Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 14 vom 11. Juli 2014

Aufgabe 1 (Abbildungsgrade in/aus Sphären)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei M eine orientierte, geschlossene, zusammenhängende, nicht-leere topologische n-Mannigfaltigkeit. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gibt eine stetige Abbildung $f\colon M \longrightarrow S^n$ mit $\deg f = 2014$.
2. Es gibt eine stetige Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow M$ mit $\deg f = 2014$.

Aufgabe 2 (Abbildungen von nicht-trivialem Grad)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M und N orientierte geschlossene zusammenhängende n-Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung.

1. Zeigen Sie mithilfe von Poincaré-Dualität: Ist $\deg f \neq 0$,
   - so ist $H_k(f;\mathbb{Q})\colon H_k(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_k(N;\mathbb{Q})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ surjektiv
   - und $H^k(f;\mathbb{Q})\colon H^k(N;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(M;\mathbb{Q})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ injektiv.
2. Falls Sie *nicht* an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Zeigen Sie: Ist U eine nicht-kompakte (orientierte) n-Mannigfaltigkeit mit $n > 0$, so ist $H_n(U;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} 0$.
3. Falls Sie an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Zeigen Sie mithilfe von Überlagerungstheorie: Für alle $x_0 \in M$ hat $\pi_1(f)\bigl(\pi_1(M,x_0)\bigr)$ endlichen Index in $\pi_1(N, f(x_0))$.

Aufgabe 3 (Heisenberggruppe/Heisenbergmannigfaltigkeit)**.** Wir betrachten die *reelle bzw. ganzzahlige Heisenberggruppe*

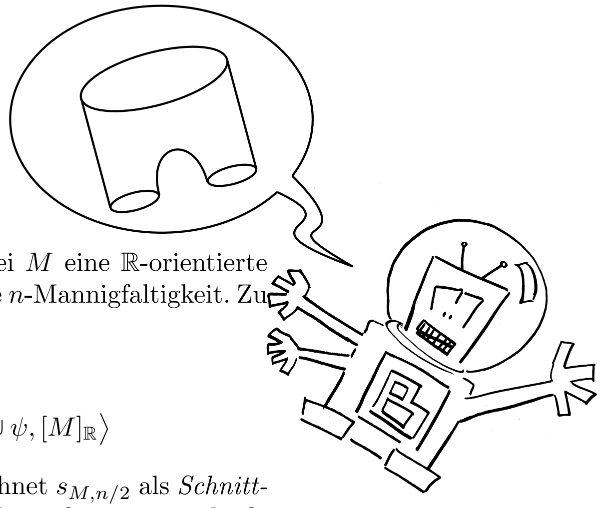
$$H_{\mathbb{R}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$$

$$H_{\mathbb{Z}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x,y,z \in \mathbb{Z} \right\} \subset H_{\mathbb{R}}$$

und die *Heisenberg-Mannigfaltigkeit* $M := H_{\mathbb{R}}/H_{\mathbb{Z}}$. Dabei versehen wir $H_{\mathbb{R}}$ mit der von $\mathrm{GL}(3,\mathbb{R})$ induzierten Topologie und den homogenen Raum M mit der entsprechenden Quotiententopologie.

1. Zeigen Sie, dass M eine orientierbare geschlossene zusammenhängende topologische 3-Mannigfaltigkeit ist.
2. Falls Sie an Algebraische Topologie I teilgenommen haben: Zeigen Sie, dass M ein Modell für $K(H_{\mathbb{Z}}, 1)$ liefert.
3. Berechnen Sie $H_*(M;\mathbb{Z})$ und $H^*(M;\mathbb{Z})$, inklusive der Produktstruktur.
4. Schlagen Sie in der Literatur nach, was eine Poincaré-Dualitätsgruppe ist und überprüfen Sie, ob $H_{\mathbb{Z}}$ eine Poincaré-Dualitätsgruppe ist.

Bitte wenden



Aufgabe 4 (Schnittform, Signatur)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine $\mathbb{R}$-orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere topologische n-Mannigfaltigkeit. Zu $k \in \mathbb{Z}$ definieren wir die Bilinearform $s_{M,k}$ durch

$$\begin{aligned} s_{M,k} \colon H^k(M;\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^{n-k}(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto \langle \varphi \cup \psi, [M]_{\mathbb{R}} \rangle \end{aligned}$$

Ist $n \equiv 0 \mod 4$, so ist $s_{M,n/2}$ symmetrisch. Man bezeichnet $s_{M,n/2}$ als *Schnittform von M*. Die Signatur $\sigma(M)$ der symmetrischen Bilinearform $s_{M,n/2}$ heißt *Signatur von M*. Ist M nicht zusammenhängend, so ist die Signatur von M als Summe der Signaturen der Komponenten definiert.

1. Zeigen Sie, dass die Bilinearform $s_{M,k}$ regulär ist.

2. Bestimmen Sie für gerade n die Signatur von $\mathbb{C}P^n$.

3. Schlagen Sie in der Literatur nach, was Poincaré-Dualität für orientierte kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand besagt und in welchem Zusammenhang die Fundamentalklasse der berandenden bzw. des Randes zueinander stehen.

4. Zeigen Sie: Ist W eine orientierte kompakte zusammenhängende nicht-leere topologische Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand ∂W und ist $\dim W \equiv 1 \mod 4$, so ist
$$\sigma(\partial W) = 0.$$

   Hinweis. Geben Sie einen geeigneten Lagrange-Unterraum für die Schnittform an.

Bonusaufgabe (glatte singuläre (Ko)Homologie, deRham-Kohomologie)**.**

1. Skizzieren Sie den Beweis, dass glatte singuläre (Ko)Homologie auf glatten Mannigfaltigkeiten mit singulärer (Ko)Homologie übereinstimmt. Welches Induktionsprinzip tritt dabei auf?

2. Skizzieren Sie den Beweis des Satzes von de Rham, dass deRham-Kohomologie und (glatte) singuläre Kohomologie auf glatten Mannigfaltigkeiten übereinstimmen. Welches Induktionsprinzip tritt dabei auf?

Bonusaufgabe (Selbstabbildungen von einfach-zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten)**.** Sei M eine einfach zusammenhängende orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit. Sei $f \colon M \longrightarrow M$ eine stetige Abbildung mit $|\deg f| = 1$.

1. Zeigen Sie, dass f dann bereits eine Homotopieäquivalenz ist.

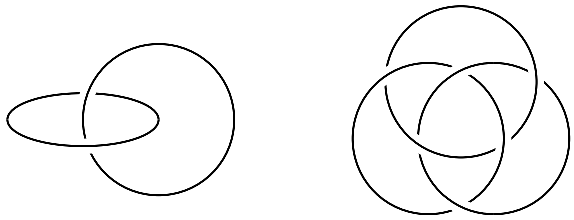
   Hinweis. Verwenden Sie den Satz von Whitehead.

2. Was besagt die Hopf-Vermutung über Abbildungsgrade? Welche Resultate sind bereits bekannt?

Bonusaufgabe (Verschlingungszahl)**.**

1. Wie ist die Verschlingungszahl zweier disjunkter Kurven in $\mathbb{R}^3$ über (Ko)Homologie definiert?

2. Was bedeutet dies geometrisch? Welche Verschlingungszahlen ergeben sich für die Hopf-Verschlingung (links) bzw. (paarweise) für die Borromäischen Ringe (rechts)? Illustrieren Sie Ihre Argumente jeweils durch Rechnungen in (Ko)Homologie und durch geeignete Skizzen!



Bonusaufgabe (Erweiterungen von Gruppen)**.** Sei G eine Gruppe.

1. Wie ist die Bar-Auflösung von G definiert? Woher kommt der Name? Wie kann man damit Gruppen(ko)homologie berechnen?

2. Sei A ein $\mathbb{Z}G$-Modul (d.h. eine abelsche Gruppe mit einer $\mathbb{Z}$-lineare G-Operation). Stellen Sie mithilfe der Beschreibung von $H^2(G; A)$ durch die Bar-Auflösung eine Beziehung zwischen $H^2(G; A)$ und (Äquivalenzklassen von) Erweiterungen von G mit Kern A her (wobei die von der Erweiterung durch Konjugation mit G induzierte Operation auf A mit der gegebenen G-Operation auf A übereinstimmt).

3. Bestimmen Sie von Hand alle Äquivalenzklassen von Erweiterungen vom Typ
$$1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow ? \longrightarrow \mathbb{Z}/2013 \longrightarrow 1.$$

4. Vergleichen Sie das letzte Resultat mit der Berechnung von $H^2(\mathbb{Z}/2013; \mathbb{Z})$ mithilfe topologischer Methoden (Aufgabe 4 von Blatt 11).

Bonusaufgabe (Dimensionsbegriffe für Gruppen)**.**

1. Wie sind die geometrische bzw. (ko)homologische Dimension einer Gruppe definiert?

2. Welcher Zusammenhang besteht zwischen geometrischer und homologischer Dimension?

Bonusaufgabe (Skript)**.** Finden Sie möglichst viele Fehler im Skript!

---

freiwillige Abgabe