

Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh

Blatt 13 vom 4. Juli 2014

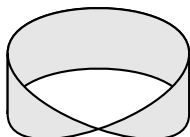
Aufgabe 1 (Orientierbarkeit und Produkte). Seien M und N nicht-leere geschlossene zusammenhängende topologische Mannigfaltigkeiten. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Sind M und N orientierbar, so ist auch $M \times N$ orientierbar.
2. Ist $M \times N$ orientierbar, so sind auch M und N orientierbar.

Aufgabe 2 (Orientierbarkeit bzgl. verschiedener Koeffizienten). Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.

1. Zeigen Sie, dass Dann es genau eine $\mathbb{Z}/2$ -Orientierung auf M gibt.
2. Sei R ein Ring mit Eins. Zeigen Sie: Ist M orientierbar, so ist M auch R -orientierbar.

Aufgabe 3 (Möbiusband).



1. Zeigen Sie mit homologischen Methoden, dass das (offene) Möbiusband *nicht* orientierbar ist. Erklären Sie Ihre Argumente anhand des Bildes „Möbius Strip I“ von M.C. Escher:
<http://www.mcescher.com/gallery/recognition-success/mobius-strip-i/>
2. Gibt es orientierbare Mannigfaltigkeiten, die das Möbiusband als Teilraum enthalten? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (Gruppen, die nicht frei auf Sphären operieren).

1. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ auf keiner Sphäre frei operiert.
2. Zeigen Sie durch eine geeigneter Verallgemeinerung dieser Methoden: Operiert eine endliche Gruppe G frei auf einer Sphäre, so darf G keine Untergruppe der Form $\mathbb{Z}/n \times \mathbb{Z}/n$ mit $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ enthalten.
3. Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und sei G eine endliche nicht-triviale p -Gruppe, die frei auf einer Sphäre operiert. Zeigen Sie, dass G genau eine Untergruppe der Ordnung p besitzt.

Hinweis. Nicht-triviale p -Gruppen haben nicht-triviales Zentrum.

4. Geben Sie ein Beispiel für eine endliche, nicht-zyklische Gruppe, die frei auf einer Sphäre operiert.

Hinweis. Betrachten Sie geeignete Untergruppen der Quaternionen.

Bonusaufgabe (Snake). Implementieren Sie das Spiel „Snake“ auf einer Kleinschen Flasche.

freiwillige Abgabe