Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh | Blatt 3 vom 25. April 2014

Aufgabe 1 (einfache Berechnung von Kohomologie?)**.** Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{Z}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gilt $H^n(X;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(H_n(X;\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$.
2. Es gilt $H^n(X;\mathbb{Z}/2014) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2014 \otimes_{\mathbb{Z}} H^n(X;\mathbb{Z})$.

Aufgabe 2 (Kohomologietheorien als Brown-Funktoren)**.** Ein kontravarianter Funktor $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ist ein *Brown-Funktor*, wenn er die folgenden Eigenschaften besitzt:

– *Homotopieinvarianz.* Der Funktor F faktorisiert über den Homotopieklassenfunktor $\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}}$.

– *Schwaches Wedge-Axiom.* Für alle (nicht-leeren) Familien $(X_i,x_i)_{i\in I}$ punktierter topologischer Räume mit der Eigenschaft, dass die punktierten Räume $(X_i \sqcup [0,1]/_{(x_i\sim 0)}, [1])$ und (X_i,x_i) für alle $i \in I$ punktiert homotopieäquivalent sind, induzieren die Inklusionen $\bigl((X_i,x_i) \hookrightarrow \bigvee_{j\in I}(X_j,x_j)\bigr)_{i\in I}$ eine Bijektion
$$F\Bigl(\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i)\Bigr) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(X_i,x_i).$$

– *Mayer-Vietoris-Axiom.* Ist (X,x_0) ein punktierter topologischer Raum und sind $U,V \subset X$ mit $U^\circ \cup V^\circ = X$ und $x_0 \in U\cap V$, und sind $j_U\colon U\cap V \longrightarrow U$, $i_U\colon U \longrightarrow X$, $j_V\colon U\cap V \longrightarrow V$, $i_V\colon V \longrightarrow X$ die Inklusionen, so gilt: Für alle $u \in F(U,x_0)$ und $v \in F(V,x_0)$ mit $F(j_U)(u) = F(j_V)(v)$ gibt es ein $z \in F(X)$ mit
$$F(i_U)(z) = u \quad\text{und}\quad F(i_V)(z) = v.$$

Sei R ein Ring mit Eins, sei $\bigl((h^k)_{k\in\mathbb{Z}},(\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\bigr)$ eine additive Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $n\in\mathbb{Z}$. Wir fassen punktierte topologische Räume als Raumpaare mit einpunktigem Unterraum auf. Zeigen Sie, dass der entsprechende Funktor $h^n|\colon \mathsf{Top}_* \hookrightarrow \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ein Brown-Funktor ist.

Hinweis. Dabei ist Set_* die Kategorie der punktierten Mengen und punktierten Abbildungen. Für eine (nicht-leere) Familie $(X_i,x_i)_{i\in I}$ punktierter topologischer Räume ist
$$\bigvee_{i\in I}(X_i,x_i) := \Bigl(\coprod_{i\in I} X_i \Big/_{(\forall_{i,j\in I}\ \ x_i\sim x_j)}, x_0\Bigr)$$
die *Einpunktvereinigung* (oder das *Wedge*) von $(X_i,x_i)_{i\in I}$, wobei x_0 der durch die Basispunkte $(x_i)_{i\in I}$ repräsentierte Punkt ist.

Bitte wenden

Aufgabe 3 (Diagonale des Torus, zellulär)**.** Betrachten Sie eine CW-Struktur Ihrer Wahl auf $X := S^1$ und die induzierte Produkt-CW-Struktur auf $S^1 \times S^1$.

1. Geben Sie eine zelluläre Abbildung $X \longrightarrow X \times X$ an, die zur Diagonalabbildung $\Delta_X \colon X \longrightarrow X \times X$ homotop ist.

2. Bestimmen/Beschreiben Sie für alle $k \in \mathbb{Z}$ möglichst explizit die induzierten Abbildungen

$$H_k(\Delta_X;\mathbb{Z})\colon H_k(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(X \times X;\mathbb{Z})$$
$$H^k(\Delta_X;\mathbb{Z})\colon H^k(X \times X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^k(X;\mathbb{Z}).$$

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 4 (Grassmannsche)**.** Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Schlagen Sie in der Literatur nach wie die reellen/komplexen Grassmannschen definiert sind.

2. Was haben Grassmannsche mit projektiven Räumen zu tun?

3. Wie kann man mithilfe sogenannter Schubertzellen eine CW-Struktur auf den reellen/komplexen Grassmannschen definieren? Skizzieren Sie kurz, warum es sich dabei um eine CW-Struktur handelt.

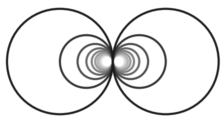
4. Bestimmen Sie die singuläre Kohomologie der (endlichdimensionalen) komplexen Grassmannschen.

Bonusaufgabe (Doppelohrring)**.**

1. Wir betrachten den *hawaiianischen Ohrring*

$$H := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_{>0}} \bigl\{x \in \mathbb{R}^2 \bigm| d\bigl(x,(1/n,0)\bigr) = 1/n\bigr\} \subset \mathbb{R}^2$$

mit der Teilraumtopologie von $\mathbb{R}^2$ und den Doppelohrring $(H,0) \vee (H,0)$:



Zeigen Sie, dass die Inklusionen $(H,0) \longrightarrow (H,0) \vee (H,0)$ der Summanden *keine* Bijektion

$$H^1\bigl((H,0) \vee (H,0);\mathbb{Z}\bigr) \longrightarrow H^1\bigl(H,\{0\};\mathbb{Z}\bigr) \times H^1\bigl(H,\{0\};\mathbb{Z}\bigr)$$

induzieren. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Hinweis. Sie können zum Beispiel Aufgabe 4 von Blatt 2 verwenden.

2. Gibt es einen punktierten topologischen Raum (Y, y_0) mit der Eigenschaft, dass $H^1(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$, aufgefasst als Funktor $\mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$, natürlich isomorph zu $\bigl[\,\cdot\,,(Y,y_0)\bigr]_*\colon \mathsf{Top}_{*\mathrm{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ist? Begründen Sie Ihre Antwort!

Abgabe bis zum 2. Mai 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten