Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 13. Juni 2014

Aufgabe 1 (injektive/projektive Moduln)**.** Wiederholen Sie kurz die Begriffe projektiver und injektiver Moduln. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist P ein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul, so ist auch $P \otimes_{\mathbb{Z}} P$ ein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul.
2. Ist P ein projektiver $\mathbb{Z}$-Modul, so ist $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z})$ ein injektiver $\mathbb{Z}$-Modul.

Aufgabe 2 (Dualität für $\mathbb{R}^n$)**.** Sei R ein Ring mit Eins, seien k bzw. h eine Kohomologietheorie bzw. Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und seien Isomorphismen $k^0(\bullet) \cong_R R \cong_R h_0(\bullet)$ gegeben. Sei $\,\cdot\, \cup \,\cdot\,$ eine multiplikative Struktur auf k, sei $\,\cdot\, \times \,\cdot\,$ ein externes Produkt auf h und sei $\,\cdot\, \cap \,\cdot\,$ eine mit diesen Produkten kompatible Dualitätspaarung zwischen k und h. Zu $n \in \mathbb{N}$ seien $e(n)$ bzw. $\varepsilon(n)$ die entsprechenden (ko)homologischen Orientierungen von $\mathbb{R}^n$.

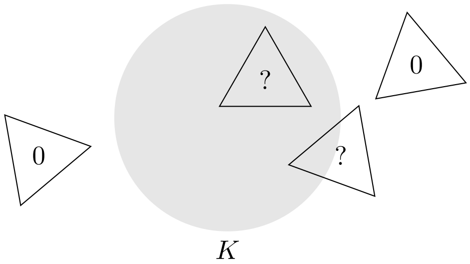
1. Bestimmen Sie $e(1) \cap \varepsilon(1) \in h_0(\mathbb{R})$.
2. Zeigen Sie, dass $\,\cdot\, \cap \varepsilon(n) \colon k^p\bigl(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\bigr) \longrightarrow h_{n-p}(\mathbb{R}^n)$ für alle $p \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.

Aufgabe 3 (Kohomologie mit kompaktem Träger)**.** Sei R ein Ring mit Eins, sei X ein topologischer Raum und sei $K(X)$ die Menge aller kompakten Teilräume von X (partiell geordnet durch Inklusion). Der Unterkomplex $C_c^*(X;R)$ der *Koketten auf X mit kompaktem Träger auf X mit R-Koeffizienten* von $C^*(X;R)$ ist für $p \in \mathbb{N}$ durch

$$C_c^p(X;R) := \bigl\{ f \in C^p(X;R) \bigm| \exists_{K \in K(X)} \quad f|_{\operatorname{map}(\Delta^p, X \setminus K)} = 0 \bigr\}$$

gegeben. Die Kohomologie $H_c^*(X;R) := H^*(C_c^*(X;R))$ heißt *Kohomologie von X mit kompaktem Träger mit R-Koeffizienten.* Diese Definition ist funktoriell unter eigentlichen stetigen Abbildungen.

1. Zeigen Sie, dass $H_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R}) \not\cong 0$ ist.
2. Wiederholen Sie die universelle Eigenschaft und Konstruktion von Kolimiten von gerichteten Systemen von Moduln.
3. Wie vertragen sich gradweise Kolimiten von gerichteten Systemen von Kettenkomplexen mit Homologie?
4. Zeigen Sie, dass es für alle $p \in \mathbb{Z}$ einen natürlichen Isomorphismus
$$H_c^p(\,\cdot\,;R) \cong_R \operatorname*{colim}_{K \in K(\,\cdot\,)} H^p(\,\cdot\,, \,\cdot\, \setminus K; R)$$
gibt.



Bitte wenden

Aufgabe 4 (Homologie von $\mathbb{C}P^n$ als Modul über dem Kohomologiering)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $H_*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ bezüglich des Cap-Produkts auf singulärer (Ko)Homologie mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten ein freier $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$-Modul vom Rang 1 ist.
Hinweis. Nutzen Sie die explizite Beschreibung des Rings $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ und die zelluläre Beschreibung des Kronecker-Produkts (Aufgabe 4 von Blatt 9).

Bonusaufgabe (algebraische K-Theorie im Grad 0)**.**

1. Wie ist algebraische K-Theorie im Grad 0 von Ringen definiert?
2. Wie hängen topologische K-Theorie im Grad 0 (für hinreichend gutartige topologische Räume) und algebraische K-Theorie im Grad 0 zusammen? Fassen Sie die entsprechenden Argumente kurz zusammen.

Abgabe bis zum 20. Juni 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten