Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 18. April 2014

Aufgabe 1 (OST∃r H∀SEN)**.** Wir betrachten die beiden Teilmengen

$$\mathsf{OST\exists r} \quad \text{und} \quad \mathsf{H\forall SEN}$$

in $\mathbb{R}^2$ (mit der Teilraumtopologie). Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $H^k(\mathsf{OST\exists r}; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} H_k(\mathsf{H\forall SEN}; \mathbb{Z})$.
2. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $H^k\bigl(\coprod_{\mathbb{N}} \mathsf{OST\exists r}; \mathbb{Z}\bigr) \cong_{\mathbb{Z}} H_k\bigl(\coprod_{\mathbb{N}} \mathsf{H\forall SEN}; \mathbb{Z}\bigr)$.

Aufgabe 2 (Kronecker-Produkt)**.** Sei R ein Ring mit Eins, sei $C \in {}_R\mathsf{Ch}$ und sei $Z \in {}_R\mathsf{Mod}$. Dann ist das *Kronecker-Produkt auf C mit Werten in Z* für alle $k \in \mathbb{Z}$ durch

$$\begin{aligned} \langle \cdot\,, \cdot \rangle \colon H^k\bigl(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, Z)\bigr) \otimes_{\mathbb{Z}} H_k(C) &\longrightarrow Z \\ \bigl([f], [c]\bigr) &\longmapsto f(c) \end{aligned}$$

gegeben.

1. Zeigen Sie, dass diese Abbildung tatsächlich wohldefiniert und $\mathbb{Z}$-linear ist.
2. Folgern Sie: Sind $\varphi \in H^k(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C, Z))$ und $\alpha \in H_k(C)$ mit $\langle \varphi, \alpha \rangle \neq 0$, so gilt $\varphi \neq 0$ und $\alpha \neq 0$.

Aufgabe 3 (singuläre Kohomologie im Grad 0)**.**

1. Sei X ein nicht-leerer wegzusammenhängender Raum, sei R ein Ring mit Eins und sei $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Zeigen Sie, dass die konstante Abbildung $X \longrightarrow \bullet$ einen Isomorphismus $H^0(\bullet; Z) \longrightarrow H^0(X; Z)$ induziert. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!
2. Gibt es einen topologischen Raum X mit $H^0(X; \mathbb{R}) \cong_{\mathbb{R}} \bigoplus_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 4 (singuläre Kohomologie im Grad 1)**.**

1. Konstruieren Sie für wegzusammenhängende punktierte topologische Räume einen natürlichen Isomorphismus

   $$H^1(\,\cdot\,; \mathbb{Z}) \cong \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\bigl(\pi_1(\,\cdot\,)_{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}\bigr).$$

   Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

   Hinweis. Betrachten Sie den Unterkomplex des singulären Kettenkomplexes, der von den singulären Simplizes erzeugt wird, deren Ecken mit dem Basispunkt übereinstimmen …
2. Gibt es einen topologischen Raum X mit $H^1(X; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (klassifizierende Räume topologischer Gruppen)**.**

1. Schlagen Sie in der Literatur nach, was klassifizierende Räume topologischer Gruppen sind und fassen Sie Definition und grundlegende Eigenschaften kurz zusammen.
2. Geben Sie ein Modell für den klassifizierenden Raum der topologischen Gruppe $U(1) \cong S^1$ an.
3. Wie hängt die Klassifikation komplexer Vektorbündel über gutartigen topologischen Räumen mit dem klassifizierenden Raum für die unendliche unitäre Gruppe $U = \lim_{n\to\infty} U(n)$ zusammen?
4. Skizzieren Sie, warum komplexe topologische K-Theorie im Grad 0 auf gutartigen topologischen Räumen durch den Funktor „$[\,\cdot\,, BU]$“ beschrieben werden kann.

Bonusaufgabe (Frohe Ostern!)**.** Finden Sie möglichst viele ~~Ostereier~~ Topologen im folgenden Buchstabenozean (horizontal, vertikal, diagonal, vorwärts, rückwärts).

B	N	D	A	E	U	E	E	H	A	L	C	W	E	E	N
T	L	H	E	P	S	E	I	C	M	H	N	H	O	I	E
Z	S	L	N	H	N	I	L	U	E	N	L	W	O	X	L
A	L	E	X	A	N	D	E	R	A	C	N	I	O	P	R
S	U	L	L	I	V	A	N	B	R	O	U	W	E	R	F
N	Y	C	B	C	A	Z	B	E	E	P	P	U	P	R	B
R	A	N	O	O	T	L	E	Z	A	N	C	N	D	E	H
M	A	L	T	C	I	N	R	R	E	N	M	D	O	U	H
P	O	N	T	R	Y	A	G	I	N	U	K	A	R	R	F
K	Z	Q	G	W	A	L	D	H	A	U	S	E	N	R	M
I	D	I	U	B	H	A	D	E	W	E	W	H	E	N	A
R	O	N	L	I	M	O	R	A	I	I	S	E	E	S	S
B	E	O	L	B	L	R	L	F	C	M	D	T	T	M	S
Y	R	B	Y	D	E	L	E	Z	A	M	O	I	S	A	E
X	E	H	A	S	S	R	E	K	A	L	B	H	X	D	Y
E	W	R	W	R	T	Y	E	N	T	I	H	W	T	A	M

Abgabe bis zum 25. April 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten

Wir wünschen Ihnen Frohe Ostern!