Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 11. April 2014

Aufgabe 1 (dualer Kokettenkomplex)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort (mit einem Beweis oder Gegenbeispiel).

1. Ist $C \in \operatorname{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{CoCh})$, so gibt es ein $D \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Ch}\,\mathbb{Z})$ und ein $Z \in \operatorname{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod})$ mit $C \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(D, Z)$ in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{CoCh}$.
2. Ist $C \in \operatorname{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ mit $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, \mathbb{Z}) \simeq 0$ in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{CoCh}$, so ist $C \simeq 0$ in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.

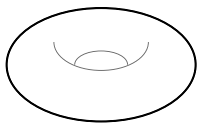
Aufgabe 2 (Kern und Kokern, abstrakt)**.**

1. Wie sind Kerne und Kokerne in additiven Kategorien definiert?
2. Wie hängen Kerne in einer additiven Kategorie A mit Kokernen in A^{op} zusammen?
3. Sei R ein Ring. Wie kann man Kerne in diesem abstrakten Sinn in der additiven Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ konkreter beschreiben?
4. Sei R ein Ring. Wie kann man Kokerne in diesem abstrakten Sinn in der additiven Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ konkreter beschreiben?

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (gewöhnliche Kohomologie des Torus)**.** Sei $\bigl((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine gewöhnliche Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in Ab und Koeffizienten isomorph zu $\mathbb{Z}$.

1. Skizzieren Sie, wie man die Kohomologiegruppen $(h^k(S^1 \times S^1))_{k\in\mathbb{Z}}$ mithilfe der Eilenberg-Steenrod-Axiome (und ihrer Konsequenzen) bestimmen kann.
2. Geben Sie eine geometrische Interpretation Ihres Ergebnisses.



Aufgabe 4 (Homologieisomorphismen vs. Kettenhomotopieäquivalenzen)**.** Sei R ein Ring und sei $C \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ein Kettenkomplex, der aus freien R-Moduln besteht, mit $C_k \cong 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}_{<0}$.

1. Zeigen Sie: Gilt $H_k(C) \cong 0$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, so ist der Kettenkomplex C in ${}_R\mathsf{Ch}$ kontraktibel.
2. Zeigen Sie: Ist $D \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ein weiterer solcher Kettenkomplex und ist $f \in \operatorname{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ mit der Eigenschaft, dass $H_k(f)\colon H_k(C) \longrightarrow H_k(D)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist, so ist f bereits eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_R\mathsf{Ch}$.

   Hinweis. Betrachten Sie den Abbildungskegel von f.

Bitte wenden

Bonusaufgabe (topologische K-Theorie). Schlagen Sie in der Literatur die Definition der reellen/komplexen topologischen K-Theorie nach und fassen Sie diese kurz zusammen. Was ist reelle/komplexe topologische K-Theorie im Grad 0 von S^1 ? Illustrieren Sie dieses Ergebnis.

Abgabe bis zum 18. April (bis zum 16. April, 18:00 Uhr, in den Briefkasten; oder bis zum 18. April per email)