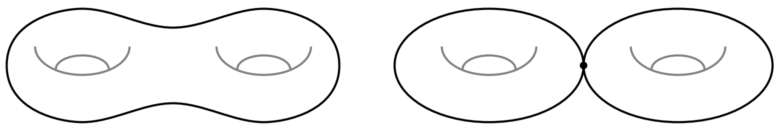
Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 6 vom 16. Mai 2014

Aufgabe 1 (Fixpunkte auf komplex-projektiven Räumen)**.** Es gebe eine multiplikative Struktur $\cdot \cup \cdot$ auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Jede stetige Abbildung $\mathbb{C}P^{2014} \longrightarrow \mathbb{C}P^{2014}$ hat einen Fixpunkt.
2. Jede stetige Abbildung $\mathbb{C}P^{2015} \longrightarrow \mathbb{C}P^{2015}$ hat einen Fixpunkt.

Aufgabe 2 (Kohomologiering topologischer Brezeln)**.** Wir betrachten die topologischen Räume S und T, die durch die folgenden Oberflächen gegeben sind:



S $\qquad$ T

Sei $\pi\colon S \longrightarrow T$ die offensichtliche Einschnürungsabbildung.

1. Zeigen Sie, dass $H^*(\pi;\mathbb{Z})\colon H^*(T;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(S;\mathbb{Z})$ gradweise surjektiv ist.
2. Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$. Bestimmen Sie mit dem ersten Teil und der Berechnung des graduierten Rings $H^*(S^1 \times S^1;\mathbb{Z})$ die Produktstruktur auf $H^*(S;\mathbb{Z})$.

Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Aufgabe 3 (Selbstabbildungen komplex-projektiver Räume)**.** Es gebe eine multiplikative Struktur $\cdot \cup \cdot$ auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$. Zu $n, d \in \mathbb{N}_{>0}$ sei

$$\begin{aligned} f_{n,d}\colon \mathbb{C}P^n &\longrightarrow \mathbb{C}P^n \\ [z_0 : \dots : z_n] &\longmapsto [z_0^d : \dots : z_n^d], \end{aligned}$$

wobei wir $\mathbb{C}P^n$ als Quotient von $\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bzgl. der Skalaramultiplikation auffassen. Bestimmen Sie $H^*(f_{n,d};\mathbb{Z})\colon H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ für alle $n, d \in \mathbb{N}_{>0}$.
Hinweis. Zur Erinnerung: Es gilt $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$.

Aufgabe 4 (umgekehrt orientierte singuläre Ketten)**.** Sei X ein topologischer Raum. Zu $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} \varrho_{X,n}\colon C_n(X) &\longrightarrow C_n(X) \\ \operatorname{map}(\Delta^n, X) \ni \sigma &\longmapsto (-1)^{\frac{n\cdot(n+1)}{2}} \cdot \sigma[n,\dots,0], \end{aligned}$$

und zu $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $\varrho_{X,n}\colon C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$ der triviale Homomorphismus.

1. Zeigen Sie, dass $\varrho_X := (\varrho_{X,n})_{n\in\mathbb{Z}}\colon C(X) \longrightarrow C(X)$ eine Kettenabbildung ist.
2. Zeigen Sie $\varrho_X \simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(X)}$.
   Hinweis. Verwenden Sie eine passende Modifikation der Prismenzerlegung. Illustrieren Sie Ihre Argumente durch geeignete Skizzen!

Bitte wenden

Bonusaufgabe (Thom-Isomorphismus).

1. Was ist der *Thom-Raum* eines Vektorbündels? Illustrieren Sie diese Konstruktion durch geeignete Skizzen!

2. Welcher bekannte topologische Raum ist der Thom-Raum des Möbiusbandes (aufgefasst als Geradenbündel über S^1)? Illustrieren Sie diesen Sachverhalt durch geeignete Skizzen!

3. Wie kann man $\mathbb{C}P^2$ als Thom-Raum eines Bündels über S^2 erhalten?

4. Was ist der *Thom-Isomorphismus* und wie kann er durch Cup-Produkte dargestellt werden?

   Hinweis. Wenn Sie möchten, können Sie sich auf die Kohomologietheorie $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z}/2)$ beschränken.

Abgabe bis zum 23. Mai 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten