Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh

Blatt 4 vom 2. Mai 2014

Aufgabe 1 (Brown-Funktoren auf kleinen Räumen)**.** Sei $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ein Brown-Funktor. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Es gilt $\bigl|F(\{0\},0)\bigr| = 1$.
2. Es gilt $\bigl|F(\{0,1\},0)\bigr| = 2$ (wobei $\{0,1\}$ die diskrete Topologie trägt).

Aufgabe 2 (Spektren von Produkten von Kohomologietheorien)**.** Sei R ein Ring mit Eins und seien h und h' Kohomologietheorien auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$.

1. Geben Sie eine geeignete Definition der Produktkohomologietheorie $h \times h'$ und erklären Sie kurz, warum es sich dabei um eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ handelt.
2. Wie erhält man aus Ω-Präspektren für die Faktoren h und h' ein Ω-Präspektrum für $h \times h'$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Aufgabe 3 (universelle Klassen)**.** Es ist $\mathbb{C}P^\infty$ ein Modell für $K(\mathbb{Z},2)$ (s. Algebraische Topologie I).

1. Geben Sie eine universelle Klasse in $H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$ für $H^2(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ möglichst explizit an und begründen Sie, warum diese Klasse universell ist.

   Hinweis. Sie dürfen verwenden, dass $H^2(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$ mit der entsprechenden zellulären Kohomologiegruppe übereinstimmt.
2. Welchen stetigen Abbildungen $S^1 \times S^1 \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ entsprechen die Erzeuger von $H^2(S^1 \times S^1;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ bzgl. dieser universellen Klasse?

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 4 (Produktstrukturen auf singulärer Homologie?)**.** Sei R ein Ring mit Eins, sei $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und seien $p,q \in \mathbb{N}_{>0}$. Außerdem sei

$$M\colon H_p(\,\cdot\,,\emptyset;Z) \times H_q(\,\cdot\,,\emptyset;Z) \longrightarrow H_{p+q}(\,\cdot\,,\emptyset;Z)$$

eine natürliche Transformation von Funktoren $\mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$.

1. Zeigen Sie: Ist X ein topologischer Raum, ist $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in H_n(X;\mathbb{Z})$, so gibt es einen Raum Y mit folgender Eigenschaft: Für alle $k \in \mathbb{Z}_{>n}$ gilt $H_k(Y;Z) \cong 0$ und es gibt eine stetige Abbildung $f\colon Y \longrightarrow X$ und $\beta \in H_n(Y;Z)$ mit $\alpha = H_n(f;Z)(\beta)$.
2. Folgern Sie: Für alle topologischen Räume X ist der Homomorphismus $M(X)\colon H_p(X;Z) \times H_q(X;Z) \longrightarrow H_{p+q}(X;Z)$ die Nullabbildung.

Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie sich auf den Fall von CW-Komplexen beschränken.

Bonusaufgabe (Bott-Periodizität).

1. Was besagt Bott-Periodizität für komplexe topologische K-Theorie?
2. Wie kann man Bott-Periodizität durch eine Homotopieäquivalenz geeigneter Räume ausdrücken und wie erhält man somit ein Ω-Präspektrum aus BU ?


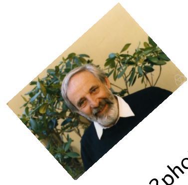





Photo: George M. Bergman, Berkeley, Oberwolfach Photo Collection http://owpdb.mfo.de/detail?photoID=10329

Abgabe bis zum 9. Mai 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten