# Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh Blatt 12 vom 27. Juni 2014

---

**Aufgabe 1** (lokal-global-Prinzip für singuläre Homologie mit Koeffizienten?)**.** Sei $X$ ein topologischer Raum und sei $K := \{\mathbb{Z}/p \mid p \in \mathbb{Z} \text{ prim}\} \cup \{\mathbb{Q}\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Gilt $H_*(X;\mathbb{Z}) \cong H_*(\bullet;\mathbb{Z})$, so gilt $H_*(X;Z) \cong H_*(\bullet;Z)$ für alle $Z \in K$.
2. Gilt $H_*(X;Z) \cong H_*(\bullet;Z)$ für alle $Z \in K$, so folgt $H_*(X;\mathbb{Z}) \cong H_*(\bullet;\mathbb{Z})$.

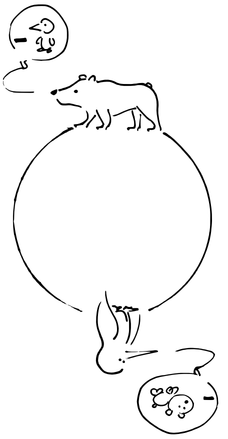
**Aufgabe 2** (UCT für Homologie, topologisch)**.** Zeigen Sie, dass es im universellen Koeffiziententheorem für singuläre Homologie *keinen* natürlichen Spalt der kurzen exakten Sequenz gibt.
*Hinweis.* Betrachten Sie die Projektion $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1$ und $H_2(\,\cdot\,;\mathbb{Z}/2)$.

**Aufgabe 3** (Anwendungen von Kohomologie reell-projektiver Räume)**.** Bearbeiten Sie zwei der folgenden vier Aufgaben:

1. Seien $n, k \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $f\colon S^n \longrightarrow S^k$ eine stetige *antipodenerhaltende* Abbildung, d.h. für alle $x \in S^n$ gilt $f(-x) = -f(x)$; also induziert $f$ eine wohldefinierte stetige Abbildung $\overline{f}\colon \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^k$. Zeigen Sie: Ist $x_0 \in \mathbb{R}P^n$, so ist $\pi_1(\overline{f})\colon \pi_1(\mathbb{R}P^n, x_0) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{R}P^k, f(x_0))$ nicht-trivial.

   *Hinweis.* Dies kann z.B. mit Überlagerungstheorie (Algebraische Topologie I) gezeigt werden.

2. Zeigen Sie den *Satz von Borsuk-Ulam*: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so gibt es *keine* stetige antipodenerhaltende Abbildung $S^n \longrightarrow S^{n-1}$.



3. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist $\binom{n}{k}$ für alle $k \in \{1, \dots, n-1\}$ gerade, so ist $n$ eine Potenz von 2.

4. Zeigen Sie: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und gibt es auf $\mathbb{R}^n$ die Struktur einer reellen Divisionsalgebra, so ist $n$ eine Potenz von 2.

   *Hinweis.* Betrachten Sie eine geeignete Abbildung $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$.

**Aufgabe 4** (Ersetzung von Kettenkomplexen)**.** Sei $R$ ein Hauptidealring mit Eins und sei $C \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ ein Kettenkomplex, der aus freien $R$-Moduln besteht. Außerdem sei $H_n(C)$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ endlich erzeugt. Zeigen Sie, dass es einen Kettenkomplex $D \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ mit $C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} D$ gibt, der aus endlich erzeugten freien $R$-Moduln besteht.

*Bitte wenden*

**Bonusaufgabe** (singuläre Kohomologie von aufsteigenden Vereinigungen)**.** Sei $R$ ein Ring mit Eins. Zu einem inversen System $A := (A^k, r^k \colon A^k \longrightarrow A^{k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ (wobei wir kurz $A^{-1} := 0$ schreiben) definiert man

$$\varprojlim{}^1_R A := \operatorname{coker}\begin{pmatrix} \prod_{k\in\mathbb{N}} A^k & \to & \prod_{k\in\mathbb{N}} A^k \\ x & \mapsto & (x_k - r^{k+1}(x_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}.$$

Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Sei $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ f\ } B \xrightarrow{\ g\ } C \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von inversen Systemen in ${}_R\mathsf{Mod}$, d.h. $f$ und $g$ sind Folgen von Homomorphismen, die mit den Strukturabbildungen von $A$ und $B$ verträglich sind und für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die zugehörige Sequenz

   $$0 \longrightarrow A^k \xrightarrow{\ f^k\ } B^k \xrightarrow{\ g^k\ } C^k \longrightarrow 0$$

   exakt in ${}_R\mathsf{Mod}$. Zeigen Sie, dass es dann eine natürliche exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ der folgenden Form gibt:

$$0 \longrightarrow \varprojlim A \xrightarrow{\varprojlim f} \varprojlim B \xrightarrow{\varprojlim g} \varprojlim C \longrightarrow \varprojlim{}^1_R A \xrightarrow{\varprojlim^1_R f} \varprojlim{}^1_R B \xrightarrow{\varprojlim^1_R g} \varprojlim{}^1_R C \longrightarrow 0$$

2. Ein inverses System $A$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ erfüllt die *Mittag-Leffler-Bedingung*, wenn folgendes gilt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}_{\geq k}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq K}$ die Gleichheit

   $$\operatorname{im}(f^{k+1} \circ \cdots \circ f^m \colon A^m \to A^k) = \operatorname{im}(f^{k+1} \circ \cdots \circ f^K \colon A^K \to A^k)$$

   gilt. Zeigen Sie: Erfüllt ein inverses System $A$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ die Mittag-Leffler-Bedingung, so ist $\varprojlim^1_R A \cong 0$.

3. Sei $C := (C(k), r(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ein inverses System in ${}_R\mathsf{CoCh}$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ erfülle $(C^n(k), r^n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ die Mittag-Leffler-Bedingung. Zeigen Sie: Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche exakte Sequenz

   $$0 \longrightarrow \varprojlim_{k\in\mathbb{N}}{}^1_R\, H^{n-1}(C(k)) \longrightarrow H^n(\varprojlim{}^1_R C) \longrightarrow \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} H^n(C(k)) \longrightarrow 0$$

   wobei das inverse System in Kohomologie von den Strukturabbildungen von $C$ induziert wird und die rechte Abbildung die kanonische Abbildung in den inversen Limes ist.

4. Sei $X$ ein topologischer Raum und sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k = X$ und der folgenden Eigenschaft: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset X_k$. Sei außerdem $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Zeigen Sie: Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (in $X$ und $Z$) natürliche exakte Sequenz

   $$0 \longrightarrow \varprojlim_{k\in\mathbb{N}}{}^1_R\, H^{n-1}(X_k; Z) \longrightarrow H^n(X; Z) \longrightarrow \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} H^n(X_k; Z) \longrightarrow 0,$$

   wobei das inverse System bzw. die rechte Abbildung von den Inklusionen $(X_k \hookrightarrow X_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(X_k \hookrightarrow X)_{k\in\mathbb{N}}$ induziert wird.

---

Abgabe bis zum 4. Juli 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten