Übungen zur Algebraischen Topologie III

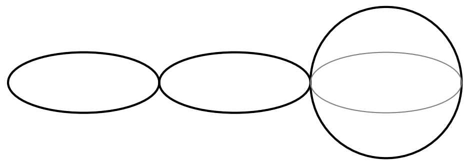
Prof. Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 9. Mai 2014

Aufgabe 1 (Lusternik-Schnirelmann-Kategorie)**.** Seien X und Y topologische Räume. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist $Y \subset X$, so gilt $\operatorname{cat} Y \leq \operatorname{cat} X$.
2. Ist $Y \simeq X$, so gilt $\operatorname{cat} Y = \operatorname{cat} X$.

Aufgabe 2 (Quadratur des Kreises, topologisch)**.** Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$.

1. Zeigen Sie: Ist X ein topologischer Raum, so gilt für alle $\alpha \in H^1(X;\mathbb{Z})$:
$$\alpha \cup \alpha = 0 \in H^*(X;\mathbb{Z}).$$
2. Geben Sie einen alternativen Beweis dieser Aussage für CW-Komplexe mithilfe eines universellen Elements in $H^1(S^1;\mathbb{Z})$.
3. Bestimmen Sie den Kohomologiering $H^*(B;\mathbb{Z})$ des Badeschaumraums
$$B := \big(S^1 \times \{0\}\big) \cup \big((2,0,0) + (S^1 \times \{0\})\big) \cup \big((4,0,0) + S^2\big) \subset \mathbb{R}^3.$$



Aufgabe 3 ($\times$ für ein $\cup$)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei h eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$, sei ein Isomorphismus $h^0(\bullet) \cong_R R$ gegeben und sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf h.

1. Zeigen Sie, dass das zu $\cdot \cup \cdot$ assoziierte Kreuz-Produkt $\cdot \times \cdot$ tatsächlich ein externes Produkt auf h liefert.
2. Zeigen sie: Für alle $(X,A,B) \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ mit $(X \times X, A \times X, X \times B) \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, alle $p,q \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h^p(X,A)$, $y \in h^q(X,A)$ gilt:
$$x \cup y = h^{p+q}(\Delta_X)(x \times y).$$
Dabei bezeichnet
$$\begin{aligned} \Delta_X \colon (X, A \cup B) &\longrightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times B) \\ x &\longmapsto (x,x) \end{aligned}$$
die zugehörige Diagonalabbildung.

Bitte wenden

Aufgabe 4 (Kohomologiering des Torus)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;R)$. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $T^n := (S^1)^n$ der n-dimensionale Torus. Sei $\alpha \in H^1(S^1;R) \cong_R R$ ein Erzeuger; zu $j \in \{1,\dots,n\}$ sei $p_j \colon T^n \longrightarrow S^1$ die Projektion auf den j-ten Faktor und

$$\alpha_j := H^1(p_j;R)(\alpha) \in H^1(T^n;R).$$

Zeigen Sie: Ist $k \in \{0,\dots,n\}$, so ist $H^k(T^n;R)$ ein freier R-Modul mit Basis

$$(\alpha_{j_1} \cup \dots \cup \alpha_{j_k})_{j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}, j_1 < \dots < j_k}.$$

Bonusaufgabe (multiplikative Struktur auf topologischer K-Theorie)**.**

1. Wie kann man eine multiplikative Struktur auf (absoluter) komplexer topologischer K-Theorie von kompakten Hausdorff-Räumen auf der Ebene komplexer Vektorbündel beschreiben?

2. Was ist das sogenannte *Bott-Element* in komplexer topologischer K-Theorie und wie kann man das Bott-Element durch ein komplexes Vektorbündel beschreiben?

3. Wie kann man Bott-Periodizität auf komplexer topologischer K-Theorie mithilfe des Bott-Elements und der multiplikativen Struktur beschreiben?

Abgabe bis zum 16. Mai 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten