Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 11 vom 20. Juni 2014

Aufgabe 1 (da verschwind' ich nun, ich armer Tor?)**.** Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für alle $\mathbb{Z}$-Moduln A und alle Körper K ist $\operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(A, K) \cong 0$.
2. Für alle $\mathbb{Z}[X]$-Moduln A, B ist $\operatorname{Tor}_2^{\mathbb{Z}[X]}(A, B) \cong 0$.

Aufgabe 2 (Hufeisenlemma)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Sei

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f''} A'' \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ und seien $P' \square \varepsilon'$ bzw. $P'' \square \varepsilon''$ projektive R-Auflösungen von A' bzw. A''.

Zeigen Sie, dass es dann eine projektive Auflösung $P \square \varepsilon$ von A und R-Kettenabbildungen $\widetilde{f'} \square f' \colon P' \square \varepsilon' \longrightarrow P \square \varepsilon$ und $\widetilde{f''} \square f'' \colon P \square \varepsilon \longrightarrow P'' \square \varepsilon''$ gibt, so dass

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\widetilde{f}'_n} P_n \xrightarrow{\widetilde{f}''_n} P''_n \longrightarrow 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ exakt ist.

Aufgabe 3 (Gruppenringe und geometrische Auflösungen)**.** Zu einer Gruppe G sei der *Gruppenring* $\mathbb{Z}G$ die abelsche Gruppe $\bigoplus_G \mathbb{Z}$ zusammen mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G \\ \Bigl(\sum_{g \in G} a_g \cdot g, \sum_{g \in G} b_g \cdot g\Bigr) &\longmapsto \sum_{g \in G} \Bigl(\sum_{h \in G} a_h \cdot b_{h^{-1} \cdot g}\Bigr) \cdot g. \end{aligned}$$

D.h. die Multiplikation auf $\mathbb{Z}G$ setzt die Gruppenverknüpfung von G fort.

1. Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\zeta_5] \subset \mathbb{C}$ *nicht* zu $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5]$ isomorph ist.
2. Sei G eine Gruppe und sei E ein kontraktibler CW-Komplex mit der Eigenschaft, dass G frei auf der Menge der offenen Zellen von E operiert. Zeigen Sie, dass der zelluläre Kettenkomplex $C^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(E)$ von E zusammen mit einer geeigneten Abbildung $C_0^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(E) \longrightarrow \mathbb{Z}$ eine projektive $\mathbb{Z}[G]$-Auflösung des $\mathbb{Z}[G]$-Moduls $\mathbb{Z}$ (mit der trivialen G-Operation) ist.

   Hinweis. Solche Komplexe E erhält man als universelle Überlagerung eines Modells von $K(G, 1)$ mit der durch die Überlagerung induzierten CW-Struktur. „Schöne" Modelle für $K(G, 1)$ liefern somit „schöne" projektive Auflösungen und (Ko)Homologie von Modellen solcher klassifizierender Räume (mit getwisteten Koeffizienten) stimmt mit Gruppen(ko)homologie überein. Dies stellt eine zentrale Brücke zwischen Gruppentheorie und Topologie her!

Bitte wenden

Aufgabe 4 (freie Gruppenoperationen auf Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei G eine endliche Gruppe, die frei auf S^n operiert, wobei $|G| > 2$. Dann ist n ungerade (Algebraische Topologie II, Aufgabe 4 von Blatt 14).

1. Zeigen Sie: Für alle $g \in G$ ist $H_n(g \cdot\,; \mathbb{Z}) = \mathrm{id}_{H_n(S^n;\mathbb{Z})}$.

   Hinweis. Wenden Sie den Lefschetzschen Fixpunktsatz an.

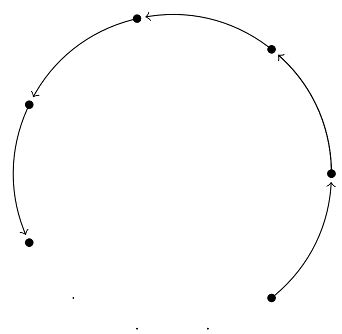
2. Folgern Sie daraus, dass es eine projektive $\mathbb{Z}[G]$-Auflösung des $\mathbb{Z}[G]$-Moduls $\mathbb{Z}$ (mit der trivialen G-Operation) gibt, die $(n+1)$-periodisch ist.

3. Schließen Sie, dass für alle $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}[G]})$ und alle $k \in \mathbb{N}$

$$H_k(G; A) \cong H_{k+n+1}(G; A)$$
$$H^k(G; A) \cong H^{k+n+1}(G; A)$$

   gilt.

4. Sei $n \in \mathbb{N}_{>2}$. Bestimmen Sie $H_*(\mathbb{Z}/n; \mathbb{Z})$ und $H^*(\mathbb{Z}/n; \mathbb{Z})$.



Hinweis. Sie dürfen annehmen, dass S^n eine endliche, n-dimensionale CW-Struktur trägt, so dass G frei auf der Menge der offenen Zellen operiert.

Bonusaufgabe (abgeleitete Funktoren auf abelschen Kategorien)**.**

1. Wie werden abgeleitete Funktoren von halb-exakten Funktoren auf abelschen Kategorien (Algebraische Topologie II, Bonusaufgabe von Blatt 4) definiert bzw. konstruiert? Skizzieren Sie kurz die wesentlichen Begriffe/Schritte.

2. Wie kann man (Ko)Limiten von Folgen von Moduln über einem Ring als Funktor auf einer abelschen Kategorie auffassen?

3. Sind diese Funktoren halb-exakt? Begründen Sie kurz Ihre Antwort!

4. Gibt es in diesen Kategorien genug projektive bzw. injektive Objekte?

Abgabe bis zum 27. Juni 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten