Übungen zur Algebraischen Topologie III

Prof. Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 6. Juni 2014

Aufgabe 1 (Kreuz-Produkt in singulärer Homologie)**.** Sei X ein topologischer Raum, sei $n \in \mathbb{Z}$ und sei $\alpha \in H_n(X;\mathbb{Z})$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie jeweils kurz Ihre Antwort.

1. Ist n ungerade, so ist $2 \cdot \alpha \times \alpha = 0$.
2. Sind $p_1, p_2 \colon X \times X \longrightarrow X$ die Projektionen, so gilt
$$H_*(p_1;\mathbb{Z})(\alpha \times \alpha) = \alpha = H_*(p_2;\mathbb{Z})(\alpha \times \alpha).$$

Aufgabe 2 (grundlegende Eigenschaften des Kreuz-Produkts in singulärer Homologie)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $\,\cdot \times \cdot\,$ das Kreuz-Produkt auf $H_*(\,\cdot\,;R)$.

1. Zeigen Sie, dass $1 := [1 \cdot \mathrm{const}] \in H_0(\bullet;R)$ ein Einselement für $\,\cdot \times \cdot\,$ ist.
2. Zeigen Sie die Verträglichkeit von $\,\cdot \times \cdot\,$ mit Verbindungshomomorphismen.

Aufgabe 3 (Cap-Produkt in singulärer (Ko)Homologie)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei X ein topologischer Raum. Das *Cap-Produkt* $\,\cdot \cap \cdot\,$ auf den singulären (Ko)Kettenkomplexen ist wie folgt definiert: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \{0,\dots,n\}$ sei

$$\begin{aligned} \cdot \cap \cdot : C^p(X;R) \otimes_R C_n(X;R) &\longrightarrow C_{n-p}(X;R) \\ f \otimes a \cdot \sigma &\longmapsto (-1)^{p\cdot(n-p)} \cdot f({}_p\lfloor\sigma) \cdot a \cdot \sigma\rfloor_{n-p}. \end{aligned}$$

mit $a \in R$, $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^n, X)$

Für $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ oder $p \in \mathbb{Z} \setminus \{0,\dots,n\}$ sei $\,\cdot \cap \cdot : C^p(X;R) \otimes_R C_n(X;R) \longrightarrow C_{n-p}(X;R)$ die Nullabbildung. Seien nun $n, p \in \mathbb{Z}$. Bearbeiten Sie zwei der folgenden Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass das Cap-Produkt im folgenden Sinne natürlich ist: Ist $f \colon X \longrightarrow Y$ stetig und sind $g \in C^p(X;R)$, $c \in C_n(X;R)$, so gilt
$$C_{n-p}(f;R)\big((C^p(f;R)(g)) \cap c\big) = g \cap C_n(f;R)(c).$$
2. Zeigen Sie, dass das Cap-Produkt im folgenden Sinne mit den Randoperatoren verträglich ist: Für alle $f \in C^p(X;R)$ und alle $c \in C_n(X;R)$ ist
$$\partial_{n-p}(f \cap c) = (\delta^p f) \cap c + (-1)^p \cdot f \cap (\partial_n c).$$
3. Folgern Sie, dass das Cap-Produkt ein wohldefiniertes Cap-Produkt
$$\begin{aligned} \cdot \cap \cdot : H^p(X;R) \otimes_R H_n(X;R) &\longrightarrow H_{n-p}(X;R) \\ [f] \otimes [c] &\longmapsto [f \cap c] \end{aligned}$$
induziert.
4. Zeigen Sie, dass das Cap-Produkt die folgende Assoziativität bezüglich des Cup-Produkts besitzt: Für alle $q \in \mathbb{Z}$ und alle $f \in C^p(X;R)$, $g \in C^q(X;R)$ und alle $c \in C_n(X;R)$ gilt
$$(f \cup g) \cap c = f \cap (g \cap c).$$

Bitte wenden

Aufgabe 4 (kohomologisches vs. homologisches Kreuz-Produkt)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Ist $C \in \operatorname{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ und $n \in \mathbb{Z}$, so betrachten wir (analog zu Aufgabe 2 von Blatt 2) das *Kronecker-Produkt*

$$\begin{aligned}\langle \,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle \colon H^n\bigl(\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(C,R)\bigr) \otimes_R H_n(R \otimes_{\mathbb{Z}} C) &\longrightarrow R\\ [f] \otimes \Bigl[\sum_{j=0}^m a_j \otimes c_j\Bigr] &\longmapsto \sum_{j=0}^m a_j \cdot f(c_j).\end{aligned}$$

Analog zu Aufgabe 2 von Blatt 2 sieht man, dass dieses Produkt wohldefiniert und linear ist. Insbesondere erhalten wir so ein Kronecker-Produkt $H^n(\,\cdot\,;R) \otimes_R H_n(\,\cdot\,;R) \longrightarrow R$.

1. Zeigen Sie: Sind (X,A) und (Y,B) Raumpaare mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und $p,q \in \mathbb{N}$, so gilt für alle $\varphi \in H^p(X,A;R)$, $\psi \in H^q(Y,B;R)$, $\alpha \in H_p(X,A;R)$, $\beta \in H_q(X,B;R)$, dass
$$\langle \varphi \times \psi, \alpha \times \beta\rangle = (-1)^{p\cdot q} \cdot \langle \varphi, \alpha\rangle \cdot \langle \psi, \beta\rangle.$$
Hinweis. Es ist einfacher, *nicht* die expliziten Beschreibungen der Kreuz-Produkte zu verwenden. Wenn Sie möchten, können Sie sich auf den absoluten Fall einschränken.

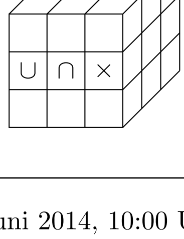
2. Leiten Sie daraus für endliche CW-Komplexe eine einfache Beschreibung des Kronecker-Produkts in singulärer (Ko)Homologie durch zelluläre (Ko)-Ketten ab.
Hinweis. Betrachten Sie die (ko)homologischen Orientierungen von $\mathbb{R}^n$ bzgl. singulärer (Ko)Homologie.

Bonusaufgabe (Cap-Produkt und (ko)homologisches Kreuz-Produkt)**.** Sei R ein kommutativer Ring mit Eins. Zeigen Sie mithilfe des Satzes über azyklische Modelle die folgende Verallgemeinerung von Teil 1 von Aufgabe 4: Seien X und Y topologische Räume, seien $n,m,p,q \in \mathbb{Z}$ und seien $\varphi \in H^p(X;R)$, $\psi \in H^q(Y;R)$, $\alpha \in H_n(X;R)$, $\beta \in H_m(Y;R)$. Dann gilt

$$(\varphi \times \psi) \cap (\alpha \times \beta) = (-1)^{q\cdot n} \cdot (\varphi \cap \alpha) \times (\psi \cap \beta).$$

Hinweis. Das Cap-Produkt $\,\cdot\, \cap \,\cdot\,$ ist in Aufgabe 3 definiert. Es gibt auch eine relative Version davon und auch für diese gilt die obige Beziehung zu den Kreuz-Produkten.

Bonusaufgabe (Cup-Cap-Cross)**.** Auf einem $3\times3\times3$-Würfel spielen drei Spieler das folgende Spiel: Jedem der drei Spieler ist eines der Symbole $\cup, \cap, \times$ zugeordnet; die drei Spieler beschriften reihum je einen der 27 Teilwürfel, der noch nicht beschriftet ist, mit ihrem Symbol; es gewinnt derjenige, der es als erstes schafft, eine horizontale, vertikale oder (raum-)diagonale Gerade zu erzeugen, die nur sein eigenes Symbol enthält. Besitzt einer der drei Spieler eine Gewinnstrategie? Begründen Sie Ihre Antwort!



Abgabe bis zum 13. Juni 2014, 10:00 Uhr, in den Briefkasten

Wir wünschen Ihnen Frohe Pfingsten!