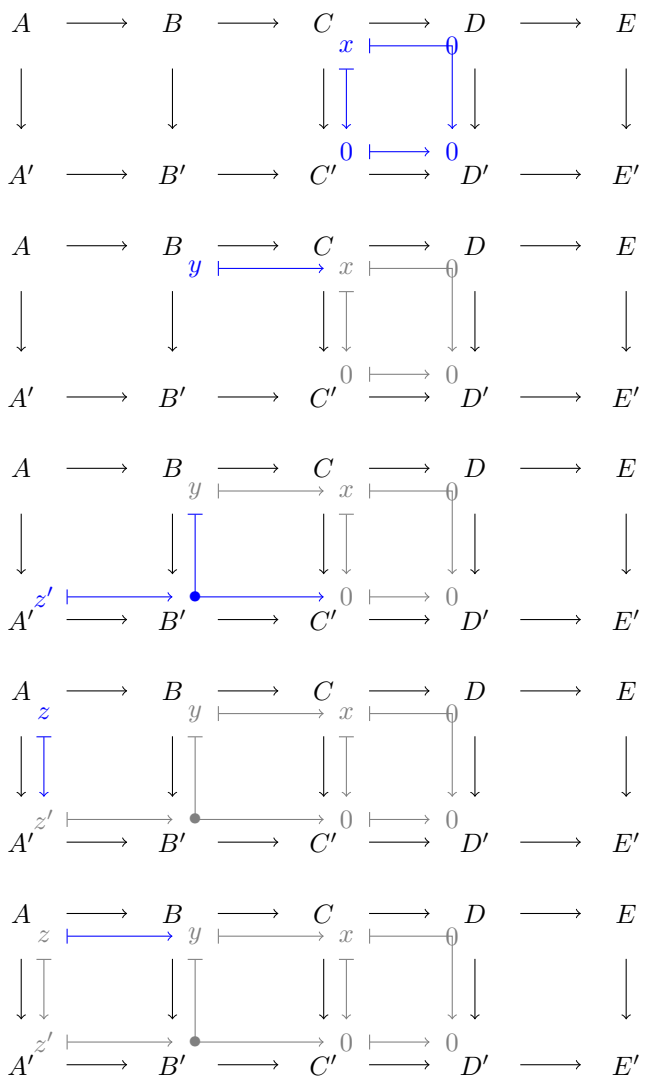


Abbildung (B.7): Die Diagrammjagd aus dem Fünfer-Lemma

ein ($\mathbb{Z}$-indiziertes) kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Außerdem sei $f_{C,k}\colon C_k \longrightarrow C'_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k\colon B'_k \longrightarrow A_{k-1}.$$

Dann ist die Sequenz

$$\cdots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} A_k \xrightarrow{(f_{A,k},-a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k \oplus f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\Delta_k} A_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

exakt.

Beweisskizze. Dies folgt aus einer Diagrammjagd. □

B.2. Kettenkomplexe und Homologie

Wir führen nun allgemeine algebraische Begrifflichkeiten zur Konstruktion von Homologie ein; diese beruhen historisch auf den ersten geometrischen Homologietheorien.

Setup B.9. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition B.10 (Kettenkomplex, Zykel, Rand)**.** Ein *Links-R-Modul-Kettenkomplex* ist eine Paar $C = (C_*, \partial_*)$, wobei $C_* = (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Links-R-Moduln (den sogenannten *Kettenmoduln*) und $\partial_* = (\partial_k\colon C_k \longrightarrow C_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von R-Modulhomomorphismen (den sogenannten *Randoperatoren* oder *Differentialen*) mit

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$.

- Die Elemente von C_k heißen *k-Ketten*.
- Die Elemente von $Z_kC := \ker \partial_k$ heißen *k-Zykel*.
- Die Elemente von $B_kC := \operatorname{im} \partial_{k+1}$ heißen *k-Ränder*.

Analog kann man z.B. auch $\mathbb{N}$-indizierte Kettenkomplexe definieren.

Beispiel B.11 (Kettenkomplexe)**.**

- Lange exakte Sequenzen liefern Kettenkomplexe, aber nicht alle Kettenkomplexe sind exakt.
- Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex und ist $Z \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so ist
$$Z \otimes_R C := \big((Z \otimes_R C_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\mathrm{id}_Z \otimes_R \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$
ein Kettenkomplex abelscher Gruppen.

Caveat B.12. Ist ein Kettenkomplex C exakt und ist $Z \in \mathsf{Mod}_R$, so ist $Z \otimes_R C$ im allgemeinen *nicht* exakt!

Beispiel B.13 (Kettenkomplexe simplizialer Moduln)**.** Sei $S\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein Funktor (ein sogenannter *simplizialer Links-R-Modul*); dabei bezeichnet Δ^{op} die duale

Kategorie der Simplexkategorie (die man durch „Umdrehen“ der Morphismen erhält). Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$C_k(S) := \begin{cases} S\big(\Delta(k)\big) & \text{falls } k \geq 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

$$\partial_k := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot S(d_j^k) & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{falls } k \leq 0; \end{cases}$$

dabei ist $d_j^k \in \mathrm{Mor}_\Delta(\Delta(k-1), \Delta(k))$ der Morphismus, dessen Bild $\{0, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ ist. Wir schreiben

$$C(S) := \big((C_k(S))_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big).$$

Dann ist $C(S)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex. Dies ist eine der zentralen Konstruktionen von Kettenkomplexen, die hinter vielen Homologietheorien steckt.

Die passenden strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Kettenkomplexen sind Kettenabbildungen:

Definition B.14 (Kettenabbildung)**.** Seien $C = (C_*, \partial_*^C)$ und $D = (D_*, \partial_*^D)$ Links-R-Modul-Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f\colon C \longrightarrow D$ ist eine Folge $(f_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\partial_k^D \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^C$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial_k^C} & C_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_k} & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1}} & & \\ \cdots & \longrightarrow & D_k & \xrightarrow[\partial_k^D]{} & D_{k-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Beispiel B.15 (Kettenabbildungen)**.**

- Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Kettenkomplex, so ist $\mathrm{id}_C := (\mathrm{id}_{C_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C \longrightarrow C$.
- Die gradweise Komposition von Kettenabbildungen ist eine Kettenabbildung.
- Zum Beispiel ist

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_\mathbb{Z}} & & \downarrow{\scriptstyle x\mapsto(x,x)} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

  keine Kettenabbildung.

Somit erhalten wir eine Kategorie von Kettenkomplexen:

Definition B.16 (Kategorie der Kettenkomplexe)**.** Die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Links-R-Kettenkomplexe besteht aus:

– Objekte: die Klasse aller Links-R-Kettenkomplexe,
– Morphismen: Kettenabbildungen von Links-R-Kettenkomplexen,
– Verknüpfungen: gradweise Komposition von Kettenabbildungen.

Beispiel B.17 (Kettenkomplexe von simplizialen Moduln, funktoriell)**.** Zum Beispiel lässt sich die Konstruktion aus Beispiel B.13 zu einem Funktor

$$\Delta({}_R\mathsf{Mod}) \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$$

erweitern. Dabei ist $\Delta({}_R\mathsf{Mod})$ die Kategorie, deren Objekte Funktoren $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ und deren Morphismen natürliche Transformationen zwischen solchen Funktoren sind.

Wir können nun Homologie für Kettenkomplexe definieren:

Definition B.18 (Homologie)**.** Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Die *Homologie von* C ist die Folge $H_*(C) := (H_k(C))_{k\in\mathbb{Z}}$, wobei wir für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(C) := \ker \partial_k \,/\, \operatorname{im} \partial_{k+1} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$$

definieren.

Homologie misst also die Abweichung von Exaktheit:

Bemerkung B.19 (Homologie vs. Exaktheit)**.** Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann sind äquivalent:

1. Die Sequenz

$$\cdots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \cdots$$

   ist exakt.
2. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $H_k(C) \cong 0$.

Beispiel B.20. Sei C der Kettenkomplex

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

abelscher Gruppen (wobei sich die nicht-trivialen Moduln im Grad 0, 1, 2 befinden). Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$H_k(C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}. \end{cases}$$

Caveat B.21. Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so gilt im allgemeinen für $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(Z \otimes_R C) \ncong Z \otimes_R H_k(C).$$

Proposition B.22 (Homologie als Funktor)**.**

1. *Sei $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kettenabbildung in ${}_R\mathsf{Ch}$. Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei*
$$\begin{aligned} H_k(f)\colon H_k(C) &\longrightarrow H_k(D) \\ [c] &\longmapsto \big[f_k(c)\big]. \end{aligned}$$
Dann ist $H_k(f)$ ein wohldefinierter Links-R-Modul-Homomorphismus.
2. *Dies macht Homologie zu einem Funktor*
$$H_*\colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$
Dabei ist ${}_R\mathsf{Grad}$ die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten Links-R-Moduln (d.h. $\mathbb{Z}$-Folgen von Links-R-Moduln mit Folgen von Homomorphismen und komponentenweiser Komposition).

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Aus der Definition von Kettenabbildungen folgt:
- Ist $c \in C_k$ ein Zykel, so ist auch $f_k(c)$ ein Zykel.
- Sind $c, c' \in C_k$ Zykel, die dieselbe Homologieklasse repräsentieren (d.h. sich um einen Rand in C unterscheiden), so unterscheiden sich auch $f_k(c)$ und $f_k(c')$ um einen Rand in D und liefern somit dieselbe Homologieklasse.

Also ist $H_k(f)$ wohldefiniert. Offenbar ist $H_k(f)$ mit der Modulstruktur verträglich.
Der zweite Teil folgt aus der Konstruktion im ersten Teil. □

Zum Abschluss dieser Einführung in die Grundbegriffe von Kettenkomplexen und Homologie leiten wir die wichtigste Quelle für lange exakte Homologieseuqenzen her:

Satz B.23 (algebraische lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei*
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } C \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Ch}$ (d.h. die entsprechenden Sequenzen in jedem Grad sind exakt in ${}_R\mathsf{Mod}$). Dann gibt es eine lange exakte Sequenz
$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(p)} H_k(C) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A) \longrightarrow \cdots$$
Diese ist im folgenden Sinne natürlich: Ist
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\ i\ } & B & \xrightarrow{\ p\ } & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit exakten Zeilen, so ist das zugehörige Leiterdiagramm
$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(A) & \xrightarrow{H_k(i)} & H_k(B) & \xrightarrow{H_k(p)} & H_k(C) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_A)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_B)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_C)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{k-1}(f_A)} & & \\ \cdots & \xrightarrow[\partial_{k+1}]{} & H_k(A') & \xrightarrow[H_k(i')]{} & H_k(B') & \xrightarrow[H_k(p')]{} & H_k(C') & \xrightarrow[\partial_k]{} & H_{k-1}(A') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

kommutativ (mit exakten Zeilen).

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir konstruieren den Verbindungshomomorphismus

$$\partial_k \colon H_k(C) \longrightarrow H_{k-1}(A)$$

wie folgt: Sei $\gamma \in H_k(C)$; sei $c \in C_k$ ein Zykel, der γ repräsentiert. Da $p_k \colon B_k \longrightarrow C_k$ surjektiv ist, existiert ein $b \in B_k$ mit

$$p_k(b) = c.$$

Da p eine Kettenabbildung ist, ist $p_{k-1} \circ \partial_k^B(b) = \partial_k^C \circ p_k(b) = \partial_k^C(c) = 0$; aufgrund der Exaktheit im Grad k existiert somit ein $a \in A_{k-1}$ mit

$$i_{k-1}(a) = \partial_k^B(b).$$

Wir nennen in dieser Situation (a, b, c) ein *kompatibles Tripel für* γ und definieren

$$\partial_k(\gamma) := [a] \in H_{k-1}(A).$$

Mit einfachen Diagrammjagden zeigt man nun:

- Ist (a, b, c) ein kompatibles Tripel für γ, so ist $a \in A_{k-1}$ ein Zykel und repräsentiert somit tatsächlich eine Klasse in $H_{k-1}(A)$.
- Sind (a, b, c) und (a', b', c') kompatible Tripel für γ, so ist $[a] = [a']$ in $H_{k-1}(A)$.

Daran lässt sich leicht ablesen, dass ∂_k ein Homomorphismus ist und dass ∂_k natürlich ist.

Weitere Diagrammjagden liefern, dass die entstehende lange Sequenz exakt ist. □

B.3. Kettenhomotopie

Im folgenden studieren wir einen algebraischen Homotopiebegriff für Kettenabbildungen.

Setup B.24. In diesem Abschnitt sei R ein Ring mit Eins.

Wir erinnern uns zunächst an den Homotopiebegriff in Top: Stetige Abbildungen $f, g \colon X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen sind homotop, wenn es eine stetige Abbildung $h \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit

$$h \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad h \circ i_1 = g$$

gibt; dabei bezeichnen $i_0 \colon X \hookrightarrow X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ und $i_1 \colon X \hookrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ die kanonische Inklusion als Boden bzw. Deckel des Zylinders über X.

Wir übersetzen dies nun in die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Kettenkomplexe: Als ersten Schritt modellieren wir das Intervall $[0,1]$ durch einen geeigneten Kettenkomplex (Abbildung (B.26), vgl. Beispiel 4.19):

$$\begin{array}{cc} \text{Grad } 1 & \text{Grad } 0 \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto \quad (-x, x) \end{array}$$

Abbildung (B.26): ein algebraisches Modell für $[0, 1]$

Definition B.25 (algebraisches Modell für $[0, 1]$)**.** Sei $I \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ der Kettenkomplex

$$\begin{array}{lccccccccccccc} \text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & & \\ \cdots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \cdots \\ & & & & & & x & \longmapsto & (-x, x) & & & & & & \end{array}$$

Das Produkt topologischer Räume ersetzen wir durch das Tensorprodukt von Kettenkomplexen; die Definition leitet sich dabei von dem Gedanken ab, dass die Kettenmoduln in Grad k Information über k-dimensionale Phänomene enthalten und sich daher die Grade der Tensorfaktoren jeweils auch zum entsprechenden Grad summieren sollten:

Definition B.27 (Tensorprodukt von Kettenkomplexen)**.** Sei $C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$ und $D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann definieren wir $C \otimes_R D \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ durch

$$(C \otimes_R D)_k := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C_j \otimes_R D_{k-j}$$

und die Randoperatoren

$$\begin{array}{c} (C \otimes_R D)_k \longrightarrow (C \otimes_R D)_{k-1} \\ C_j \otimes_R D_{k-j} \ni c \otimes d \longmapsto \partial^C_j c \otimes d + (-1)^j \cdot c \otimes \partial^D_{k-j} d \end{array}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Dies ist tatsächlich ein Kettenkomplex!) Man beachte dabei: Trägt C auch noch eine Linksstruktur bezüglich einem Ring S, so vererbt sich diese Struktur auf das Tensorproduk $C \otimes_R D$.

Bemerkung B.28 (Wahl von Vorzeichen)**.** Wir halten uns bei der Wahl von Vorzeichen an die folgende Konvention: Wird ein Randoperator an einem Element „vorbeigezogen“, so führen wir das Vorzeichen

$$(-1)^{\text{Grad dieses Elements}}$$

ein. Man beachte jedoch, dass in der Literatur manchmal auch andere Vorzeichenkonventionen getroffen werden. Bei der Übernahme von Formeln ist also Vorsicht geboten.

Bemerkung B.29 (Funktorialität des Tensorprodukts)**.** Seien $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$, seien $D, D' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ch}_R}(C, C')$ und $g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, D')$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \otimes_R G \colon C \otimes_R D &\longrightarrow C' \otimes_R D' \\ c \otimes d &\longmapsto f(c) \otimes g(d) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Kettenabbildung in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.

Als nächsten Schritt modellieren wir die Inklusionen von Boden und Deckel von Zylindern:

Definition B.30 (algebraisches Modell der Inklusionen von Boden und Deckel in Zylindern)**.** Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so definieren wir die Kettenabbildungen

$$\begin{aligned} i_0 \colon C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I \\ C_k \ni c &\longmapsto (c, 0, 0) \in C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \cong (C \otimes_{\mathbb{Z}} I)_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 \colon C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I \\ C_k \ni c &\longmapsto (0, 0, c) \in C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \cong (C \otimes_{\mathbb{Z}} I)_k. \end{aligned}$$

Bemerkung B.31. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Eine Kettenabbildung $h \colon C \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow D$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$ entspricht einer Familie $(\widetilde{h}_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_{k+1}))_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\partial^D_{k+1} \circ \widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{k-1} \circ \partial^C_k + (-1)^k \cdot g_k - (-1)^k \cdot f_k$$

(Abbildung (B.32)) bzw.

$$\partial^D_{k+1} \circ (-1)^k \cdot \widetilde{h}_k + (-1)^{k-1} \cdot \widetilde{h}_{k-1} \circ \partial^C_k = g_k - f_k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Man definiert daher:

Definition B.33 (kettenhomotop, nullhomotop, kontraktibel)**.** Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.

- Kettenabbildungen $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ heißen *kettenhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, wenn es eine Folge $h = (h_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_{k+1}))_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

  $$\partial^D_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial^C_k = g_k - f_k$$

  für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt. Man nennt dann h eine *Kettenhomotopie von f nach g (in ${}_R\mathsf{Ch}$)* und schreibt $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g$.
- Wir nennen $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ eine *Kettenhomotopieäquivalenz (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, falls es ein $g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, C)$ mit

  $$f \circ g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_D \quad \text{und} \quad g \circ d \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_C$$

  gibt. In diesem Fall schreiben wir auch $C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} D$.

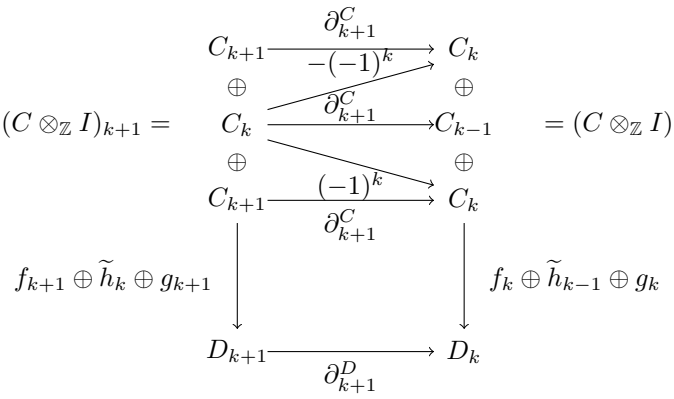


Abbildung (B.32): Herleitung des Begriffs der Kettenhomotopie

- Kettenabbildungen, die (in ${}_R\mathsf{Ch}$) zur Nullabbildung kettenhomotop sind, heißen *nullhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*.
- Der Kettenkomplex C ist *kontraktibel (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, falls id_C nullhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$) ist (bzw. äquivalent, falls C zum Nullkomplex kettenhomotopieäquivalent ist). Homotopien (in ${}_R\mathsf{Ch}$) von id_C zur Nullabbildungen werden auch *Kettenkontraktionen (in ${}_R\mathsf{Ch}$) von C* genannt.

Beispiel B.34. Sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann ist $i_0 \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} i_1 \colon C \longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I$.
Wir betrachten außerdem die Kettenabbildung

$$p \colon C \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow C$$
$$C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \ni (c_0, c, c_1) \longrightarrow c_0 + c_1 \in C_k$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$. Dann gilt $p \circ i_0 = \mathrm{id}_C$ und $i_0 \circ p \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C \otimes_{\mathbb{R}} I}$. Also ist

$$C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C \otimes_{\mathbb{Z}} I.$$

Analog zur topologischen Situation gilt:

Proposition B.35 (grundlegende Eigenschaften von Kettenhomotopie)**.**

1. *Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, f', g, g' \in \mathrm{Mor}({}_R\mathsf{Ch})$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$ und $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann gilt*
$$a \cdot f + b \cdot g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} a \cdot f' + b \cdot g'$$
für alle $a, b \in R$.
2. *Sind $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so ist „$\simeq_{{}_R\mathsf{Ch}}$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$.*
3. *Seien $C, D, E \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, seien $f, f' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ und $g, g' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, E)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$ bzw. $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann folgt*
$$g \circ f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g' \circ f'.$$

4. *Seien* $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$, $D, D' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ *und seien* $f, f' \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ch}_R}(C, C')$, $g, g' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, D')$ *mit* $f \simeq_{\mathsf{Ch}_R} f'$ *bzw.* $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. *Dann folgt*

$$f \otimes_R g \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} f' \otimes_R g'.$$

Beweisskizze. All diese Eigenschaften lassen sich direkt anhand der Definitionen nachrechnen. □

Insbesondere ist die folgende Kategorie wohldefiniert:

Definition B.36 (Homotopiekategorie der Kettenkomplexe)**.** Die *Homotopiekategorie der Kettenkomplexe* ${}_R\mathsf{Ch}$ ist die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}$, die durch die folgenden Daten gegeben ist:

- Objekte: Sei $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}) := \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.
- Morphismen: Zu $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ sei

$$[C, D] := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}}(C, d) := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D) \,/{\simeq_{{}_R\mathsf{Ch}}}\,.$$

- Verknüpfungen: repräsentantenweise Verknüpfung von Kettenabbildungen.

Die zentrale Eigenschaft des Begriffs der Kettenhomotopie ist, dass Homologie in diesem algebraischen Sinne homotopieinvariant ist:

Proposition B.37 (Homologie von Kettenkomplexen ist homotopieinvariant)**.** *Der Funktor* $H_*\colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$ *faktorisiert über* ${}_R\mathsf{Ch}_h$.

Beweisskizze. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g$; sei etwa h eine solche Kettenhomotopie. Dann ist $H_k(f) = H_k(g)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, denn: Ist $c \in C_k$ ein Zykel, so gilt nach Definition (in $H_k(D)$)

$$\begin{aligned} H_k(f)[c] &= \big[f_k(c)\big] \\ &= \big[g_k(c) - \partial^D_{k+1} \circ h_k(c) - h_{k-1} \circ \partial^C_k(c)\big] \\ &= \big[g_k(c) - \partial^D_{k+1} \circ h_k(c) - 0\big] \\ &= \big[g_k(c)\big] \\ &= H_k(g)[c], \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Analog zum topologischen Fall gibt es auch im Kontext von Kettenkomplexen Abbildungskegel:

Definition B.38 (Abbildungskegel von Kettenabbildungen)**.** Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Der *Abbildungskegel von* f ist der Kettenkomplex $\mathrm{Cone}(f) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ mit

$$\big(\mathrm{Cone}(f)\big)_k := C_{k-1} \oplus D_k$$

und den Randoperatoren

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Cone}(f)\big)_k &\longmapsto \big(\mathrm{Cone}(f)\big)_{k-1} \\ C_{k-1} \oplus D_k \ni (c, d) &\longmapsto \big(\partial^C_{k-1} c, \partial^D_k d + (-1)^k \cdot f_{k-1}(c)\big) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Dies ist tatsächlich ein Kettenkomplex.)

Im algebraischen Kontext spiegeln Abbildungskegel die Eigenschaften von Kettenabbildungen sogar noch etwas besser wider als im topologischen Fall:

Proposition B.39 (Abbildungskegel und Isomorphismen)**.** *Seien* $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ *und sei* $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$*.*

1. *Dann ist* $f\colon C \longrightarrow D$ *genau dann eine Kettenhomotopieäquivalenz in* ${}_R\mathsf{Ch}$*, wenn* $\mathrm{Cone}(f)$ *in* ${}_R\mathsf{Ch}$ *kontraktibel ist.*
2. *Es ist* $H_*(f)\colon H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ *genau dann ein Isomorphismus in* ${}_R\mathsf{Grad}$*, wenn* $H_*(\mathrm{Cone}(f)) \cong 0$ *ist.*

Caveat B.40. Kettenabbildungen, die Homologieisomorphismen induzieren, sind im allgemeinen *keine* Kettenhomotopieäquivalenzen!

Zum Beispiel liefert die Kettenabbildung

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ 2} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ Isomorphismen in Homologie; da die einzige Kettenabbildung in die andere Richtung die Nullabbildung ist und die Kettenkomplexe aber nicht kontraktibel sind (die Homologie ist nicht trivial), kann es sich dabei aber *nicht* um eine Kettenhomotopieäquivalenz handeln.