Algebraische Topologie III – (Ko)Homologie: Dualität und Produkte im SS 2014 – Kurzskript

Prof. Dr. C. Löh Sommersemester 2013/14

Inhaltsverzeichnis

-1. Literaturhinweise 1

0. Einführung 3

1. Kohomologie 4
   1.1. Axiomatische Kohomologie . . . 4
   1.2. Singuläre Kohomologie . . . 8
   1.3. Zelluläre Kohomologie . . . 12
   1.4. Klassifikation von Kohomologietheorien . . . 16

2. Produkte auf (Ko)Homologie 29
   2.1. Multiplikative Strukturen auf Kohomologie . . . 29
   2.2. Externe Produkte auf Kohomologie . . . 33
   2.3. Beispiele für Kohomologieringe . . . 38
   2.4. Konstruktion des Cup-Produkts in singulärer Kohomologie . . . 42
   2.5. Diagonalapproximationen und der Satz von Eilenberg-Zilber . . . 50
   2.6. Externe Produkte auf Homologie . . . 55
   2.7. Das Cap-Produkt zwischen Kohomologie und Homologie . . . 59
   2.8. Übersicht über die Produkte auf singulärer (Ko)Homologie . . . 65

3. Universelle Koeffiziententheoreme 67
   3.1. Das universelle Koeffiziententheorem in Homologie . . . 67
   3.2. Das universelle Koeffiziententheorem in Kohomologie . . . 70
   3.3. Singuläre (Ko)Homologie von Produkten – das Künneththeorem . . . 73
   3.4. Singuläre Kohomologie von aufsteigenden Vereinigungen . . . 77

4. (Ko)Homologie von Mannigfaltigkeiten 82
   4.1. Topologische Mannigfaltigkeiten . . . 82
   4.2. Orientierbarkeit und Fundamentalklassen . . . 86
   4.3. Poincaré-Dualität . . . 94
   4.4. Der Abbildungsgrad für Mannigfaltigkeiten . . . 100
   4.5. deRham-Kohomologie . . . 102

A. Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie A.1
   A.1. Topologische Räume . . . A.1
   A.2. Stetige Abbildungen . . . A.3
   A.3. (Weg-)Zusammenhang . . . A.4
   A.4. Hausdorffräume . . . A.5
   A.5. Kompaktheit . . . A.6

B. Homologische Algebra B.1
   B.1. Exakte Sequenzen . . . B.1
   B.2. Kettenkomplexe und Homologie . . . B.5
   B.3. Kettenhomotopie . . . B.9
   B.4. Kokettenkomplexe und Kohomologie . . . B.14
   B.5. Azyklische Modelle . . . B.18
   B.6. Abgeleitete Funktoren, axiomatisch . . . B.21
   B.7. Der Fundamentalsatz der homologischen Algebra . . . B.24
   B.8. Konstruktion abgeleiteter Funktoren . . . B.29

Version vom 18. Januar 2018
clara.loeh@mathematik.uni-regensburg.de
Fakultät für Mathematik, Universität Regensburg, 93040 Regensburg

-1. Literaturhinweise

Die folgenden Listen enthalten eine kleine Auswahl an Literatur zur algebraischen Topologie und verwandten Gebieten.

Algebraische Topologie ((Ko)Homologie)

[1] W.F. Basener. *Topology and Its Applications*, Wiley, 2006.

[2] J.F. Davis, P. Kirk. *Lecture Notes in Algebraic Topology*, AMS, 2001.

[3] A. Dold. *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, 1980.

[4] A. Hatcher. *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
http://www.math.cornell.edu/∼hatcher/AT/ATpage.html

[5] W. Lück. *Algebraische Topologie: Homologie und Mannigfaltigkeiten*, Vieweg, 2005.

[6] W.S. Massey. *A Basic Course in Algebraic Topology*, dritte Auflage, Springer, 1997.
Hinweis. In diesem Buch wird singuläre (Ko)Homologie mithilfe von Würfeln statt Simplizes definiert.

[7] P. May. *A Concise Course in Algebraic Topology*, University of Chicago Press, 1999.

[8] T. tom Dieck. *Algebraic Topology*, European Mathematical Society, 2008.

Homologische Algebra und Gruppenkohomologie

[9] K.S. Brown. *Cohomology of Groups*, Band 87 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1982.

[10] C. Löh. *Group Cohomology & Bounded Cohomology*, Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III, Georg-August-Universität Göttingen, WS 2009/10
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie3_ws0910/prelim.pdf

[11] C. Weibel. *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 2008.

Mannigfaltigkeiten

[12] E.A. Abbott. *Flatland, A Romance of Many Dimensions*, Dover Publications, 1992.

[13] T. Bröcker, K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*, korrigierter Nachdruck, Heidelberger Taschenbücher, Springer, 2013.

[14] M.W. Hirsch. *Differential Topology*, Band 33 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1976.

[15] J.M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*, Band 218 von *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2003.

Vektorbündel

[16] M. Atiyah. *K-Theory*, Westview Press, 1994.

[17] J. Milnor, J.D. Stasheff. *Characteristic Classes*, Band 76 von *Annals of Mathematics Studies*, Princeton University Press, 1974.

Mengentheoretische Topologie

[18] K. Jänich. *Topologie*, achte Auflage, Springer, 2008.

[19] J.L. Kelley. *General Topology*, Springer, 1975.

[20] A.T. Lundell, S. Weingram. *Topology of CW-complexes*. Van Nostrand, New York, 1969.

[21] J.R. Munkres. *Topology*, zweite Auflage, Pearson, 2003.

[22] L.A. Steen. *Counterexamples in Topology*, Dover, 1995.

Kategorientheorie

[23] H. Herrlich, G.E. Strecker. *Category Theory*, dritte Auflage, Sigma Series in Pure Mathematics, Heldermann, 2007.

[24] S. MacLane. *Categories for the Working Mathematician*, zweite Auflage, Springer, 1998.

[25] B. Richter. *Kategorientheorie mit Anwendungen in Topologie*, Vorlesungsskript, WS 2010/11, Universität Hamburg,
http://www.math.uni-hamburg.de/home/richter/cats.pdf

... und viele weitere Bücher; je nach eigenen Vorlieben werden Ihnen manche Bücher besser gefallen als andere.

0. Einführung

Diese Vorlesung setzt die Einführung in die algebraische Topologie fort.

Die Kernidee der algebraischen Topologie ist es, topologische Probleme in algebraische Probleme zu übersetzen; dabei werden topologische Räume in algebraische Objekte (z.B. Vektorräume) und stetige Abbildungen in entsprechende Homomorphismen (z.B. lineare Abbildungen) übersetzt. Die dafür geeignete Abstraktionsebene ist die Sprache der Kategorien und Funktoren.

Die algebraische Topologie beschäftigt sich mit der Klassifikation topologischer Räume bzw. stetiger Abbildungen bis auf „stetige Deformationen," sogenannten Homotopien. Dazu versucht man, homotopieinvariante Funktoren zu konstruieren und zu studieren. Die Kunst dabei ist, dass solche Funktoren genug interessante Information über topologische Räume enthalten sollen, dabei aber trotzdem noch hinreichend gut berechenbar sein sollten.

Ein klassisches Beispiel homotopieinvarianter Funktoren sind (Ko)Homologietheorien wie singuläre oder zelluläre (Ko)Homologie. In der Vorlesung Algebraische Topologie II haben wir bereits Homologietheorien kennengelernt. Wir werden nun dual dazu Kohomologietheorien und ihre Interaktion mit Homologietheorien betrachten. Insbesondere werden wir Produkte in Kohomologie und Dualitätsphänomene studieren und diese Erkenntnisse auf Mannigfaltigkeiten und Gruppen anwenden.

Weitere Beispiele sind etwa Homotopiegruppen (s. Algebraische Topologie I).

Die algebraische Topologie hat eine Vielzahl von Anwendungen, sowohl in der theoretischen als auch in der angewandten Mathematik, zum Beispiel:

- *Topologie*
  - Fixpunktsätze
  - (Nicht)Einbettbarkeitsresultate
  - Studium von Geometrie und Topologie von Mannigfaltigkeiten
  - ...
- *Andere Gebiete der theoretischen Mathematik*
  - Fundamentalsatz der Algebra
  - (Nicht)Existenz gewisser Divisionsalgebren
  - Freiheits- und Endlichkeitsaussagen in der Gruppentheorie
  - Vorbildfunktion für Teile der algebraischen Geometrie
  - ...
- *Angewandte Mathematik*
  - Existenz von Nash-Gleichgewichten in der Spieltheorie
  - Konfigurationsprobleme in der Robotik
  - Untere Komplexitätsschranken für verteilte Algorithmen
  - Höhere Statistik
  - Knotentheorie
  - ...

Verweise der Form „Definition II.2.1" verweisen auf „Definition 2.1" im Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie II:
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie2_ws1314/lecture_notes.pdf

1. Kohomologie

Wir werden im folgenden die Begriffe und Konstruktionen von axiomatischer, singulärer und zellulärer Homologie dualisieren. Dies führt zum Begriff der Kohomologietheorie und insbesondere zu singulärer und zellulärer Kohomologie. In Abschnitt 1.4 geben wir einen kurzen Überblick über die Klassifikation von Kohomologietheorien.

1.1. Axiomatische Kohomologie

Die Axiome für Kohomologietheorien[1] erhalten wir aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen für Homologietheorien durch Dualisieren, d.h. durch „Umdrehen der Pfeile“. Insbesondere werden dabei kontravariante Funktoren statt kovarianten Funktoren betrachtet. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir kurz den Begriff des kontravarianten Funktors:

Definition 1.1 (kontravarianter Funktor)**.** Seien C und D Kategorien. Ein *kontravarianter Funktor* $F\colon C \longrightarrow D$ besteht aus folgenden Komponenten:
- Einer Abbildung $F\colon \mathrm{Ob}(C) \longrightarrow \mathrm{Ob}(D)$.
- Zu je zwei Objekten $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$ einer Abbildung

$$F\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Mor}_C\big(F(Y), F(X)\big).$$

Dabei müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:
- Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{F(X)}$.
- Für alle $X, Y, X \in \mathrm{Ob}(C)$ und alle $f \in \mathrm{Mor}_C(X,Y)$ und alle $g \in \mathrm{Mor}_C(Y,Z)$ gilt

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Bemerkung 1.2 (kontravariante Funktoren)**.** Seien C, D Kategorien. Kontravariante Funktoren $C \longrightarrow D$ sind nicht anderes als kovariante Funktoren $C^{\mathrm{op}} \longrightarrow D$ bzw. $C \longrightarrow D^{\mathrm{op}}$, wobei $\cdot^{\mathrm{op}}$ jeweils die entsprechende duale Kategorie bezeichnet (die man durch „Umdrehen“ der Morphismen erhält). Auf diese Weise übertragen sich viele Sachverhalte von kovarianten Funktoren direkt auf kontravariante Funktoren. Zum Beispiel folgt so, dass kontravariante Funktoren Isomorphismen auf Isomorphismen abbilden.

Beispiel 1.3 (Hom-Funktoren/Dualisieren)**.** Sei R ein Ring und sei $A \in \mathrm{Ob}_R({}_R\mathsf{Mod})$. Dann ist

$$\mathrm{Hom}_{{}_R\mathsf{Mod}}(\,\cdot\,, A)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Ab}$$

ein kontravarianter Funktor. Allgemeiner gilt (analog zu Beispiel II.1.33): Sei C eine Kategorie und $X \in \mathrm{Ob}(C)$. Dann erhalten wir einen Funktor

$$\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon C \longrightarrow \mathsf{Set},$$

den *von X dargestellten kontravarianten Funktor*. Dieser kontravariante Funktor ist wie folgt definiert:

[1] Das Präfix „Ko“ deutet immer auf ein „Umdrehen der Pfeile“ hin – außer im Begriff „kovariant“ ...

– Auf Objekten: Sei

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon\ \mathrm{Ob}(C) &\longrightarrow \mathrm{Ob}(\mathsf{Set})\\ Y &\longmapsto \mathrm{Mor}_C(Y, X).\end{aligned}$$

– Auf Morphismen: Sind $Y, Z \in \mathrm{Ob}(C)$, so definieren wir

$$\begin{aligned}\mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,, X)\colon\ \mathrm{Mor}_C(Y, Z) &\longrightarrow \mathrm{Mor}_{\mathsf{Set}}\big(\mathrm{Mor}_C(Z, X), \mathrm{Mor}_C(Y, X)\big)\\ f &\longmapsto (g \mapsto g \circ f).\end{aligned}$$

Beispiel 1.4 (simpliziale Mengen)**.** Sei Δ die Simplexkategorie. Kontravariante Funktoren $\Delta \longrightarrow \mathsf{Set}$ heißen *simpliziale Mengen*. Diese liefern wichtige Beispiele bei der Konstruktion von (Ko)Kettenkomplexen.

Wir übertragen nun die Eilenberg-Steenrod-Axiome für Homologie in diesen kontravarianten Kontext:

Definition 1.5 (Eilenberg-Steenrod-Axiome für Kohomologie)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Eine *Kohomologietheorie auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_R\mathsf{Mod}$ ist ein Paar

$$\big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big),$$

wobei

– $(h^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von kontravarianten Funktoren $\mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$
– und $(\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge natürlicher Transformationen $\delta^k\colon h^k \circ U \Longrightarrow h^{k+1}$, genannt *Verbindungshomomorphismen*, wobei $U\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor ist, der Objekte (X, A) auf $(A, \emptyset)$ und stetige Abbildungen von Paaren auf die entsprechende Einschränkungen abbildet,

mit folgenden Eigenschaften ist:

– *Homotopieinvarianz.* Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $h^k\colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein kontravarianter homotopieinvarianter Funktor (analog zu Definition II.1.53).
– *lange exakte Paarsequenz.* Für alle Raumpaare (X, A) ist die Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\delta^{k-1}} h^k(X, A) \xrightarrow{h^k(j)} h^k(X, \emptyset) \xrightarrow{h^k(i)} h^k(A, \emptyset) \xrightarrow{\delta^k} h^{k+1}(X, A) \xrightarrow{h^{k+1}(i)} \ldots$$

exakt (Definition B.2), wobei $i\colon (A, \emptyset) \longrightarrow (X, \emptyset)$ und $j\colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen sind.
– *Ausschneidung.* Für alle Raumpaare (X, A) und alle $B \subset A$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$ ist die von der Inklusion $(X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$ induzierte Abbildung

$$h^k(X, A) \longrightarrow h^k(X \setminus B, A \setminus B)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus (Abbildung (1.6)).

Man nennt $\big(h^k(\bullet, \emptyset)\big)_{k\in\mathbb{Z}}$ die *Koeffizienten* der Theorie, wobei $\bullet := \{\emptyset\}$ der Einpunktraum ist.

Eine solche Kohomologietheorie $\big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ heißt *gewöhnlich*, wenn das Dimensionsaxiom erfüllt ist:

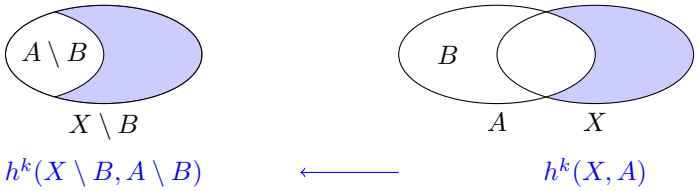


Abbildung (1.6): Ausschneidung, schematisch

– *Dimensionsaxiom.* Für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ gilt

$$h^k(\bullet, \emptyset) \cong 0.$$

Eine Kohomologietheorie $\big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ heißt *additiv*, wenn das Additivitätsaxiom erfüllt ist:

– *Additivität.* Für alle Mengen I und alle Familien $(X_i)_{i\in I}$ topologischer Räume induzieren die kanonischen Inklusionen $(X_i \longrightarrow \bigsqcup_{j\in I} X_j)_{i\in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ einen Isomorphismus

$$h^k\Big(\bigsqcup_{i\in I} X_i, \emptyset\Big) \longrightarrow \prod_{i\in I} h^k(X_i, \emptyset).$$

Ist X ein topologischer Raum und $k \in \mathbb{Z}$, so verwenden wir wie im Fall von Homologie die Abkürzung $h^k(X) := h^k(X, \emptyset)$.

Analog zu den Folgerungen aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen für Homologie erhalten wir durch „Umdrehen der Pfeile“ aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen für Kohomologie:

– mehr zu Homotopieinvarianz von Kohomologietheorien (Proposition II.2.5)
– Abspalten der Kohomologie des Punktes (Proposition II.2.6)
– reduzierte Kohomologie (Bemerkung II.2.7): Sei R ein Ring, sei $\big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist die zugehörige *k-te reduzierte Kohomologie* $\widetilde{h}^k\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ der wie folgt definierte Funktor:
  – auf Objekten: Für alle topologischen Räume X sei

$$\widetilde{h}^k(X) := \operatorname{coker}\big(h^k(c_X)\colon h^k(\bullet) \to h^k(X)\big) = h^k(X) \,/\, \operatorname{im} h^k(c_X),$$

    wobei $c_X\colon X \longrightarrow \bullet$ die konstante Abbildung bezeichnet. Man beachte, dass der Kokern das duale Gegenstück des Kerns ist.
  – auf Morphismen: Ist $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig, so ist $\widetilde{h}^k(f)\colon \widetilde{h}^k(Y) \longrightarrow \widetilde{h}^k(X)$ die (wohldefinierte!) von $h^k(f)$ induzierte Abbildung.

  Wie im Fall von Homologie ist $\widetilde{h}^k\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein homotopieinvarianter Funktor und für alle topologischen Räume X und alle $x_0 \in X$ ist die von der Inklusion $(X, \emptyset) \hookrightarrow (X, \{x_0\})$ bzw. von der Projektion $h^k(X) \longrightarrow \widetilde{h}^k(X)$ induzierte Komposition

$$h^k\big(X, \{x_0\}\big) \longrightarrow h^k(X) \longrightarrow \widetilde{h}^k(X)$$

ein Isomorphismus.
- lange exakte Tripelsequenz für Kohomologie (Proposition II.2.8)
- Einhängungsisomorphismus für Kohomologie (Satz II.2.14)
- Kohomologie von Sphären (Korollar II.2.18)
- Kohomologie von „Addition“ von Abbildungen auf Sphären (Lemma II.2.21)
- Mayer-Vietoris-Sequenz für Kohomologie (Satz II.2.27)
- lange exakte Kohomologiesequenz für Abbildungskegel (Satz II.2.33)
- Kohomologieisomorphismen und Abbildungskegel (Korollar zu Satz II.2.33)
- relative Kohomologie via Abbildungskegel (Korollar zu Satz II.2.33)

Außerdem gibt es analog zu Homologie die folgenden Existenz- und Eindeutigkeitsresultate:
- *Existenz.*
  - gewöhnliche Kohomologietheorien:
    - singuläre Kohomologie auf Top^2 (Abschnitt 1.2)
    - zelluläre Kohomologie auf CW^2 (Abschnitt 1.3)
    - deRham-Kohomologie auf glatten Mannigfaltigkeiten (Abschnitt 4.5)
    - simpliziale Kohomologie auf simplizialen Komplexen bzw. trianguierten topologischen Räumen
    - stetige Kohomologie auf Top^2
    - ...
  - Kohomologietheorien, die *nicht* gewöhnlich sind:
    - K-Theorie
    - ...
- *Eindeutigkeit.* Die Resultate (Eindeutigkeits-/Vergleichssätze, Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz) sind völlig analog zum Fall von Homologie; wir werden sie in Abschnitt 1.4 genauer aufführen.

Warum betrachtet man dann überhaupt Kohomologie?! Dafür gibt es diverse gute Gründe:
- Es gibt Theorien, die in natürlicher Weise in der kontravarianten Form auftreten (z.B. topologische K-Theorie, deRham-Kohomologie, ...).
- Kohomologie erlaubt die Definition sogenannter *charakteristischer Klassen* im Kontext klassifizierender Räume: Viele Zusatzstrukturen (z.B. Isomorphieklassen von $\mathbb{C}$-Vektorbündeln auf CW-Komplexen) auf topologischen Räumen werden durch einen sogenannten *klassifizierenden Raum* B bzw. den zugehörigen Funktor

$$[\,\cdot\,, B]\colon\ \mathsf{Top}_{\mathsf{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

klassifiziert. Ist nun $\big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Kohomologietheorie auf Top^2 und kennt man ausgezeichnete Klassen $(c_m \in h^{k_m}(B))_{m\in\mathbb{N}}$ in der Kohomologie von B (z.B. geeignete Erzeuger), so erhält man für jede Wahl einer entsprechenden (d.h. durch B klassifizierten) Zusatzstruktur auf X, d.h. für jede Homotopieklasse $[f] \in [X, B]$, zugehörige Kohomologieklassen

$$\big(h^{k_m}(f)(c_m) \in h^{k_m}(X)\big)_{m\in\mathbb{N}}$$

sogenannte *charakteristische Klassen.*

– Häufig sind Kohomologietheorien mit einer *Produktstruktur* versehen. Diese zusätzliche Struktur erlaubt es in vielen Fällen, mehr Homotopietypen zu unterscheiden als die additive Struktur; z.B. zeigt die multiplikative Struktur in singulärer Kohomologie, dass der Torus und $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ *nicht* homotopieäquivalent sind, obwohl ihre singuläre Homologie isomorph ist.
– (Ko)Homologietheorien treten oft in zueinander passenden Paaren auf und die in beiden Theorien enthaltene Information kann dann kombiniert werden. Dies führt zu *Dualitätsphänomenen*; diese sind besonders im Kontext von Mannigfaltigkeiten von zentraler Bedeutung.

1.2. Singuläre Kohomologie

Wir dualisieren nun die Konstruktion singulärer Homologie (mithilfe der Konzepte aus Abschnitt B.4) und erhalten so singuläre Kohomologie. Im Anschluss weisen wir nach, dass es sich dabei um eine gewöhnliche additive Kohomologietheorie handelt.

Setup 1.7. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins und Z ein Links-R-Modul.

Definition 1.8 (singulärer Kokettenkomplex mit konstanten Koeffizienten)**.** Der *singuläre Kokettenkomplexfunktor mit Koeffizienten in Z* ist der kontravariante Funktor

$$C^*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,,Z) \circ C(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mathbb{Z})\colon\ \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{CoCh},$$

wobei $C(\,\cdot\,,\,\cdot\,;\mathbb{Z})\colon\ \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ der singuläre Kettenkomplexfunktor ist (Definition II.3.9).

Bemerkung 1.9 (singulärer Kokettenkomplex, explizit)**.** Sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Ist (X, A) ein Raumpaar und $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$C^k(X, A; Z) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(C_k(X, A; \mathbb{Z}), Z\big)$$

kanonisch und natürlich isomorph zu

$$\big\{f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_k(X), Z) \;\big|\; \forall_{\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^k, A)} \quad f(\sigma) = 0\big\}.$$

Der Korandoperator bzw. die Kokettenabbildung für eine gegebene stetige Abbildung von Raumpaaren sind im wesentlichen durch Komposition mit den Inklusionen der Seiten des Standardsimplex bzw. der gegebenen stetigen Abbildung gegeben.

Definition 1.10 (singuläre Kohomologie mit konstanten Koeffizienten)**.** Sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Der *singuläre Kohomologiefunktor mit Koeffizienten in Z* ist der kontravariante Funktor

$$H^*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z) := H^* \circ C^*(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z)\colon\ \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$

Analog zu singulärer Homologie erhalten wir:

Beispiel 1.11 (singuläre Kohomologie des Einpunktraumes)**.** Der singuläre Kokettenkomplex $C^*(\bullet; Z)$ des Einpunktraumes mit Koeffizienten in Z ist nach Konstruktion (bzw. Beispiel II.3.15 für $\mathbb{Z}$-Koeffizienten) isomorph zu dem Kokettenkomplex

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\ \ldots & \xleftarrow{\mathrm{id}_Z} & Z & \xleftarrow{0} & Z & \xleftarrow{\mathrm{id}_Z} & Z & \xleftarrow{0} & Z & \xleftarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0} & 0 & \xleftarrow{0} & \ldots \end{array}$$

Also erhalten wir für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$H^k(\bullet; Z) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k = 0 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus 0. \end{cases}$$

Proposition 1.12 (starke Additivität von singulärer Kohomologie)**.** *Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_i)_{i\in I}$ die Familie der Wegzusammenhangskomponenten von X. Dann induzieren die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i\in I}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$H^k(X; \mathbb{Z}) \longrightarrow \prod_{i\in I} H^k(X_i; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i\in I}$ einen Isomorphismus

$$\bigoplus_{i\in I} C(X_i; \mathbb{Z}) \longrightarrow C(X; \mathbb{Z})$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$ (Beweis von Proposition II.3.17); die direkte Summe von Kettenkomplexen ist dabei durch die gradweise direkte Summe der Kettenmoduln und der Randoperatoren gegeben.

Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,, Z)$ zeigt, dass die Inklusionen $(X_i \hookrightarrow X)_{i\in I}$ einen Isomorphismus

$$C^*(X; Z) \longrightarrow \prod_{i\in I} C^*(X_i; Z)$$

in ${}_R\mathsf{CoCh}$ induzieren; das Produkt von Kokettenkomplexen ist dabei durch das gradweise Produkt der Kokettenmoduln und der Korandoperatoren gegeben. Da Kohomologie von Kokettenkomplexen mit Produkten verträglich ist, folgt die Behauptung. □

Satz 1.13 (singuläre Kohomologie im Grad 0)**.**

1. *Ist X ein wegzusammenhängender nicht-leerer topologischer Raum, so induziert die konstante Abbildung $X \longrightarrow \bullet$ einen Isomorphismus*

$$H^0(\bullet; Z) \longrightarrow H^0(X; Z)$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$.

2. *Also ist* $H^0(\,\cdot\,;Z)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ *natürlich isomorph zu*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,,Z)\circ F\circ \pi_0^+\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod},$$

wobei $F\colon \mathsf{Set} \longrightarrow \mathsf{Ab}$ *der freie Erzeugungsfunktor (Beispiel II.1.32) und*

$$\pi_0^+ := [\bullet,\,\cdot\,]\colon \mathsf{Top} \longrightarrow \mathsf{Set}$$

der Wegzusammenhangskomponentenfunktor ist.

Beweisskizze. Der zweite Teil folgt mithilfe von Proposition 1.12 aus dem ersten Teil. Der erste Teil folgt analog zum Beweis von Satz II.3.18 aus der Definition von singulärer Kohomologie. □

Singuläre Ketten und singuläre Zyklen lassen sich leicht veranschaulichen; für singuläre Koketten und Kozyklen ist es mit unseren bisherigen Mitteln etwas mühsamer, eine anschauliche Interpretation zu geben. Wir werden später im Zusammenhang mit deRham-Kohomologie noch ein besseres Verständnis dafür erhalten (Abschnitt 4.5).

Beispiel 1.14 (singuläre Koketten auf S^1)**.**

– Die Abbildung

$$\begin{aligned} C_1(S^1;\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z}\\ \mathrm{map}(\Delta^1,S^1)\ni\sigma &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

ist eine Kokette in $C^1(S^1;\mathbb{Z})$, aber *kein* Kozykel, denn für alle $\sigma\in\mathrm{map}(\Delta^2,S^1)$ gilt

$$(\delta^1 f)(\sigma) = (-1)^2\cdot f(\partial_2\sigma) = 1-1+1\neq 0.$$

– Sei $C\subset C(S^{\cdot}\mathbb{Z})$ der Unterkomplex, der von den singulären Simplizes erzeugt wird, deren Ecken auf $1\in S^1$ abgebildet werden. Die Inklusion $C\hookrightarrow C(S^1;\mathbb{Z})$ ist eine Kettenhomotopieäquivalenz (Beweis von Satz II.3.81); sei $r\colon C(S^1;\mathbb{Z})\longrightarrow C$ ein Kettenhomotopieinverses. Dann ist die obere horizontale Abbildung in

$$\begin{array}{ccc} C_1(S^1;\mathbb{Z}) & \dashrightarrow & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle r}\big\downarrow & & \big\uparrow{\scriptstyle \cong} \\ C_1 & \longrightarrow & \pi_1(S^1,1) \end{array}$$

ein Kozykel. Dabei ist die untere horizontale Abbildung dadurch gegeben, dass singuläre 1-Simplizes mit beiden Ecken in 1, als Schleifen aufgefasst, auf das entsprechende Element von $\pi_1(S^1,1)$ abgebildet werden. Die rechte vertikale Abbildung ist der Isomorphismus, der $[\mathrm{id}_{S^1}]_*$ mit $1\in\mathbb{Z}$ identifiziert.
Auf glatten Simplizes kann man diese Abbildung zum Beispiel auch als Integrationsprozess „$\sigma\mapsto 1/2\pi i\cdot\int_\sigma 1/z\;dz$“ im Sinne der Funktionentheorie verstehen; die Tatsache, dass es sich um einen Kozykel handelt, folgt dabei aus dem Cauchyschen Integralsatz. Analog kann man auch viele andere Kozykel bzw. singuläre Kohomologieklassen als geeignete Integrationsabbildungen auffassen (Abschnitt 4.5).

Der folgende Satz zeigt insbesondere, dass gewöhnliche Kohomologietheorien mit vorgegebenen Koeffizienten existieren:

Satz 1.15 (singuläre Kohomologie als gewöhnliche Kohomologietheorie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann ist*

$$\big((H^k(\,\cdot\,,\,\cdot\,;Z))_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$

eine gewöhnliche, additive Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Koeffizienten isomorph zu Z. Die natürlichen Transformationen $(\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ sind dabei wie folgt definiert: Ist (X, A) ein Raumpaar und $k \in \mathbb{N}$, so ist

$$\begin{aligned}\delta^k_{(X,A)} \colon H^k(A;Z) &\longrightarrow H^{k+1}(X,A;Z)\\ [f] &\longmapsto \big[c \mapsto (-1)^{k+1} \cdot „f(\partial_{k+1}(c))“\big],\end{aligned}$$

wobei wir $f \in C^k(A;Z)$ auf $C_k(X;\mathbb{Z})$ durch 0 auf $\{\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^k, X) \mid \sigma(\Delta^k) \not\subset A\}$ fortsetzen; ist $k \in \mathbb{Z}_{<0}$, so ist $\delta^k := 0$.

Beweisskizze. Wir beweisen dies aufbauend auf den entsprechenden Argumenten für singuläre Homologie:

- *Homotopieinvarianz:* Seien $f, g \colon (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ mit $f \simeq_{\mathsf{Top}^2} g$. Dann gilt

  $$C(f;\mathbb{Z}) \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} C(g;\mathbb{Z}) \colon C(X,A;\mathbb{Z}) \longrightarrow C(Y,B;\mathbb{Z})$$

  (Satz II.3.21). Also ist

  $$C^*(f;Z) \simeq_{{}_R\mathsf{CoCh}} C^*(g;Z) \colon C^*(Y,B;Z) \longrightarrow C^*(X,A;Z)$$

  (Proposition B.51), und somit $H^*(f;Z) = H^*(g;Z)$.
- *Konstruktion der Verbindungshomomorphismen, Natürlichkeit und lange exakte Paarsequenz:* Sei (X, A) ein Raumpaar und seien $i \colon A \longrightarrow X$ und $j \colon (X, \emptyset) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusionen. Die (natürliche) Sequenz

  $$0 \longrightarrow C(A;\mathbb{Z}) \xrightarrow{C(i;\mathbb{Z})} C(X;\mathbb{Z}) \xrightarrow{C(j;\mathbb{Z})} C(X,A;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

  in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ ist (gradweise) exakt; dabei besitzt die Inklusion $C(i;\mathbb{Z})$ gradweise einen Spalt (Beweis von Satz II.3.20). Also ist auch die nach Anwenden von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,, Z)$ erhaltene Sequenz

  $$0 \longrightarrow C^*(X,A;Z) \xrightarrow{C^*(j;Z)} C^*(X;Z) \xrightarrow{C^*(i;Z)} C^*(A;Z) \longrightarrow 0$$

  gradweise exakt. Die Behauptung folgt nun aus der algebraischen langen exakten (Ko)Homologiesequenz (Satz B.23 gilt analog auch für Kokettenkomplexe und Kohomologie).

– *Ausschneidung:* Sei (X, A) ein Raumpaar und sei $B \subset X$ mit $\overline{B} \subset A^\circ$. Sei $i\colon (X \setminus B, A \setminus B) \longrightarrow (X, A)$ die Inklusion. Dann ist

$$H_k(i;\mathbb{Z})\colon H_k(X \setminus B, A \setminus B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_k(X, A;\mathbb{Z})$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus (Korollar II.3.40). Man überlegt sich leicht, dass $C(X \setminus B, A \setminus B;\mathbb{Z})$ und $C(X, A;\mathbb{Z})$ aus freien $\mathbb{Z}$-Moduln besteht und dass die Kettenmoduln in negativen Graden trivial sind. Dann folgt mit einem Argument aus der homologischen Algebra, dass $C(i;\mathbb{Z})\colon C(X \setminus B, A \setminus B;\mathbb{Z}) \longrightarrow C(X, A;\mathbb{Z})$ nicht nur ein Homologieisomorphismus, sondern sogar eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ ist. Mit Korollar B.52 folgt nun, dass die induzierte Abbildung $H^k(i;Z)\colon H^k(X, A;Z) \longrightarrow H^k(X \setminus B, A \setminus B;Z)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist.
– *Dimensionsaxiom:* Dies ist die Berechnung aus Bespiel 1.11.
– *Additivität:* Dies folgt aus Proposition 1.12. □

Insbesondere besitzt singuläre Kohomologie die in Abschnitt 1.1 genannten Eigenschaften, die aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen folgen.

1.3. Zelluläre Kohomologie

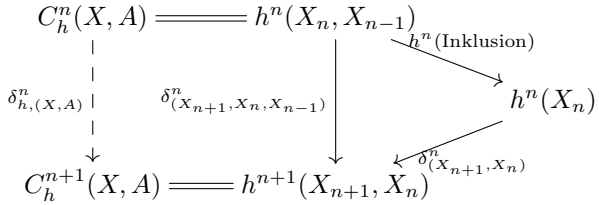
Wir konstruieren nun zelluläre Kohomologie. Dies geschieht analog zur Konstruktion von zellulärer Homologie. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall gewöhnlicher Kohomologietheorien.

Setup 1.16. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins, sei $h := \big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Koeffizienten $Z := h^0(\bullet)$.

Definition 1.17 (zellulärer Kokettenkomplex)**.** Der *zelluläre Kokettenkomplex zu* h ist der wie folgt definierte kontravariante Funktor $C_h\colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{CoCh}$:
– Auf Objekten: Sei (X, A) ein relativer CW-Komplex mit relativer CW-Struktur $(X_n)_{n\in\mathbb{N}\cup\{-1\}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$C_h^n(X, A) := h^n(X_n, X_{n-1})$$

und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $C_h^n(X, A) := 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ definieren wir $\delta^n_{h,(X,A)}$ durch:



– Auf Morphismen: Ist $f\colon (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ eine zelluläre Abbildung zwischen relativen CW-Komplexen, so definieren wir

$$C_h^n(f) := h^n(f|_{X_n})\colon C_h^n(Y,B) = h^n(Y_n, Y_{n-1}) \longrightarrow h^n(X_n, X_{n-1}) = C_h^n(X,A)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $C_h^n(f) := 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$. Dann ist

$$C_h(f) := \big(C_h^n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{CoCh}}\big(C_h(Y,B), C_h(X,A)\big).$$

Diese Konstruktion können wir auch als eine geeignete Dualisierung des zellulären Kettenkomplexes auffassen:

Bemerkung 1.18 (zellulärer Kokettenkomplex und Inzidenzzahlen)**.** Analog zum zellulären Kettenkomplex einer gewöhnlichen Homologietheorie (Proposition II.4.22 und Bemerkung II.4.24) können wir auch den zellulären Kokettenkomplex einer gewöhnlichen Kohomologietheorie h durch Inzidenzzahlen beschreiben und man erhält, dass die kontravarianten Funktoren

$$C_h\colon \mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{CoCh}$$

und

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,, Z) \circ C^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}\colon \mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{CoCh}$$

natürlich isomorph sind. (Ist h additiv, so gilt dies auch auf CW^2).

Definition 1.19 (zelluläre Kohomologie)**.** Wir definieren *zelluläre Kohomologie bezüglich h* als den kontravarianten Funktor

$$H_h^* := H^* \circ C_h\colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$

Beispiel 1.20 (zelluläre Kohomologie reell-projektiver Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Auf $\mathbb{R}P^n$ betrachten wir die CW-Struktur

$$\emptyset \subset \mathbb{R}P^0 \subset \mathbb{R}P^1 \subset \mathbb{R}P^2 \subset \cdots \subset \mathbb{R}P^n = \mathbb{R}P^n = \cdots$$

(Beispiel II.4.26). Dann ist $C^{H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})}(\mathbb{R}P^n)$ in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ isomorph zu

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{1+(-1)^n} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \ldots & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & & & n & & n-1 & & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & &
\end{array}$$

Mit Bemerkung 1.18 folgt somit, dass $C_h(\mathbb{R}P^n)$ in ${}_R\mathsf{CoCh}$ zu

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
\ldots & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & Z & \xleftarrow{1+(-1)^n} & Z & \longleftarrow & \ldots & \xleftarrow{0} & Z & \xleftarrow{2} & Z & \xleftarrow{0} & Z & \longleftarrow & 0 & \longleftarrow & \ldots \\
 & & & & n & & n-1 & & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & &
\end{array}$$

isomorph ist. Also ist

$$H_h^k(\mathbb{R}P^n) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k = 0 \\ \{x \in Z \mid 2 \cdot x = 0\} & \text{falls } k \in \{1, \dots, n-1\} \text{ ungerade ist} \\ Z/2 \cdot Z & \text{falls } k \in \{2, \dots, n\} \text{ gerade ist} \\ Z & \text{falls } k = n \text{ ungerade ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. Wir erhalten daher zum Beispiel:

	$H_h^k(\mathbb{R}P^n)$		
$Z = R$	$k \in \{1, \dots, n-1\}$ ungerade	$k \in \{2, \dots, n\}$ gerade	falls $k = n$ ungerade
$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$	$\mathbb{Z}/2$
$\mathbb{Q}$	0	0	$\mathbb{Q}$

Beispiel 1.21 (zelluläre Kohomologie komplex-projektiver Räume)**.** Ist $n \in \mathbb{N}$, so folgt mit der CW-Struktur

$$\emptyset \subset \mathbb{C}P^0 \subset \mathbb{C}P^1 \subset \mathbb{C}P^2 \dots \mathbb{C}P^n = \mathbb{C}P^n = \dots$$

(die in jeder gerade Dimension kleiner gleich $2 \cdot n$ genau eine offene Zelle besitzt), dass

$$H_h^k(\mathbb{C}P^n) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k \in \{0, \dots, 2 \cdot n\} \text{ gerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Beispiel 1.22 (zelluläre Kohomologie des Torus)**.** Die Standard-CW-Struktur auf dem Torus $S^1 \times S^1$ (Abbildung II.(4.5)) liefert

$$H_h^k(S^1 \times S^1) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k \in \{0, 2\} \\ Z \oplus Z & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Analog zum Fall von zellulärer Homologie vergleichen wir nun zelluläre Kohomologie mit der zugrundeliegenden gewöhnlichen Kohomologietheorie; insbesondere können wir gewöhnliche Kohomologie auf endlichen CW-Komplexen zellulär berechnen:

Satz 1.23 (zelluläre Kohomologie einer gewöhnlichen Kohomologietheorie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei $h := \big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine gewöhnliche Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann sind die Funktoren*

$$H_h^n \colon \mathsf{CW}_{\mathsf{fin}}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod},$$
$$h^n \colon \mathsf{CW}_{\mathsf{fin}}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$$

natürlich isomorph. Genauer gilt:

1. *Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex und $n \in \mathbb{Z}_{<0}$, so ist*

$$H_h^n(X, A) \cong 0 \cong h^n(X, A).$$

2. *Ist (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex, so induzieren die von den Inklusionen induzierten Abbildungen*

$$C_h^n(X, A) = h^n(X_n, X_{n-1}) \longrightarrow h^n(X_n, A) \longleftarrow h^n(X, A)$$

einen Isomorphismus $H_h^n(X, A) \cong h^n(X, A)$.

Beweisskizze. Man kann den Beweis für zelluläre Homologie (Beweis von Satz II.4.28) in den entsprechenden Beweis für zelluläre Kohomologie übersetzen. □

Als Konsequenz erhalten wir auch die entsprechenden Endlichkeits-/Verschwindungs- und Eindeutigkeitsresultate für gewöhnliche Kohomologie.

Korollar 1.24 (Endlichkeits-/Verschwindungsresultate für gewöhnliche Kohomologie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine gewöhnliche Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei (X, A) ein endlicher relativer CW-Komplex der Dimension N.*

1. *Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, N\}$*

$$h^k(X, A) \cong H_h^k(X, A) \cong 0.$$

2. *Ist R noethersch (z.B. $\mathbb{Z}$ oder ein Körper) und ist $h^0(\bullet) \cong_{{}_R\mathsf{Mod}} R$, so gilt: Für alle $k \in \{0, \ldots, N\}$ ist $h^k(X, A) \cong H_h^k(X, A)$ ein endlich erzeugter R-Modul.*

Beweisskizze. Dies folgt wie im Fall von zellulärer Homologie (Korollar II.4.30) aus Satz 1.23. □

Korollar 1.25 (Eindeutigkeit gewöhnlicher Kohomologietheorien auf $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}}$)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine gewöhnliche Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$, und sei $Z := h^0(\bullet)$. Sei außerdem $n \in \mathbb{Z}$.*

1. *Ist k eine gewöhnliche Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und ist $k^0(\bullet) \cong Z$, so sind h^n und k^n als kontravariante Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.*
2. *Insbesondere sind h^n und $H^n(\,\cdot\,; Z)$ als kontravariante Funktoren $\mathsf{CW}^2_{\mathsf{fin}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ natürlich isomorph.*

Beweisskizze. Dies folgt wie im Fall von zellulärer Homologie aus Satz 1.23 und der Beschreibung des zellulären Kokettenkomplexes über Inzidenzzahlen (Bemerkung 1.18). □

Außerdem können wir die Euler-Charakteristik auch über (zelluläre) Kohomologie berechnen:

Definition 1.26 (kohomologische Betti-Zahl)**.** Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei R ein noetherscher Ring mit Eins, der einen geeigneten Rangbegriff rk_R für endlich erzeugte R-Moduln besitzt.[2] Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist

$$b^n(X;R) := \mathrm{rk}_R\, H^n(X;R) \in \mathbb{N}$$

die *n-te kohomologische Betti-Zahl von X*.

Satz 1.27 (Euler-Charakteristik über kohomologische Betti-Zahlen)**.** *Sei X ein endlicher CW-Komplex und sei R ein noetherscher Ring mit Eins, der einen geeigneten Rangbegriff rk_R für endlich erzeugte R-Moduln besitzt. Dann ist*

$$\chi(X) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n \cdot b^n(X;R).$$

Beweisskizze. Dies folgt mithilfe der expliziten Beschreibung des zellulären Kokettenkomplexes (Bemerkung 1.18) wie im Fall von Homologie (Satz II.4.48). □

Den Zusammenhang zwischen homologischen und kohomologischen Betti-Zahlen werden wir im Zusammenhang mit universellen Koeffiziententheoremen genauer untersuchen (Abschnitt 3).

1.4. Klassifikation von Kohomologietheorien

Wir haben bereits gesehen, dass gewöhnliche Kohomologietheorien auf (endlichen) CW-Komplexen im wesentlichen durch ihre Koeffizienten eindeutig bestimmt sind. Wir werden nun einen kurzen Überblick über die Klassifikation (der additiven Struktur) verallgemeinerter Kohomologietheorien geben.

Wir beginnen mit Eindeutigkeitsaussagen: Analog zum Fall von Homologietheorien gibt es auch für Kohomologietheorien einen entsprechenden großen Bruder zu zellulärer Kohomologie: die Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz auf endlichen relativen CW-Komplexen:

Satz 1.28 (Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz für Kohomologie)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei h eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Ist (X,A) ein endlicher relativer CW-Komplex, so gibt es eine (in (X,A) und h) natürliche, konvergente, kohomologische Spektralsequenz*

$$E_1^{pq} = h^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Longrightarrow h^{p+q}(X,A)$$

bzw.

$$E_2^{pq} = H^p\big(X,A;h^q(\bullet)\big) \Longrightarrow h^{p+q}(X,A).$$

Damit verwandt ist das folgende elementare Eindeutigkeitsresultat; dabei ist $\mathsf{CW}^{②}$ die Kategorie der CW-Paare und Kohomologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ und natürliche Transformatinen dazwischen sind analog zum homologischen Fall definiert.

[2] D.h. für alle $d \in \mathbb{N}$ ist $\mathrm{rk}_R\, R^d = d$ und rk_R ist unter kurzen exakten Sequenzen endlich erzeugter R-Moduln additiv; einen solchen Rangbegriff gibt es zum Beispiel für Hauptidealringe (und Körper).

Satz 1.29 (Vergleichssatz für Kohomologietheorien)**.** *Sei R ein Ring, seien h und h' Kohomologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $(T^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine natürliche Transformation $h \Longrightarrow h'$ von Kohomologietheorien auf $\mathsf{CW}^{②}$ mit der Eigenschaft, dass*

$$T^k(\bullet)\colon h^k(\bullet) \longrightarrow h'^k(\bullet)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist. Dann folgt: Für alle endlichen CW-Paare (X, A) ist

$$T^k(X, A)\colon h^k(X, A) \longrightarrow h'^k(X, A)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Dies folgt wie im homologischen Fall (Satz II.4.41) durch Induktion über die Skelette. □

Nach diesen Eindeutigkeitsresultaten stellen sich die folgenden Fragen:
- „Wieviele“ Kohomologietheorien gibt es?
- Wie kann man Kohomologietheorien konstruieren?
- Durch welche Objekte kann man Kohomologietheorien klassifizieren?

Wir werden im folgenden skizzieren, wie man diese Fragen mit homotopietheoretischen Methoden beantworten kann.

Der Schlüssel dazu ist der Brownsche Darstellungssatz 1.33. Dazu betrachtet man die folgende Klasse von Funktoren[3]:

Definition 1.30 (Brown-Funktor)**.** Ein kontravarianter Funktor $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ist ein *Brown-Funktor*, wenn er folgende Eigenschaften besitzt:
- *Homotopieinvarianz.* Der Funktor F faktorisiert über den Homotopieklassenfunktor $\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}_{*\mathsf{h}}$.
- *(Schwaches) Wedge-Axiom.* Für alle (nicht-leeren) Familien $(X_i, x_i)_{i\in I}$ punktierter topologischer Räume mit der Eigenschaft, dass $(X_i, x_i) \simeq_* (X_i \sqcup [0, 1]/(x_i \sim 0), [1])$ für alle $i \in I$ gilt, induzieren die Inklusionen $\big((X_i, x_i) \hookrightarrow \bigvee_{j\in I}(X_j, x_j)\big)_{i\in I}$ der Summanden eine Bijektion

$$F\Big(\bigvee_{i\in I}(X_i, x_i)\Big) \longrightarrow \prod_{i\in I} F(X_i, x_i).$$

- *Mayer-Vietoris-Axiom* (Abbildung (1.31)). Ist (X, x_0) ein punktierter topologischer Raum und sind $U, V \subset X$ mit $U^\circ \cup V^\circ = X$ und $x_0 \in U \cap V$ und sind $j_U\colon U \cap V \longrightarrow U$, $j_V\colon U \cap V \longrightarrow V$, $i_U\colon U \longrightarrow X$ und $i_V\colon V \longrightarrow X$ die Inklusionen, so gilt: Für alle $u \in F(U, x_0)$ und $v \in F(V, x_0)$ mit

$$F(j_U)(u) = F(j_V)(v)$$

gibt es ein $z \in F(X, x_0)$ mit

$$F(i_U)(z) = u \quad \text{und} \quad F(i_V)(z) = v.$$

[3] Es gibt in der Literatur im Detail einige Varianten dieses Begriffs; wir haben uns hier für eine in unserem Kontext pragmatische, aber nicht für die konzeptionellste, Version entschieden.

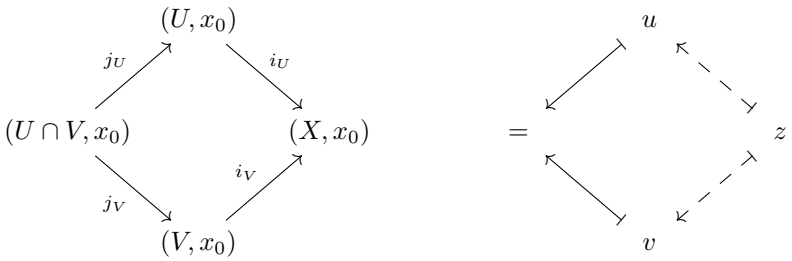


Abbildung (1.31): Mayer-Vietoris-Axiom für Brown-Funktoren, schematisch

Dabei ist Set_* die Kategorie der punktierten Mengen:
- Objekte sind alle Paare (X, x_0), wobei X eine Menge und $x_0 \in X$ ist.
- Morphismen sind Abbildungen von Mengen, die den Basispunkt erhalten.
- Die Verknüpfungen sind durch gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Das zentrale Beispiel für Brown-Funktoren erhält man aus Kohomologietheorien:

Proposition 1.32 (Kohomologietheorien als Brown-Funktoren)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei h eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist*

$$\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2 \xrightarrow{h^n} {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$$

(was zum Funktor

$$\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top} \xrightarrow{\widetilde{h}^n} {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$$

natürlich isomorph ist) ein Brown-Funktor im obigen Sinne. Dabei ist $\mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Top}^2$ der Funktor, der punktierte Räume als Raumpaare mit einpunktigem Unterraum auffasst und ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ist der Funktor, der die Modulstruktur vergisst und das neutrale Element 0 als Basispunkt interpretiert.

Beweisskizze. Dies folgt leicht aus den Eilenberg-Steenrod-Axiomen für Kohomologie und der Mayer-Vietoris-Sequenz für Kohomologie. □

Wir werden nun sehen, dass alle Brown-Funktoren auf einer Kategorie hinreichend gutartiger Räume darstellbar ist. Dazu sei CW_{0*} die Kategorie der wegzusammenhängenden punktierten CW-Komplexe, wobei der Basispunkt eine 0-Zelle der entsprechenden CW-Struktur ist. Außerdem sei $\mathsf{CW}_{0*\mathsf{h}}$ die zugehörige Homotopiekategorie (bzgl. punktierter Homotopien).

Satz 1.33 (Brownscher Darstellungssatz)**.** *Sei $F\colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{Set}_*$ ein Brown-Funktor. Dann ist F im folgenden Sinne darstellbar: Es gibt ein $(Y, y_0) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CW}_{0*})$ mit der Eigenschaft, dass*

$$\mathsf{CW}_{0*} \longrightarrow \mathsf{Top}_* \xrightarrow{F} \mathsf{Set}_*$$

und

$$\mathsf{CW}_{0*} \longrightarrow \mathsf{CW}_{0*\mathsf{h}} \xrightarrow{[\,\cdot\,,(Y,y_0)]_*} \mathsf{Set}_*$$

natürlich isomorph sind (wobei $\mathsf{CW}_{0*} \longrightarrow \mathsf{CW}_{0*\mathsf{h}}$ *der Homotopieklassenfunktor ist).*

Mit dem Yoneda-Lemma folgt somit insbesondere, dass man Brown-Funktoren im wesentlichen durch ihre darstellenden Objekte verstehen kann:

Bemerkung 1.34 (Yoneda-Lemma)**.** Sei C eine Kategorie.

– Ist $F\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ ein kontravarianter Funktor und ist $Y \in \mathrm{Ob}(C)$, so sind

$$\begin{array}{rcl} \text{„Menge“ der} & & \\ \text{natürlichen Transformationen } \mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,,Y) \Rightarrow F & \rightleftarrows & F(Y) \\ T & \longmapsto & T(\mathrm{id}_Y) \\ \left(\begin{array}{ccc} \mathrm{Mor}_C(X,Y) & \to & F(X) \\ f & \mapsto & F(f)(u) \end{array}\right)_{X\in\mathrm{Ob}(C)} & \longmapsfrom & u \end{array}$$

zueinander inverse Bijektionen.[4]
Ist F darstellbar, etwa durch $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und einen natürlichen Isomorphismus $T\colon \mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,,Y) \Longrightarrow F$, so nennt man $u := T(\mathrm{id}_Y) \in F(Y)$ ein *universelles Element für* F. Insbesondere ist die Bijektion $T(X)\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) \longrightarrow F(X)$ für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ von der Form

$$\begin{aligned} T(X)\colon \mathrm{Mor}_C(X,Y) &\longrightarrow F(X) \\ f &\longmapsto \big(F(f)\big)(u). \end{aligned}$$

– Sind $F, F'\colon C \longrightarrow \mathsf{Set}$ kontravariante darstellbare Funktoren, dargestellt durch $Y \in \mathrm{Ob}(C)$ und einen natürlichen Isomorphismus $T\colon \mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,,Y) \Longrightarrow F$ bzw. durch $Y' \in \mathrm{Ob}(C)$ und $T'\colon \mathrm{Mor}_C(\,\cdot\,,Y') \Longrightarrow F'$, so sind

$$\begin{array}{rcl} \text{„Menge“ der} & & \\ \text{natürlichen Transformationen } F \Rightarrow F' & \rightleftarrows & \mathrm{Mor}_C(Y,Y') \\ S & \longmapsto & \big(T'(Y)^{-1} \circ S(Y) \circ T(Y)\big)(\mathrm{id}_Y) \\ \big(T'(X) \circ \mathrm{Mor}_C(X,f) \circ T(X)^{-1}\big)_{X\in\mathrm{Ob}(C)} & \longmapsfrom & f \end{array}$$

zueinander inverse Bijektionen. Diese Tatsachen lassen sich leicht direkt nachrechnen und übertragen sich auf die Kategorie Set_* der punktierten Mengen.

Beweisskizze (des Brownschen Darstellungssatzes). Die zentrale Idee ist, induktiv geeignete CW-Komplexe zusammen mit immer universelleren Klassen zu konstruieren:

[4] Strenggenommen bildet die linke Seite keine Menge; es ist jedoch klar, wie die Aussage zu interpretieren ist.

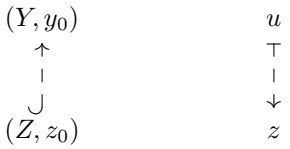


Abbildung (1.35): Beweis des Brownschen Darstellungssatzes: Schritt 1, schematisch

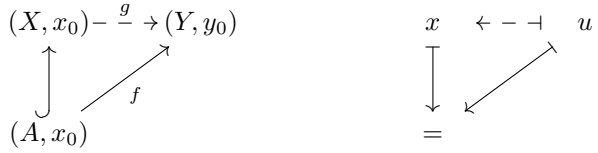


Abbildung (1.36): Beweis des Brownschen Darstellungssatzes: Schritt 2, schematisch

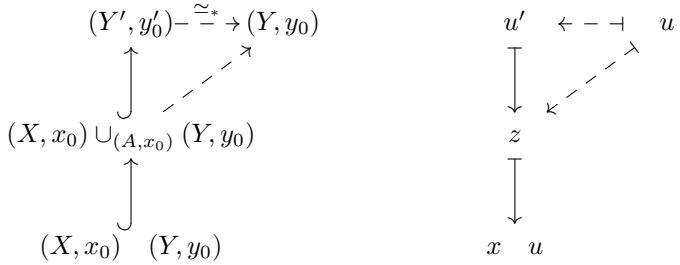


Abbildung (1.37): Beweis des Brownschen Darstellungssatzes: Beweis von Schritt 2, schematisch

0. Wir führen zunächst folgende Begriffe ein: Sei $(Y, y_0) \in \mathsf{CW}_{0*}$ und $u \in F(Y, y_0)$.
   - Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $((Y, y_0), u)$ ein *n-universelles Paar (für F)*, falls

$$\begin{aligned} \pi_k(Y, y_0) =_{\mathsf{Set}_*} \big[(S^k, e_1^{k+1}), (Y, y_0)\big]_* &\longrightarrow F(S^k, e_1^{k+1}) \\ [f]_* &\longmapsto F(f)(u) \end{aligned}$$

     für alle $k \in \{0, \dots, n-1\}$ bijektiv und für $k = n$ surjektiv ist.
   - Das Paar $((Y, y_0), u)$ heißt *∞-universell (für F)*, wenn es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein n-universelles Paar ist.

1. Sei $(Z, z_0) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CW}_{0*})$ und sei $z \in F(Z, z_0)$.
   Behauptung. Dann gibt es ein ∞-universelles Paar $((Y, y_0), u)$ mit folgender Eigenschaft: Es ist (Z, z_0) ein Unterkomplex von (Y, y_0) und für die Inklusion $i\colon (Z, z_0) \hookrightarrow (Y, y_0)$ gilt

$$F(i)(u) = z.$$

   Beweisskizze. Man konstruiert eine kompatible Folge $\big(((Y^{(n)}, y_0^{(n)}), u^{(n)})\big)_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$, wobei $((Y^{(n)}, y_0^{(n)}), u^{(n)})$ für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein n-universelles Paar mit den entsprechenden Eigenschaften ist.
   - Induktionsanfang: Sei

$$((Y^{(1)}, y_0^{(1)}), u^{(1)}) := (Z, z_0) \vee \bigvee_{F(S^1,1)} (S^1, 1).$$

     Mit dem (schwachen) Wedge-Axiom erhalten wir ein $u^{(1)} \in F(Y^{(1)}, y_0^{(1)})$ mit

$$F\big((Z, z_0) \hookrightarrow (Y^{(1)}, y_0^{(1)})\big)(u^{(1)}) = z$$

     und

$$\forall_{w \in F(S^1,1)} \quad F(\text{Inklusion des } w\text{-ten Summanden in das Wedge})(u^{(1)}) = w.$$

     Nach Konstruktion ist $((Y^{(1)}, y_0^{(1)}), u^{(1)})$ ein 1-universelles Paar.
   - Induktionsschritt: Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so konstruiert man ein $(n+1)$-universelles Paar $((Y^{(n+1)}, y_0^{(n+1)}), u^{(n+1)})$ aus $((Y^{(n)}, y_0^{(n)}), u^{(n)})$, durch
     - Ankleben geeigneter $(n+1)$-Zellen (wie im Induktionsanfang), um die Surjektivität im „Grad“ n zu erhalten, und durch
     - Ankleben geeigneter Abbildungskegel für Elemente des „Kerns“ im „Grad“ n, um die Injektivität im „Grad“ n zu erhalten.

     Nun schließt man die Konstruktion ab, indem man

$$(Y, y_0) := \operatorname*{colim}_{n \to \infty} ((Y^{(n)}, y_0^{(n)}), u^{(n)})$$

     definiert und aus den $(u^{(n)})_{n \in \mathbb{N}_{>0}}$ mithilfe des Mayer-Vietoris-Axioms eine entsprechende ∞-universelle Klasse in $F(Y, y_0)$ konstruiert.

1'. Aus dem ersten Schritt (angewendet auf den Einpunktraum) erhalten wir somit ein ∞-universelles Paar $((Y, y_0), u)$ für F.

2. Sei $(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CW}_{0*})$ und sei $A \subset X$ ein Unterkomplex mit $x_0 \in A$.
   Behauptung. Ist $x \in F(X, x_0)$ und $f\colon (A, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$, mit
   $$F(f)(u) = F\big((A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)\big)(x),$$
   so gibt es ein $g\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ mit
   $$g|_A = f \quad \text{und} \quad F(g)(u) = x.$$
   Beweisskizze. Mithilfe von Abbildungszylindern kann man sich auf den Fall beschränken, dass f die Inklusion eines Unterkomplexes ist. Wir betrachten dann den CW-Komplex
   $$(Z, z_0) := (X, x_0) \cup_{(A, x_0)} (Y, y_0).$$
   Aus dem Mayer-Vietoris-Axiom und der Voraussetzung erhalten wir eine Klasse $z \in F(Z, z_0)$, die sich zu x bzw. u einschränkt. Nun wenden wir den ersten Schritt auf diesen Komplex an und finden so ein ∞-universelles Paar $((Y', y_0'), u')$, das Z als Unterkomplex enthält und sich u' auf z einschränkt. Nach der Definition von ∞-universell und dem Satz von Whitehead (Satz II.4.66) ist dann die Inklusion $(Y, y_0) \hookrightarrow (Y', y_0')$ eine (punktierte) Homotopieäquivalenz; an dieser Stelle ist es essentiell, dass wir mit CW-Komplexen arbeiten. Aus einem Homotopieinversen kann man dann die gewünschte punktierte Abbildung $g\colon (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ konstruieren.
3. *Behauptung.* Ist $(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CW}_{0*})$, so ist
   $$\begin{aligned} \big[(X, x_0), (Y, y_0)\big]_* &\longrightarrow F(X, x_0) \\ [f]_* &\longmapsto F(f)(u) \end{aligned}$$
   bijektiv.
   Beweis. Die *Surjektivität* folgt aus dem zweiten Schritt (angewendet auf den Unterkomplex $\{x_0\}$ von X); die *Injektivität* folgt mit dem Standardtrick aus der Homotopietheorie, indem man nämlich den zweiten Schritt auf das CW-Paar $(X \times [0, 1], X \times \{0, 1\})$ mit Basispunkt $(x_0, 0)$ anwendet.

Damit ist der Brownsche Darstellungssatz gezeigt. □

Insbesondere können wir den Brownschen Darstellungssatz nach Proposition 1.32 auf additive Kohomologietheorien anwenden und erhalten so entsprechende darstellende Objekte.

Die Konstruktion im obigen Beweis des Brownschen Darstellungssatzes erinnert an die Konstruktion von Eilenberg-MacLane-Räumen; dies ist kein Zufall:

Beispiel 1.38 (komplexe topologische K-Theorie)**.** Auf der (Homotopie-)Kategorie der CW-punktierten endlichen CW-Komplexe gilt
$$\widetilde{K}^0_{\mathbb{C}} \cong [\,\cdot\,, BU]_*,$$
wobei $\widetilde{K}^0_{\mathbb{C}}$ komplexe topologische K-Theorie und $BU = \mathrm{colim}_{n \to \infty} BU(n)$ der klassifizierende Raum der komplexen/unitären Vektorbündel ist.

Beispiel 1.39 (singuläre Kohomologie, dargestellt auf CW-Komplexen)**.** Sei Z eine abelsche Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Nach Satz 1.33 und Proposition 1.32 gibt es einen wegzusammenhängenden CW-punktierten CW-Komplex (Y_n, y_n) und eine universelle Klasse $u \in H^n(Y_n, \{y_n\}; Z)$, durch die $H^n(\,\cdot\,; Z)$ auf CW_{0*} dargestellt wird. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \pi_k(Y_n, y_n) = \big[(S^k, e_1^{k+1}), (Y_n, y_n)\big]_* &\longrightarrow H^k(Y_n, \{y_n\}; Z) \\ [f]_* &\longmapsto H^n(f; Z)(u) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ bijektiv. Ist $k \in \mathbb{N}_{>0}$, so folgt analog zu Lemma II.2.21 aus der Definition der Gruppenstruktur auf π_k, dass diese Bijektion sogar ein Isomorphismus (abelscher) Gruppen ist. Also ist

$$\pi_k(Y_n, y_n) \cong H^k(Y_n, \{y_n\}; Z) \cong \begin{cases} Z & \text{falls } k = n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Da (Y_n, y_n) wegzusammenhängend ist, ist (Y_n, y_n) somit ein sogenannter *Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ* $K(Z, n)$. Konkrete Beispiele sind (s. Algebraische Topologie I):

S^1	ist vom Typ	$K(\mathbb{Z}, 1)$
$S^1 \times S^1$	ist vom Typ	$K(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, 1)$
$\mathbb{R}P^\infty$	ist vom Typ	$K(\mathbb{Z}/2, 1)$
$\mathbb{C}P^\infty$	ist vom Typ	$K(\mathbb{Z}, 2)$

Insbesondere erhalten wir den folgenden Zusammenhang zwischen den verschiedenen Beschreibungen von $H^1(X, \{x_0\}; Z)$: Es gibt ein für $(X, x_0) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CW}_{0*})$ ein natürliches, kommutatives Diagramm der Form:

$$\begin{array}{ccc} \big[(X, x_0), (S^1, 1)\big]_* & \longrightarrow & H^1(X, \{x_0\}; \mathbb{Z}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_1(\,\cdot\,)_{\mathrm{ab}}} & & \Big\uparrow \text{analog zu Beispiel 1.14} \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}, \pi_1(S^1, 1)_{\mathrm{ab}}\big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\pi_1(X, x_0)_{\mathrm{ab}}, \mathbb{Z}\big) \end{array}$$

Dabei ist der untere horizontale Homomorphismus durch Komposition mit dem Isomorphismus $\pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z}$ gegeben, der $[\mathrm{id}_{(S^1,1)}]_*$ mit 1 identifiziert. Der obere Homomorphismus ist durch Pullback der (universellen) Klasse $[S^1]^* \in H^1(S^1, \{1\}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ gegeben, die in Beispiel 1.14 konstruiert wurde.

Die Funktoren einer Kohomologietheorie in den einzelnen Graden hängen (z.B. über die Verbindungshomomorphismen) stark zusammen. Wie spiegelt sich dieser Zusammenhang auf den entsprechenden darstellenden Objekten wider?

Bemerkung 1.40 (Folgen von darstellenden Räumen zu additiven Kohomologietheorien)**.** Sei R ein Ring mit Eins und sei h eine additive Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Zu jedem $n \in \mathbb{Z}$ gibt es dann ein $(Y_n, y_n) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{CW}_{0*})$, das h^n auf CW_{0*} im Sinne des Brownschen Darstellungssatzes darstellt.

1. Ist (X, x_0) ein CW-punktierter (nicht notwendigerweise wegzusammenhängender) CW-Komplex, so erhalten wir eine natürliche Bijektion

$$\begin{aligned}\widetilde{h}^n(X) &= h^n(X, \{x_0\}) \\ &\cong h^{n+1}\big(\Sigma(X, x_0)\big) \\ &\cong \big[\Sigma(X, x_0), (Y_{n+1}, y_{n+1})\big]_* \\ &\cong \big[(X, x_0), \Omega(Y_{n+1}, y_{n+1})\big]_*.\end{aligned}$$

   Dabei haben wir folgendes verwendet:
   - Die zweite Bijektion ist der Einhängungsisomorphismus, wobei

$$\Sigma := \ \cdot \ \wedge (S^1, 1)$$

     die *reduzierte Einhängung* bezeichnet (Definition I.3.1).
   - Die letzte Bijektion erhält man aus dem Exponentialgesetz: In der Kategorie der sogenannten kompakt erzeugten punktierten topologischen Räume[5] ist

$$\begin{aligned}\big[\Sigma(X, x_0), (Y_{n+1}, y_{n+1})\big]_* &\longrightarrow \big[(X, x_0), \Omega(Y_{n+1}, y_{n+1})\big]_*. \\ [f]_* &\longmapsto \big[x \mapsto (t \mapsto f(x \wedge t))\big]_*\end{aligned}$$

     eine Bijektion; CW-Komplexe sind in diesem Sinne kompakt erzeugt und der *Schleifenraum*

$$\Omega(Y_{n+1}, y_{n+1}) := \mathrm{map}_*\big((S^1, 1), (Y_{n+1}, y_{n+1})\big)$$

     wird mit der zur kompakt-offenen Topologie assoziierten kompakt erzeugten Topologie versehen.

   Man kann zeigen, dass Schleifenräume von CW-Komplexen den Homotopietyp eines CW-Komplexes haben. Man definiert daher

$$(E_n, e_n) := \Omega(Y_{n+1}, y_{n+1})$$

   (bzw. als einen dazu homotopieäquivalenten CW-punktierten CW-Komplex).
2. Also erhalten wir auf der Kategorie der CW-punktierten CW-Komplexe einen natürlichen Isomorphismus

$$\begin{aligned}\big[\ \cdot\ , (E_n, e_n)\big]_* &\cong \widetilde{h}^n \\ &\cong \widetilde{h}^{n+1} \circ \Sigma \\ &\cong \big[\Sigma\ \cdot\ , (E_{n+1}, e_{n+1})\big]_* \\ &\cong \big[\ \cdot\ , \Omega(E_{n+1}, e_{n+1})\big]_*.\end{aligned}$$

   Da auch $\Omega(E_{n+1}, e_{n+1})$ den Homotopietyp eines CW-punktierten CW-Komplexes hat, folgt mit dem Yoneda-Lemma, dass

$$(E_n, e_n) \simeq_* \Omega(E_{n+1}, e_{n+1})$$

   gilt.

[5] N. Steenrod. A convenient category of topological spaces. *Michigan Math. J.*, 14(2), S. 133–152, 1967.

Man definiert daher:[6]

Definition 1.41 (Präspektrum, Ω-Präspektrum)**.**

- Ein *Präspektrum* ist ein Paar $\big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$, wobei $(E_n, e_n) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}_*)$ und
$$\varepsilon_n \in \mathrm{map}_*\big(\Sigma(E_n, e_n), (E_{n+1}, e_{n+1})\big)$$
für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.
- Ein *Ω-Präspektrum* ist ein Präspektrum $\big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist die zu $\varepsilon_n \colon \Sigma(E_n, e_n) \longrightarrow (E_{n+1}, e_{n+1})$ adjungierte Abbildung
$$\begin{aligned}(E_n, e_n) &\longrightarrow \Omega(E_{n+1}, e_{n+1})\\ x &\longmapsto \big(t \mapsto \varepsilon(x \wedge t)\big)\end{aligned}$$
eine punktierte Homotopieäquivalenz.
- Seien E und E' Präspektren. Ein *Morphismus* $f \colon E \longrightarrow E'$ *von Präspektren* ist eine Folge $(f_n \in \mathrm{map}_*((E_n, e_n), (E'_n, e'_n)))_{n\in\mathbb{Z}}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt
$$f_{n+1} \circ \varepsilon_n = \varepsilon'_n \circ \Sigma f_n.$$

$$\begin{array}{ccc}\Sigma(E_n, e_n) & \xrightarrow{\varepsilon_n} & (E_{n+1}, e_{n+1})\\ {\scriptstyle \Sigma f_n}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle f_{n+1}}\\ \Sigma(E'_n, e'_n) & \xrightarrow[\varepsilon'_n]{} & (E'_{n+1}, e'_{n+1})\end{array}$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Kategorie preSp der Präspektren.

Bemerkung 1.42 (additive Kohomologietheorien $\rightsquigarrow$ Ω-Präspektren)**.** Die Überlegungen in Bemerkung 1.40 zeigen also (durch Adjungieren der Abbildungen zwischen den darstellenden Räumen): Jede additive Kohomologietheorie liefert ein Ω-Präspektrum.

Es stellen sich nun die folgenden Fragen:

- Warum betrachtet man auch Präspektren und nicht nur Ω-Präspektren?
- Lässt sich dieser Prozess umkehren? Kann man also aus jedem Präspektrum eine Kohomologietheorie konstruieren?

Beispiel 1.43 (Eilenberg-MacLane-Spektren)**.** Ist Z eine abelsche Gruppe, so zeigt die Diskussion in Beispiel 1.39, dass es ein Ω-Präspektrum $HZ = \big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ gibt, so dass (E_n, e_n) für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ein Eilenberg-MacLane-Raum vom Typ $K(Z, n)$ ist, das sogenannte *Eilenberg-MacLane-Spektrum zu* Z. Diese Konstruktion erweitert sich zu einem Funktor
$$H \colon \mathsf{Ab} \longrightarrow \mathsf{preSp}\,.$$

[6] In der Literatur finden sich viele verschiedene Varianten dieses Begriffs; wir haben hier eine Variante gewählt, die sich leicht formulieren lässt. Für viele Zwecke ist diese Definition jedoch etwas zu naiv.

Beispiel 1.44 (Einhängungsspektren)**.** Sei (X, x_0) ein punktierter Raum. Dann gibt es ein Präspektrum $\Sigma^\infty(X, x_0) = \big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$, wobei wir

$$(E_n, e_n) := \begin{cases} \Sigma^n(X, x_0) & \text{falls } n \geq 0 \\ \bullet & \text{falls } n < 0 \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ definieren und

$$\varepsilon_n \colon \Sigma(E_n, e_n) = \Sigma\Sigma^n(X, x_0) \longrightarrow \Sigma^{n+1}(X, x_0) = (E_{n+1}, e_{n+1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ die Identität ist. Dies ist das *Einhängungsspektrum zu* (X, x_0). Man beachte, dass dieses Präspektrum im allgemeinen *kein* Ω-Präspektrum ist (da nicht jeder punktierte Raum ein sogenannter *unendlicher Schleifenraum* ist). Diese Konstruktion erweitert sich zu einem Funktor

$$\Sigma^\infty \colon \mathsf{Top}_* \longrightarrow \mathsf{preSp}\,.$$

Satz 1.45 (Präspektren $\rightsquigarrow$ additive Kohomologietheorien)**.**

1. *Sei* $\big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ *ein* Ω*-Präspektrum (bestehend aus CW-Komplexen). Dann gibt es eine additive Kohomologietheorie* h *auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ *mit folgender Eigenschaft: Für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *sind*

$$\mathsf{CW}_{0*} \longrightarrow \mathsf{Top}_* \xrightarrow{\widetilde{h}^n} \mathsf{Set}_*$$

und

$$\mathsf{CW}_{0*} \longrightarrow \mathsf{CW}_{0*\mathsf{h}} \xrightarrow{[\,\cdot\,,(E_n,e_n)]_*} \mathsf{Set}_*$$

natürlich isomorph.

2. *Sei* $\big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ *ein Präspektrum (aus CW-Komplexen). Dann gibt es eine additive Kohomologietheorie* h *auf* Top^2 *mit Werten in* ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ *mit folgender Eigenschaft: Für alle* $n \in \mathbb{Z}$ *sind*

$$\mathsf{CW}_{0*} \longrightarrow \mathsf{Top}_* \xrightarrow{\widetilde{h}^n} \mathsf{Set}_*$$

und

$$\mathsf{CW}_{0*} \xrightarrow{[\,\cdot\,,\operatorname{colim}_{k\to\infty}\Omega^k(E_{n+k},e_{n+k})]_*} \mathsf{CW}_{0*\mathsf{h}} \longrightarrow \mathsf{Set}_*$$

natürlich isomorph. Für Ω*-Präspektren stimmt diese Konstruktion mit der obigen Konstruktion überein.*

3. *Morphismen zwischen* (Ω)*-Präspektren liefern natürliche Transformationen zwischen den zugehörigen Kohomologietheorien.*

Beweisskizzenskizze. Auf wegzusammenhängenden CW-punktierten CW-Komplexen definiert man die gesuchten Kohomologietheorien durch die angegebenen dargestellten kontravarianten Funktoren. Auf diesen Mengen von Homotopieklassen erhält man

durch Aneinanderhängen von Schleifen auf zweifachen Schleifenräumen $\Omega^2 \dots$ die Struktur abelscher Gruppen. Methoden aus der elementaren Homotopietheorie (insbesondere die lange exakte Kofasersequenz von Barratt und Puppe (Satz I.3.57)) zeigen dann, dass dies eine reduzierte Kohomologietheorie auf CW_{0*} definiert. Durch Kegelkonstruktionen und geeignete CW-Approximationen lassen sich die Theorien dann auf ganz Top^2 fortsetzen. □

Bemerkung 1.46 (Homologietheorien und Präspektren)**.** Es gibt auch eine analoge Beziehung zwischen Homologietheorien und Präspektren: Ist $\big((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}\big)$ ein Präspektrum, so erweitert sich

$$\big(\operatorname*{colim}_{k\to\infty} \pi_{n+k}(\,\cdot\, \wedge (E_k, e_k))\big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

von CW_{0*} zu einer additiven Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$.

Umgekehrt lässt sich jede additive Homologietheorie auf CW_{0*} durch Präspektren beschreiben.

Bemerkung 1.42, Beispiel 1.44 und Satz 1.45 liefern also, dass die Kategorie preSp es ermöglicht, topologische Räume und Kohomologietheorien (bzw. Homologietheorien, s. Bemerkung 1.46) im selben Rahmen und mit denselben Hilfsmitteln zu studieren.

Man ist daher daran interessiert, die Kategorie preSp genauer zu verstehen. Ein erster Schritt ist es, geeignete Invarianten von Präspektren zu studieren, z.B. Homotopiegruppen:

Definition 1.47 (Homotopiegruppen von Präspektren)**.** Sei $E = ((E_n, e_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (\varepsilon_n)_{n\in\,})$ ein Präspektrum und sei $n \in \mathbb{Z}$. Die *n-te Homotopiegruppe von E* ist definiert als

$$\pi_n(E) := \operatorname*{colim}_{\mathbb{Z}_{\geq -n} \ni k\to\infty} \pi_{n+k}(E_k, e_k),$$

wobei der Kolimes über die von den Strukturabbildungen $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ induzierten Homomorphismen gebildet wird. Diese Konstruktion erweitert sich zu einem Funktor

$$\pi_n \colon \mathsf{preSp} \longrightarrow \mathsf{Ab}\,.$$

Als nächsten Schritt führt man eine geeignete Homotopietheorie von Präspektren und die zugehörige Homotopiekategorie Sp_h ein; das Studium der Kategorie Sp_h bezeichnet man auch als *stabile Homotopietheorie*. Es gibt verschiedene Zugänge bzw. Modelle, die es erlauben, die Kategorie Sp_h zu konstruieren – sie sind jedoch alle im Detail technisch relativ aufwendig. Wir werden daher nicht auf diese Konstruktionen eingehen, sondern nur ein paar wesentliche Eigenschaften aufzählen: [7]

- Homotopiegruppen von Präspektren induzieren einen Begriff von Homotopiegruppen auf Sp_h.
- Es gibt zueinander adjungierte Funktoren

$$\Sigma^\infty \colon \mathsf{Top}_{*\mathsf{h}} \longrightarrow \mathsf{Sp}_\mathsf{h}$$
$$\Omega^\infty \colon \mathsf{Sp}_\mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{Top}_{*\mathsf{h}}\,.$$

[7] Cary Malkiewich. *The stable homotopy category*, http://math.stanford.edu/ carym/stable.pdf

– Es gibt zueinander inverse Äquivalenzen von Kategorien

$$\Sigma\colon \mathsf{Sp}_\mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{Sp}_\mathsf{h}$$
$$\Omega\colon \mathsf{Sp}_\mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{Sp}_\mathsf{h},$$

die mit den entsprechenden Funktoren auf Top_* kompatibel sind.
– Die Kategorie Sp_h ist (im Gegensatz zu $\mathsf{Top}_{*\mathsf{h}}$) additiv (aber nicht abelsch).

Grob gesprochen kann man sich also die Kategorie Sp_h so vorstellen, dass man sie aus $\mathsf{Top}_{*\mathsf{h}}$ erhält, indem man den Einhängungsfunktor invertierbar macht. Außerdem gibt es die folgenden Parallelen zur homologischen Algebra: Analog zur homologischen Algebra, in der gewisse Phänomene für Moduln erst verständlich werden, wenn man zur Kategorie der Kettenkomplexe übergeht (Kapitel 3), hilft auch der Übergang von Top_* zu preSp topologische Räume besser zu verstehen. „Invertieren“ von Homologieisomorphismen führt von ${}_R\mathsf{Ch}$ zur sogenannten derivierten Kategorie $\mathsf{D}(R)$. Analog kann man auch Sp_h erhalten, indem man schwache Äquivalenzen in preSp invertiert:

homologische Algebra	*Topologie*
${}_R\mathsf{Mod}$	Top_*
$\wr$	$\wr$
${}_R\mathsf{Ch}$	preSp
$\wr$	$\wr$
$\mathsf{D}(R)$	Sp_h

Eine präzise Darstellung dieses Zugangs zur stabilen Homotopietheorie findet sich zum Beispiel im Buch von Weibel [11, Kapitel 10].

2. Produkte auf (Ko)Homologie

Bisher haben wir nur additive Struktur auf Kohomologietheorien untersucht. Wir wollen diese Invarianten nun im folgenden durch Hinzufügen multiplikativer Strukturen auf Kohomologie bzw. Homologie und durch Paarungen gewisser Kohomologie- und Homologietheorien verfeinern.

Dies wird uns helfen, topologische Räume bzw. die Homotopiekategorie $\mathsf{Top}^2_{\mathsf{h}}$ besser zu verstehen und interessante Anwendungen zu behandeln.

Wir beginnen mit einem axiomatischen Zugang und werden später eine explizite Konstruktion für Produkte in singulärer (Ko)Homologie angeben.

2.1. Multiplikative Strukturen auf Kohomologie

Wir geben nun Axiome für multiplikative Strukturen auf Kohomologie. Die Grundidee ist es, Kohomologietheorien zu Funktoren in die Kategorie der graduierten Algebren statt der graduierten Moduln zu verfeinern. Da es jedoch in vielen Fällen möglich ist, noch mehr als das zu erreichen, werden die Axiome etwas aufwendiger und zunächst umständlich erscheinend formuliert.

Setup 2.1. Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit Eins[8] und es sei $h = \big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Koeffizienten

$$h^0(\bullet) \cong_R R;$$

ein solcher Isomorphismus sei im folgenden gewählt. Wir schreiben $1 \in h^0(\bullet)$ für das Element, das unter diesem Isomorphismus $1 \in R$ entspricht.

Außerdem ist es für die Formulierung der Axiome bequem, die folgende Notation einzuführen:

Definition 2.2 (Kategorie schnittiger Tripel)**.** Die Kategorie Top^3 besteht aus:

- Objekte sind Tripel (X, A, B), wobei X ein topologischer Raum und $A, B \subset X$ Teilmengen mit $A^{\circ \text{ in } A\cup B} \cup B^{\circ \text{ in } A\cup B} = A \cup B$ ist.
- Morphismen: Zu solchen Tripeln (X, A, B) und (X', A', B') sei

$$\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^3}\big((X, A, B), (X', A', B')\big) := \big\{f \in \mathrm{map}(X, X') \;\big|\; f(A) \subset A',\ f(B) \subset B'\big\}.$$

- Die Verknüpfungen sind durch gewöhnliche Abbildungskomposition gegeben.

Ist (X, A) ein Raumpaar, so sind $(X, A, \emptyset)$, $(X, \emptyset, A)$ und (X, A, A) Objekte in Top^3. Wir führen nun multiplikative Strukturen ein:

[8] Statt „kommutativ“ genügt es auch, zu verlangen, dass der Ring eine Involution besitzt; eine solche Involution erlaubt nämlich auch eine Übersetzung zwischen Links- und Rechtsmoduln. Z.B. sind Gruppenringe im allgemeinen nicht kommutativ, besitzen aber eine Involution – nämlich durch das Invertieren in der Gruppe.

Definition 2.3 (multiplikative Struktur auf einer Kohomologietheorie)**.** Eine *multiplikative Struktur auf der Kohomologietheorie* h ist eine Familie

$$\big(\,\cdot\,\cup\,\cdot : h^p(X,A)\otimes_R h^q(X,B)\longrightarrow h^{p+q}(X,A\cup B)\big)_{p,q\in\mathbb{Z},(X,A,B)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)}$$

von R-linearen Abbildungen (sogenannter *Cup-Produkte*) mit folgenden Eigenschaften:

- *Assoziativität.* Sei X ein topologischer Raum und seien $A, B, C \subset X$ mit (X,A,B), (X,B,C), $(X,A,B\cup C)$, $(X,A\cup B,C) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$. Dann gilt für alle $p,q,r\in\mathbb{Z}$ und alle $x\in h^p(X,A)$, $y\in h^q(X,B)$, $z\in h^r(X,C)$:

$$x\cup(y\cup z) = (x\cup y)\cup z.$$

- *(graduierte) Kommutativität.* Für alle $(X,A,B)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, alle $p,q\in\mathbb{Z}$ und alle $x\in h^p(X,A)$, $y\in h^q(X,B)$ gilt:

$$x\cup y = (-1)^{p\cdot q}\cdot y\cup x.$$

- *Einselement.* Sei (X,A) ein Raumpaar und sei $1_X := h^0(X\to\bullet)(1)\in h^0(X)$. Dann gilt für alle $p\in\mathbb{Z}$ und alle $x\in h^p(X,A)$, dass

$$1_X\cup x = x = x\cup 1_X.$$

- *Natürlichkeit.* Für alle $(X,A,B),(X',A',B')\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, alle stetigen Abbildungen $f\in\mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^3}((X,A,B),(X',A',B'))$, alle $p,q\in\mathbb{Z}$ und alle $x\in h^p(X,A)$, $y\in h^q(X,B)$ gilt

$$h^{p+q}(f)(x\cup y) = \big(h^p(f)(x)\big)\cup\big(h^q(f)(y)\big).$$

- *Verträglichkeit mit Verbindungshomomorphismen.* Sei $(X,A,B)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und seien $p,q\in\mathbb{Z}$.
  1. Ist $x\in h^p(A)$ und $y\in h^q(X,B)$, so gilt

$$(\delta x)\cup y = \delta_{①}\big(x\cup h^q(i)(y)\big),$$

     wobei $\delta\colon h^p(A)\longrightarrow h^{p+1}(X,A)$ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X,A) ist, $i\colon (A,A\cap B)\longrightarrow(X,B)$ die Inklusion ist und $\delta_{①}$ die Komposition

$$h^{p+q}(A,A\cap B)\longleftarrow h^{p+q}(A\cup B,B)\longrightarrow h^{p+q+1}(X,A\cup B)$$

     aus dem Ausschneidungsisomorphismus und dem Verbindungsisomorphismus der Tripelsequenz von $(X,A\cup B,B)$ ist.[9]
  2. Ist $x\in h^p(X,A)$ und $y\in h^q(B)$, so gilt

$$x\cup(\delta y) = (-1)^p\cdot\delta_{②}\big(h^p(j)(x)\cup y\big),$$

[9] In anderen Worten: „ $\cdot\cup y$“ liefert einen Morhpismus zwischen der Paarsequenz von (X,A) und der Tripelsequenz von $(X,A\cup B,B)$.

wobei $\delta\colon h^q(B) \longrightarrow h^{q+1}(X,B)$ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X,B) ist, $j\colon (B, A\cap B) \longrightarrow (X,A)$ die Inklusion ist und $\delta_{②}$ die Komposition

$$h^{p+q}(B, A\cap B) \longleftarrow h^{p+q}(A\cup B, A) \longrightarrow h^{p+q+1}(X, A\cup B)$$

aus dem Ausschneidungsisomorphismus und dem Verbindungsisomorphismus des Tripels $(X, A\cup B, A)$ ist.

Insbesondere erhalten wir aus multiplikativen Strukturen graduierte Algebren:

Definition 2.4 (graduierte Algebra)**.**

- Eine *graduierte R-Algebra* ist eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ in $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ zusammen mit einer Folge
$$(\,\cdot : A_p \otimes_R A_q \longrightarrow A_{p+q})_{p,q\in\mathbb{Z}}$$
von R-linearen Homomorphismen mit folgender Eigenschaft: Die direkte Summe $\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} A_n$ ist zusammen mit der eindeutigen R-linearen Fortsetzung von „$\cdot$“ auf die direkte Summe eine R-Algebra.
- Graduierte $\mathbb{Z}$-Algebren heißen auch *graduierte Ringe*.
- Sind $A = ((A_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \cdot)$ und $B = ((B_n)_{n\in\mathbb{Z}}, \cdot)$ graduierte R-Algebren so ist ein *Morphismus $A \longrightarrow B$ von R-Algebren* eine Folge $(f_n \in \mathrm{Hom}_R(A_n, B_n))_{n\in\mathbb{Z}}$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in A_p$, $y \in A_q$ gilt
$$f_{p+q}(x\cdot y) = f_p(x)\cdot f_q(y).$$
- Zusammen mit gradweiser Verknüpfung von Morphismen von graduierten R-Algebren erhalten wir so die Kategorie ${}_R\mathsf{GradAlg}$ der graduierten R-Algebren.

Als nächsten Schritte kann man analog auch graduierte Algebren über graduierten Ringen definieren.

Bemerkung 2.5 (multiplikative Strukturen liefern graduierte Algebren)**.** Sei $\cdot\cup\cdot$ eine multiplikative Struktur auf der Kohomologietheorie h und sei $(X,A) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$.

- Dann ist $h^*(X) = (h^n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$ bezüglich $\cdot\cup\cdot$ ein graduierter Ring mit Eins $1_X \in h^0(X)$.
- Und $h^*(X,A) = (h^n(X,A))_{n\in\mathbb{Z}}$ ist bezüglich $\cdot\cup\cdot$ eine graduierte R-Algebra (bzw. eine graduierte Algebra über $h^*(X)$).

Auf diese Weise erhält man aus h und $\cdot\cup\cdot$ einen Funktor $\mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_R\mathsf{GradAlg}$ und dieser faktorisiert über $\mathsf{Top}^2_{\mathsf{h}}$. Homotopieäquivalente Raumpaare liefern also isomorphe graduierte Algebren.

Bevor wir zu den ersten Berechnungen von Kohomologieringen kommen, geben wir eine Anwendung von multiplikativen Strukturen auf Kohomologie:

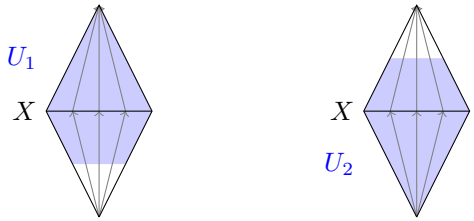


Abbildung (2.8): Überdeckung von Einhängungen durch zwei offene Mengen, die in der Einhängung kontraktibel sind

Definition 2.6 (Lusternik-Schnirelmann-Kategorie)**.** Sei X ein topologischer Raum. Die *Lusternik-Schnirelmann-Kategorie von X* ist definiert als

$$\begin{aligned}\operatorname{cat}(X) := \min\Big\{ n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \exists_{U_1,\dots,U_n \subset X} \quad X = \bigcup_{k=1}^{n} U_k \text{ und} \\ U_1,\dots,U_n \text{ offen und } U_1 \hookrightarrow X, \dots, U_n \hookrightarrow X \text{ nullhomotop} \Big\} \\ - 1 \\ \in \mathbb{N} \cup \{-1\} \cup \{\infty\}.\end{aligned}$$

Beispiel 2.7. Sei X ein topologischer Raum.

- Es gilt genau dann $\operatorname{cat} X = -1$, wenn $X = \emptyset$ ist.
- Es gilt genau dann $\operatorname{cat} X = 0$, wenn X kontraktibel ist.
- Es ist $\operatorname{cat} \mathbb{N} = \infty$, wobei $\mathbb{N}$ die diskrete Topologie trägt.
- Es gilt $\operatorname{cat} S^1 = 1$.
- Ist X ein topologischer Raum, so ist $\operatorname{cat} \Sigma X \leq 1$ (Abbildung (2.8)).

Im allgemeinen ist es jedoch sehr schwer, die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie topologischer Räume exakt zu berechnen. Andererseits spielt die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie in vielen Anwendungen eine wichtige Rolle, z.B. in der topologischen Robotik.

Cup-Produkte liefern eine untere Abschätzung für die Lusternik-Schnirelmann-Kategorie:

Proposition 2.9 (Lusternik-Schnirelmann-Kategorie und Cup-Produkte)**.** *Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf h und sei X ein nicht-leerer topologischer Raum.*

1. *Sei $n \in \mathbb{N}$, seien $U_1, \dots, U_n \subset X$ offen mit $X = \bigcup_{k=1}^{n} U_k$ und der Eigenschaft, dass die Inklusionen $i_1 \colon U_1 \hookrightarrow X, \dots, i_n \colon U_n \hookrightarrow X$ nullhomotop sind. Dann gilt für alle $x_1, \dots, x_n \in \widetilde{h}^*(X)$, dass*

$$x_1 \cup \dots \cup x_n = 0 \in \widetilde{h}^*(X).$$

2. *Insbesondere ist*

$$\operatorname{cat} X \geq \max\Big\{ n \in \mathbb{N} \;\Big|\; \exists_{x_1,\dots,x_n \in \widetilde{h}^*(X)} \quad x_1 \cup \dots x_n \neq 0 \in \widetilde{h}^*(X) \Big\}.$$

Ist X ein nicht-leerer topologischer Raum, ist $x_0 \in X$ und sind $p, q \in \mathbb{Z}$, so erhalten wir aus einer multiplikativen Struktur $\cdot \cup \cdot$ auf h ein Cup-Produkt

$$\cdot \cup \cdot \, h^p\big(X, \{x_0\}\big) \otimes_R h^q\big(X, \{x_0\}\big) \longrightarrow h^{p+q}\big(X, \{x_0\}\big).$$

Mit dem kanonischen Isomorphismus $\widetilde{h}^*(X) \cong h^*(X, \{x_0\})$ erhalten wir so ein wohldefiniertes Cup-Produkt auf reduzierter Kohomologie $\widetilde{h}$.

Beweisskizze. Es genügt, den ersten Teil zu zeigen. Seien $x_1 \in \widetilde{h}^{p_1}(X), \dots, x_n \in \widetilde{h}^{p_n}(X)$. Für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt: Da die Inklusion $i_k \colon U_k \hookrightarrow X$ nullhomotop ist, folgt $\widetilde{h}^{p_k}(i_k) = 0$. Die lange exakte Paarsequenz von (X, U_k) für reduzierte Kohomologie zeigt, dass es ein $y_k \in h^{p_k}(X, U_k)$ mit

$$\widetilde{h}^{p_k}(j_k)(y_k) = x_k$$

gibt, wobei $j_k \colon (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, U_k)$ die Inklusion ist. Dabei gilt

$$y_1 \cup \dots \cup y_n \in h\Big(X, \bigcup_{k=1}^{n} U_k\Big) = h(X, X) \cong 0.$$

Mit der Natürlichkeit des Cup-Produkts folgt daher

$$x_1 \cup \dots \cup x_n = 0. \qquad \square$$

Insbesondere liefert dies ein notwendiges Kriterium dafür, dass ein Raum Einhängung eines anderen Raumes sein kann.

2.2. Externe Produkte auf Kohomologie

Wir führen nun externe Produkte auf Kohomologietheorien ein und untersuchen den Zusammenhang mit multiplikativen Strukturen. Externe Produkte sind aus mehreren Gründen interessant: Sie sind für induktive Berechnungen besser geeignet als Cup-Produkte, besitzen eine naheliegendere geometrische Interpretation und lassen – im Gegensatz zu multiplikativen Strukturen – auch homologische Versionen zu (Kapitel 2.6).

Setup 2.10. Im folgenden sei R ein kommutativer Ring mit Eins[10] und es sei $h = \big((h^k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\delta^k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$ eine Kohomologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Koeffizienten

$$h^0(\bullet) \cong_R R;$$

ein solcher Isomorphismus sei im folgenden gewählt. Wir schreiben $1 \in h^0(\bullet)$ für das Element, das unter diesem Isomorphismus $1 \in R$ entspricht.

[10] Statt „kommutativ“ genügt es auch, zu verlangen, dass der Ring eine Involution besitzt; eine solche Involution erlaubt nämlich auch eine Übersetzung zwischen Links- und Rechtsmoduln. Z.B. sind Gruppenringe im allgemeinen nicht kommutativ, besitzen aber eine Involution – nämlich durch das Invertieren in der Gruppe.

Sind (X, A) und (Y, B) Raumpaare, so schreiben wir

$$(X, A) \times (Y, B) := (X \times Y, A \times Y \cup X \times B).$$

Zum Beispiel ist $([0,1], \partial[0,1]) \times ([0,1], \partial[0,1]) = \big([0,1]^2, \partial([0,1]^2)\big)$.

Definition 2.11 (externes Produkt auf einer Kohomologietheorie)**.** Ein *externes Produkt auf der Kohomologietheorie* h ist eine Familie

$$\big(\cdot \times \cdot : h^p(X, A) \otimes_R h^q(Y, B) \longrightarrow h^{p+q}\big((X, A) \times (Y, B)\big)\big)_{\substack{p,q \in \mathbb{Z},\, (X,A),(Y,B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2) \\ \text{mit } (X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)}}$$

von R-linearen Abbildungen (sogenannter *Kreuz-Produkte*) mit folgenden Eigenschaften:

- *Natürlichkeit.* Für alle $(X, A), (Y, B), (X', A'), (Y', B') \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B), (X' \times Y', A' \times Y', X' \times B') \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^2}((X, A), (X', A'))$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^2}((Y, B), (Y', B'))$, alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h^p(X', A')$, $y \in h^q(Y', B')$ gilt
$$h^{p+q}(f \times g)(x \times y) = h^p(f)(x) \times h^q(g)(y).$$
- *Assoziativität.* Für alle Kohomologieklassen x, y, z, für die die entsprechenden Kreuz-Produkte definiert sind, gilt
$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$
- *(graduierte) Kommutativität.* Für alle $(X, A), (Y, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B)$, alle $p, q \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h^p(X, A)$, $y \in h^q(Y, B)$ gilt
$$h^{p+q}(\tau_{X,Y})(y \times x) = (-1)^{p \cdot q} \cdot x \times y,$$
wobei
$$\begin{aligned} \tau_{X,Y} \colon X \times Y &\longrightarrow Y \times X \\ (x, y) &\longmapsto (y, x). \end{aligned}$$
- *Einselement.* Für alle Raumpaare (X, A), alle $p \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h^p(X, A)$ gilt
$$1 \times x = x = x \times 1.$$
In den Gleichheiten gehen die kanonischen Homöomorphismen $\bullet \times (X, A) \cong (X, A) \cong (X, A) \times \bullet$ ein.
- *Verträglichkeit mit Verbindungshomomorphismen.* Seien $(X, A), (Y, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und seien $p, q \in \mathbb{Z}$.
  1. Ist $x \in h^p(A)$ und $y \in h^q(X, B)$, so gilt
  $$(\delta x) \times y = \delta_{①}(x \times y),$$
  wobei $\delta \colon h^p(A) \longrightarrow h^{p+1}(X, A)$ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X, A) ist und $\delta_{①}$ die Komposition
  $$h^{p+q}(A \times Y, A \times B) \longleftarrow h^{p+q}(A \times Y \cup X \times B, X \times B) \longrightarrow h^{p+q+1}((X, A) \times (Y, B))$$
  aus dem Ausschneidungsisomorphismus und dem Verbindungsisomorphismus der entsprechenden Tripelsequenz ist.

2. Ist $x \in h^p(X, A)$ und $y \in h^q(B)$, so gilt

$$x \times (\delta y) = (-1)^p \cdot \delta_{②}\big(x \times y\big),$$

wobei $\delta\colon h^q(B) \longrightarrow h^{q+1}(X, B)$ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X, B) ist und $\delta_{②}$ die Komposition

$$h^{p+q}(X\times B, A\times B) \longleftarrow h^{p+q}(A\times Y \cup X\times B, A\times Y) \longrightarrow h^{p+q+1}((X, A)\times(Y, B))$$

aus dem Ausschneidungsisomorphismus und dem Verbindungsisomorphismus des entsprechenden Tripels ist.

Multiplikative Strukturen liefern externe Produkte (und auch die Umkehrung gilt, bis auf Schnittigkeitsvoraussetzungen):

Proposition 2.12 ($\times$ für $\cup$)**.** *Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf h. Das zu $\cdot \cup \cdot$ assoziierte Kreuz-Produkt $\cdot \times \cdot$ ist wie folgt definiert: Sind $(X, A), (Y, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und sind $p, q \in \mathbb{Z}$, so ist*

$$\begin{aligned}\cdot \times \cdot : h^p(X, A) \otimes_R h^q(Y, B) &\longrightarrow h^{p+q}\big((X, A) \times (Y, B)\big)\\ x \otimes y &\longmapsto h^p(p_X)(x) \cup h^q(p_Y)(y),\end{aligned}$$

wobei $p_X\colon (X \times Y, A \times Y) \longrightarrow (X, A)$ und $p_Y\colon (X \times Y, X \times B) \longrightarrow (Y, B)$ die Projektionen sind.

1. *Dann ist $\cdot \times \cdot$ ein externes Produkt auf h.*
2. *Ist $(X, A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ mit $(X \times X, A \times X, X \times B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und sind $p, q \in \mathbb{Z}$ und $x \in h^p(X, A), y \in h^q(X, B)$, so gilt*

$$x \cup y = h^{p+q}(\Delta_{X,A,B})(x \times y),$$

wobei $\Delta_{X,A,B}\colon (X, A \cup B) \longrightarrow (X \times X, A \times X \cup X \times B)$ die Diagonalabbildung ist.

Beweisskizze. Dies folgt durch Nachrechnen der Axiome. □

Wir geben nun eine alternative Beschreibung des Einhängungsisomorphismus (Abbildung (2.13)), wobei wir $I := [0, 1]$ abkürzen:

Proposition 2.14 (Einhängung via Kreuz-Produkt)**.** *Sei $\cdot \times \cdot$ ein externes Produkt auf h und sei e als Bild von $1 \in h^0(\bullet)$ das Bild unter der Komposition*

$$h^0(\bullet) \longleftarrow h^0(\partial I, \{0\}) \longrightarrow h^1(I, \partial I),$$

wobei die linke Abbildung der Ausschneidungsisomorphismus und die rechte Abbildung der Verbindungshomomorphismus des Tripels $(I, \partial I, \{0\})$ ist (dieser ist ein Isomorphismus).

Ist X ein topologischer Raum und $p \in \mathbb{Z}$, so ist

$$e \times \cdot : h^p(X) \longrightarrow h^{p+1}(I \times X, \partial I \times X)$$

ein Isomorphismus.

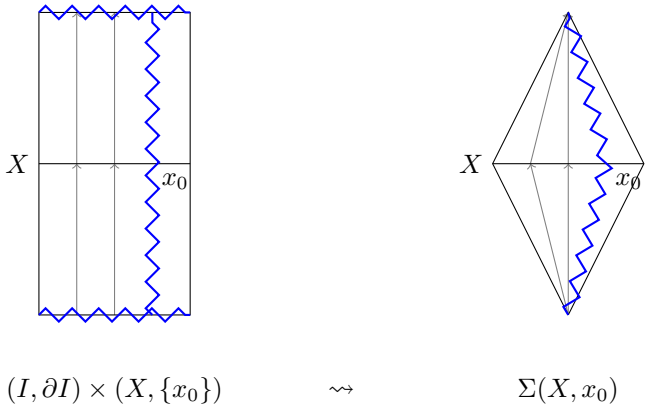


Abbildung (2.13): Relatives Produkt vs. (reduzierte) Einhängung

Beweisskizze. Mithilfe der Natürlichkeit des Kreuz-Produkts, der Verträglichkeit des Kreuz-Produkts mit Verbindungshomomorphismen und den langen exakten Tripelsequenzen von $(I, \partial I, 0)$ bzw. $(I \times X, \partial I \times X, 0 \times X)$ erhält man ein kommutatives Diagramm der Form

$$\begin{array}{ccc}
h^0(\bullet) \otimes_R h^p(X) & \xrightarrow{\cdot \times \cdot} & h^p(X) \\
\uparrow & & \uparrow \\
h^0(\partial I, 0) \otimes_R h^p(X) & \xrightarrow{\cdot \times \cdot} & h^{p+1}(\partial I \times X, 0 \times X) \\
\downarrow{\scriptstyle \delta} & & \downarrow{\scriptstyle \delta} \\
h^1(I, \partial I) \otimes_R h^p(X) & \xrightarrow[\cdot \times \cdot]{} & h^{p+1}(I \times X, \partial I \times X)
\end{array}$$

Dabei wird in der linken Komponente der linken Seite nach Definition $1 \in h^0(\bullet)$ auf $e \in h^1(I, \partial I)$ abgebildet. Die vertikalen Homomorphismen sind Isomorphismen (dies folgt aus Ausschneidung bzw. der langen exakten Tripelsequenz) und der obere horizontale Homomorphismus ist nach den Axiomen eines externen Produkts ein Isomorphismus. Also ist auch der untere horizontale Homomorphismus ein Isomorphismus. Da e nach Konstruktion ein Erzeuger von $h^1(I, \partial I) \cong_R R$ ist, folgt somit die Behauptung. □

Im relativen Fall gehen wir (um bessere Schnittigkeitseigenschaften zu haben) vom Einheitsintervall $([0, 1], \{0, 1\})$ zu $(\mathbb{R}, \mathbb{R} \setminus \{0\})$ über. Wir führen dazu die folgende Notation ein (insbesondere ist ∂J nicht im eigentlichen Sinne der Rand von J):

Definition 2.15 (aufgedicktes Einheitsintervall)**.** Sei

$$J := \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \partial J := \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

und sei $e(1) \in h^1(J, \partial J)$ das Urbild von $e \in h^1(I, \partial I)$ unter dem von der Inklusion $I \cong I - 1/2 \hookrightarrow J$ induzierten Isomorphismus

$$h^1(J, \partial J) \cong h^1(I, \partial I).$$

Dann erhalten wir:

Korollar 2.16 (relativer Einhängungsisomorphismus via Kreuz-Produkt)**.** *Sei* $\cdot \times \cdot$ *ein externes Produkt auf der Kohomologietheorie* h*, sei* (X, A) *ein Raumpaar mit* $(J \times X, \partial J \times X, J \times A) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ *und sei* $p \in \mathbb{Z}$*. Dann ist*

$$e(1) \times \cdot : h^p(X, A) \longrightarrow h^{p+1}\big((J, \partial J) \times (X, A)\big)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$*.*

Beweisskizze. Dies folgt mit der langen exakten Paarsequenz von (X, A), der langen exakten Tripelsequenz von $(J \times X, \partial J \times X \cup J \times A, \partial J \times X)$, der Natürlichkeit von $\cdot \times \cdot$, der Verträglichkeit von $\cdot \times \cdot$ und dem Fünfer-Lemma B.6 aus Proposition 2.14. □

Induktiv erhalten wir daraus das folgende Analogon zum äußeren Produkt aus der linearen Algebra und Orientierungen von Vektorräumen; diese Analogie werden wir im Kontext von Mannigfaltigkeiten und deRham-Kohomologie nochmal genauer betrachten.

Korollar 2.17 (kohomologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei* $\cdot \times \cdot$ *ein externes Produkt auf der Kohomologietheorie* h *und sei* $n \in \mathbb{N}_{>0}$*. Dann heißt das* n*-fache Kreuz-Produkt*

$$e(n) := e(1) \times \cdots \times e(1) \in h^n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)$$

kohomologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$ bezüglich h und $\cdot \times \cdot$.

1. *Dann ist* $e(n)$ *ein Erzeuger von* $h^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong_R R$*.*
2. *Sind* $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$ *mit* $p + q = n$*, so ist*

$$\cdot \times \cdot : h^p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus 0) \otimes_R h^q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q \setminus 0) \longrightarrow h^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ *mit*

$$e(p) \times e(q) = e(n).$$

Beweisskizze. Dies folgt induktiv aus Korollar 2.16. □

Korollar 2.18 (kohomologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$ via Cup-Produkt)**.** *Sei* $\cdot \cup \cdot$ *eine multiplikative Struktur auf der Kohomologietheorie* h *und seien* $p, q, n \in \mathbb{N}_{>0}$ *mit* $p + q = n$*. Dann ist*

$$\cdot \cup \cdot : h^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0 \times \mathbb{R}^q) \otimes_R h^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^p \times 0) \longrightarrow h^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$*.*

Beweisskizze. Sei $\cdot \times \cdot$ das zu $\cdot \cup \cdot$ assoziierte Kreuz-Produkt. Wir wenden nun Korollar 2.17 an und übersetzen $\cdot \times \cdot$ mithilfe von Proposition 2.12 in $\cdot \cup \cdot$. □

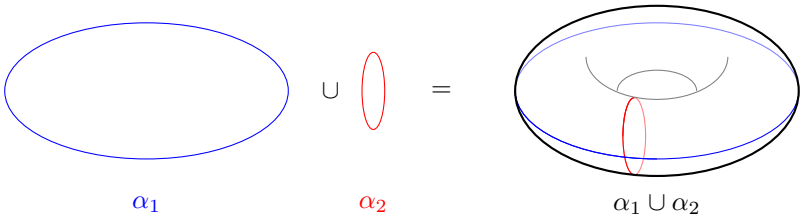


Abbildung (2.19): Kohomologiering des zweidimensionalen Torus, schematisch

2.3. Beispiele für Kohomologieringe

Wir zeigen nun wie man mit den Beobachtungen über das Kreuz-Produkt aus dem vorigen Abschnitt wichtige Beispiele von Kohomologieringen in singulärer Kohomologie berechnen kann.

Proposition 2.20 (Kohomologieringe von Tori)**.** *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf $H^*(\cdot\,; R)$. Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $T^n := (S^1)^{\times n}$ der n-dimensionale Torus.*

1. *Sei $\alpha \in H^1(S^1; R) \cong_R R$ ein Erzeuger; zu $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $p_j \colon T^n \longrightarrow S^1$ die Projektion auf den j-ten Faktor und*

$$\alpha_j := H^1(p_j; R)(\alpha) \in H^1(T^n; R).$$

   Dann gilt: Ist $k \in \{0, \dots, n\}$, so ist $H^k(T^n; R)$ ein freier R-Modul mit Basis

$$(\alpha_{j_1} \cup \dots \cup \alpha_{j_k})_{j_1,\dots,j_k \in \{1,\dots,n\}, j_1 < \dots < j_k}.$$

2. *Insbesondere folgt: Es gibt einen Isomorphismus*

$$\bigwedge_R (x_1, \dots, x_n) \cong H^*(T^n; R)$$

   in ${}_R\mathsf{GradAlg}$, wobei die äußere Algebra $\bigwedge_R(x_1, \dots, x_n)$ die kanonische Graduierung mit $|x_1| = \dots = |x_n| = 1$ trägt.

Beweisskizze. Dies folgt durch einen geeigneten Vergleich von $([0,1], \{0,1\})$ mit $(S^1, 1)$ bzw. S^1 induktiv aus Proposition 2.14. □

Man beachte, dass diese Darstellung der Kohomologie eines Torus als Ring effizienter ist als die einzelnen Kohomologiemoduln einzeln aufzulisten und die Beziehungen zwischen den Kohomologiemoduln in den verschiedenen Graden gut erklärt. Man beachte dabei, dass die Produktstruktur des Kohomologierings von $S^1 \times S^1$ der geometrischen Intuition entspricht, dass das Cup-Produkt der Kohomologieklassen, die den beiden definierenden Kreisen entsprechen, eine Kohomologieklasse liefert, die dem gesamten Torus entspricht. Diese Beziehung werden wir später noch weiter präzisieren.

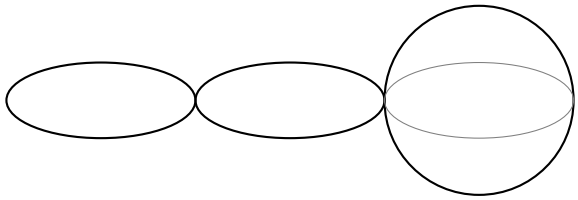


Abbildung (2.22): Der Badeschaumraum aus Beispiel 2.21

Beispiel 2.21. Falls es eine multiplikative Struktur $\cdot \cup \cdot$ auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ gibt, gilt:

1. Ist $n \in \mathbb{N}_{>1}$, so gibt es *keinen* topologischen Raum X mit $(S^1)^n \simeq \Sigma X$; dies folgt aus Proposition 2.20, Proposition 2.9 und Beispiel 2.7.
2. Sei
$$B := \big(S^1 \times \{0\}\big) \cup \big((2,0,0) + (S^1 \times \{0\})\big) \cup \big((4,0,0) + S^2\big) \subset \mathbb{R}^3.$$
(Abbildung (2.22)). Dann gilt
$$H_*(B;R) \cong_{R\mathsf{Grad}} H_*(S^1 \times S^1;R)$$
$$H^*(B;R) \cong_{R\mathsf{Grad}} H^*(S^1 \times S^1;R)$$
für alle kommutativen Ringe R mit Eins. Aber eine einfache Rechnung und Proposition 2.20 zeigen, dass $H^*(B;\mathbb{Z})$ und $H^*(S^1 \times S^1;\mathbb{Z})$ *nicht* in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{GradAlg}$ isomorph sind. Insbesondere ist $B \not\simeq S^1 \times S^1$ (letzteres kann man zum Beispiel auch über die Fundamentalgruppe sehen).

Satz 2.23 (Kohomologiering reell-projektiver Räume)**.** *Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z}/2)$, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $\alpha \in H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \cong_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2$ ein/der Erzeuger. Dann ist der kanonische Homomorphismus*
$$\begin{aligned} \mathbb{Z}/2[x] \,/\, (x^{n+1}) &\longrightarrow H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \\ x &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$
ein Isomorphismus in ${}_{\mathbb{Z}/2}\mathsf{GradAlg}$. Dabei trägt $\mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$ die kanonische Graduierung mit $|x| = 1$.

Beweisskizze.

– *Notation.* Wir schreiben h für die Kohomologietheorie $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z}/2)$ und bezeichnen Punkte in $\mathbb{R}P^n$ durch homogene Koordinaten:
$$\begin{aligned} P^n &:= \mathbb{R}P^n \\ &= S^n/\text{Antipodenoperation} \\ &\cong \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \,/\, \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ &= \big\{ [x_0 : \cdots : x_n] \;\big|\; (x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \big\}. \end{aligned}$$

– *Reformulierung des Problems.* Aus den Berechnungen in zellulärer Kohomologie wissen wir bereits: Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist

$$h^k(P^n) \cong_{\mathbb{Z}/2} \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

D.h. als graduierte $\mathbb{Z}/2$-Moduln sind $\mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1})$ und $h^*(P^n)$ isomorph. Außerdem gilt für alle $m \in \{0, \dots, n\}$ und alle $k \in \{0, \dots, m\}$, dass der von der kanonischen Inklusion $\mathbb{R}P^m \hookrightarrow P^n$ induzierte Homomorphismus $h^k(P^n) \longrightarrow h^k(\mathbb{R}P^m)$ ein mit $\cdot \cup \cdot$ verträglicher Isomorphismus ist. Induktiv folgt somit, dass es zu zeigen genügt, dass

$$\cdot \cup \cdot : h^p(P^n) \otimes_{\mathbb{Z}/2} h^q(P^n) \longrightarrow h^n(P^n)$$

für alle $p, q \in \{1, \dots, n-1\}$ mit $p + q = n$ ein Isomorphismus ist.

– *Zusammenhang mit der kohomologischen Orientierung von* $\mathbb{R}^n$. Sei

$$P := \left\{ [x_0 : \cdots : x_p : 0 : \cdots : 0] \;\middle|\; (x_0, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \setminus \{0\} \right\} \cong \mathbb{R}P^p$$
$$Q := \left\{ [0 : \cdots : 0 : x_p : \cdots : x_n] \;\middle|\; (x_p, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{q+1} \setminus \{0\} \right\} \cong \mathbb{R}P^q.$$

Dann ist

$$U := \left\{ [x_0 : \cdots : x_{p-1} : 1 : x_{p+1} : \cdots : x_n] \;\middle|\; (x_0, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \right\} \cong \mathbb{R}^n$$

eine offene Umgebung von $z := [0 : \cdots : 0 : 1 : 0 : \cdots : 0]$ in P^n, wobei $P \cap Q = \{z\}$ ist.
Wir betrachten das folgende Diagramm von $\mathbb{Z}/2$-Moduln:

$$\begin{array}{ccc}
h^p(P^n) \otimes_{\mathbb{Z}/2} h^q(P^n) & \xrightarrow{\quad\cdot \cup \cdot\quad} & h^n(P^n) \\
\uparrow & & \uparrow \\
h^p(P^n, P^n \setminus Q) \otimes_{\mathbb{Z}/2} h^q(P^n, P^n \setminus P) & \xrightarrow{\cdot \cup \cdot} & h^n(P^n, P^n \setminus \{z\}) \\
\downarrow & & \downarrow \\
h^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0 \times \mathbb{R}^q) \otimes_{\mathbb{Z}/2} h^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^p \times 0) & \xrightarrow[\cdot \cup \cdot]{} & h^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})
\end{array}$$

Dabei sind die vertikalen Homomorphismen von den jeweiligen Inklusionen induziert; man beachte dabei, dass $U \cong \mathbb{R}^n$ ist. Das Diagramm ist wegen der Natürlichkeit von $\cdot \cup \cdot$ kommutativ.
Da der untere horizontale Homomorphismus nach Korollar 2.18 ein Isomorphismus ist, genügt es zu zeigen, dass die vertikalen Homomorphismen Isomorphismen sind.

– *Abschluss des Beweises.* Zelluläre Kohomologie und Ausschneidung zeigen, dass die rechten vertikalen Homomorphismen Isomorphismen sind.

Mithilfe von zellulärer Kohomologie, Ausschneidung und der Homotopieäquivalenz $P \setminus \{z\} \hookrightarrow P^n \setminus Q$ folgt aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} h^p(P^n) & \longrightarrow & h^p(P) \\ \uparrow & & \uparrow \\ h^p(P^n, P^n \setminus Q) & \longrightarrow & h^p(P, P \setminus \{z\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ h^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0 \times \mathbb{R}^q) & \longrightarrow & h^p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus \{0\}) \end{array}$$

(und der analogen Situation für die rechten Faktoren der Tensorprodukte), dass auch die linken vertikalen Homomorphismen Isomorphismen sind. □

Mit denselben Methoden beweist man analog:

Satz 2.24 (Kohomologiering komplex-projektiver Räume)**.** *Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$, sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $\alpha \in H^2(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ ein Erzeuger. Dann ist der kanonische Homomorphismus*

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x] \,/\, (x^{n+1}) &\longrightarrow H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z}) \\ x &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

ein Isomorphismus in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{GradAlg}$. Dabei trägt $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ die kanonische Graduierung mit $|x| = 2$.

Diese Berechnungen von Kohomologieringen von projektiven Räumen haben zahlreiche Konsequenzen:

Beispiel 2.25. Falls es eine multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z}/2)$ bzw. $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ gibt, folgt:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist
$$\operatorname{cat} \mathbb{R}P^n = n = \operatorname{cat} \mathbb{C}P^n.$$
Dies folgt aus Proposition 2.9, Satz 2.23 bzw. 2.24 und den Überdeckungen projektiver Räume durch die Standardkartenumgebungen (Abbildung (2.26)).
2. Die Kohomologieringe aus Satz 2.23 bzw. 2.24 und die Struktur von Kohomologieringen von gutartigen Einpunktvereinigungen zeigen
$$\begin{aligned} \mathbb{C}P^2 &\not\simeq S^2 \vee S^4 \\ \mathbb{R}P^3 &\not\simeq \mathbb{R}P^2 \vee S^3 \end{aligned}$$
(wobei wir in den Einpunktvereinigungen die Basispunkte verschweigen).

Es gibt viele Anwendungen, in denen die Berechnung der Kohomologieringe projektiver Räume eine zentrale Rolle spielt; zum Beispiel:

– Der Satz von Borsuk-Ulam (Satz 3.12).

Abbildung (2.26): Beispiel für eine offene Überdeckung durch Kartenumgebungen

- Die Tatsache, dass $\mathbb{R}^n$ nur dann die Struktur einer reellen Divisionsalgebra zulässt, wenn n eine Potenz von 2 ist (Satz 3.22).
- Der Zusammenhang zwischen Kohomologietheorien und formalen Gruppengesetzen und algebraischer Geometrie (Bemerkung 3.31).

Wir werden diese Anwendungen behandeln, wenn uns die noch fehlenden Hilfsmittel zur Verfügung stehen.

2.4. Konstruktion des Cup-Produkts in singulärer Kohomologie

Wir werden nun zeigen, dass singuläre Kohomologie tatsächlich eine multiplikative Struktur besitzt. Dazu werden wir ein solches Cup-Produkt explizit auf dem Kokettenniveau konstruieren.

Setup 2.27. Im folgenden sei R ein kommutativer [oder involutiver] Ring mit Eins. Wir verwenden den Isomorphismus

$$H^0(\bullet; R) \rightleftarrows R$$

$$[\mathrm{const}_{\Delta^0 \to \bullet} \mapsto a] \mapsfrom\!\!\shortmid a$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Wir beginnen mit dem absoluten Fall und erklären dann wie man daraus auch das Cup-Produkt im allgemeinen relativen Fall erhält.

Definition 2.28 (absolutes Cup-Produkt auf $C^*(\,\cdot\,; R)$)**.** Sei X ein topologischer Raum und seien $p, q \in \mathbb{Z}$. Ist $p < 0$ oder $q < 0$, so sei $\cdot \cup \cdot : C^p(X; R) \otimes_R C^q(X; R) \longrightarrow$

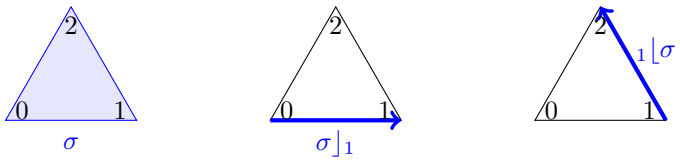


Abbildung (2.29): die 1-Vorderseite und 1-Rückseite eines 2-Simplexes

$C^{p+q}(X;R)$ die triviale Abbildung. Sind $p,q \in \mathbb{N}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \cdot \cup \cdot : C^p(X;R) \otimes_R C^q(X;R) &\longrightarrow C^{p+q}(X;R) \\ f \otimes g &\longmapsto \begin{pmatrix} \operatorname{map}(\Delta^{p+q}, X) & \to & R \\ \sigma & \mapsto & (-1)^{p\cdot q} \cdot f(\sigma\rfloor_p) \cdot g({}_q\lfloor\sigma). \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dabei ist

- das singuläre Simplex $\sigma\rfloor_p := \sigma[0,\dots,p]$ die *p-Vorderseite*
- und ${}_q\lfloor\sigma := \sigma[p,\dots,p+q]$ die *q-Rückseite*

von $\sigma \in \operatorname{map}(\Delta^{p+q}, X)$ (Abbildung (2.29)). Zu $n,k \in \mathbb{N}$ und $j_0,\dots,j_k \in \{0,\dots,n\}$ verwenden wir dabei die Abkürzung

$$\begin{aligned} [j_0,\dots,j_k] \colon \Delta^k &\longrightarrow \Delta^n \\ (t_0,\dots,t_k) &\longmapsto \sum_{r=0}^{k} t_r \cdot e_{j_r}. \end{aligned}$$

Proposition 2.30 (Eigenschaften des absoluten Cup-Produkts auf $C^*(\,\cdot\,;R)$)**.** *Sei X ein topologischer Raum.*

1. Einselement. *Ist $1_X := \operatorname{const}_1 \in C^0(X;R)$, so gilt für alle $f \in C^*(X;R)$, dass*
$$1_X \cup f = f = f \cup 1_X.$$
2. Assoziativität. *Für alle $f,g,h \in C^*(X;R)$ gilt*
$$f \cup (g \cup h) = (f \cup g) \cup h.$$
3. Natürlichkeit. *Für alle stetigen Abbildungen $f\colon X \longrightarrow Y$ und alle $g,h \in C^*(Y;R)$ gilt*
$$C^*(f;R)(g \cup h) = C^*(f;R)(g) \cup C^*(f;R)(h).$$
4. Kokettenabbildung. *Durch die Cup-Produkte aus Definition 2.28 ist eine Kokettenabbildung $\cdot \cup \cdot : C^*(X;R) \otimes_R C^*(X;R) \longrightarrow C^*(X;R)$ gegeben.*
5. Kohomologie. *Für alle $p,q \in \mathbb{Z}$ ist*
$$\begin{aligned} \cdot \cup \cdot : H^p(X;R) \otimes_R H^q(X;R) &\longrightarrow H^{p+q}(X;R) \\ [f] \otimes [g] &\longmapsto [f \cup g] \end{aligned}$$
wohldefiniert und linear.

Beweisskizze. All diese Eigenschaften folgen durch einfaches Nachrechnen aus der Definition des absoluten Cup-Produkts und Teil 5 kann auch mithilfe des folgenden Lemmas aus Teil 4 gefolgert werden. □

Lemma 2.31 (algebraisches Kreuz-Produkt auf Kokettenkomplexen)**.** *Seien* $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{CoCh})$ *und seien* $p, q \in \mathbb{Z}$*. Dann ist*

$$\begin{aligned} \cdot \times \cdot : H^p(C) \otimes_R H^q(D) &\longrightarrow H^{p+q}(C \otimes_R D) \\ [f] \otimes [g] &\longrightarrow [f \otimes g] \end{aligned}$$

wohldefiniert und linear.

Beweisskizze. Mithilfe der Definition des Korandoperators von Tensorprodukten von Kokettenkomplexen (Definition B.27) überzeugt man sich leicht davon, dass $f \otimes g$ ein Kozykel in $C \otimes_R D$ ist, wenn $f \in C$ und $g \in D$ Kozykel sind und dass sich die davon repräsentierte Klasse nicht ändert, wenn f bzw. g durch Addition von Korändern modifiziert werden. □

Bemerkung 2.32 (algebraisches Kreuz-Produkt auf Kettenkomplexen)**.** Analog zu Lemma 2.31 erhält man auch ein algebraisches Kreuz-Produkt für Kettenkomplexe statt Kokettenkomplexe.

Caveat 2.33 (strikte graduierte Kommutativität)**.** Das Cup-Produkt auf $C^*(\,\cdot\,; R)$ ist im allgemeinen *nicht* graduiert kommutativ, sondern nur graduiert kommutativ bis auf Homotopie (Proposition 2.34). Dieser „Fehler“ wir durch die sogenannten Steenrod-Quadrate gemessen.

Proposition 2.34 (graduierte Kommutativität des absoluten Cup-Produkts)**.** *Sei* X *ein topologischer Raum und sei* $T_X \colon C^*(X;R) \otimes_R C^*(X;R) \longrightarrow C^*(X;R) \otimes_R C^*(X;R)$ *die natürliche Kokettenabbildung, die durch*

$$\begin{aligned} C^p(X;R) \otimes_R C^q(X;R) &\longrightarrow C^q(X;R) \otimes_R C^p(X;R) \\ f \otimes g &\longmapsto (-1)^{p \cdot q} \cdot g \otimes f \end{aligned}$$

für alle $p, q \in \mathbb{Z}$ *gegeben ist.*

1. *Dann gibt es eine (in* X *und* R *natürliche) Kokettenhomotopie*

$$(\,\cdot\, \cup \,\cdot\,) \circ T_X \simeq \,\cdot\, \cup \,\cdot\, : C^*(X;R) \otimes_R C^*(X;R) \longrightarrow C^*(X;R).$$

2. *Insbesondere gilt: Für alle* $p, q \in \mathbb{Z}$ *und alle* $\varphi \in H^p(X;R)$*,* $\psi \in H^q(X;R)$ *ist*

$$\varphi \cup \psi = (-1)^{p \cdot q} \cdot \psi \cup \varphi.$$

Der Beweis beruht auf einem geeigneten „Umdrehen“ der singulären Simplizes:

Lemma 2.35 (umgedrehte singuläre Simplizes)**.** *Sei* X *ein topologischer Raum. Zu* $n \in \mathbb{N}$ *sei*

$$\begin{aligned} \varrho_{X,n} \colon C_n(X) &\longrightarrow C_n(X) \\ \mathrm{map}(\Delta^n, X) \ni \sigma &\longmapsto (-1)^{\frac{n \cdot (n+1)}{2}} \cdot \sigma[n, \ldots, 0], \end{aligned}$$

und zu $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ *sei* $\varrho_{X,n} \colon C_n(X) \longrightarrow C_n(X)$ *der triviale Homomorphismus.*

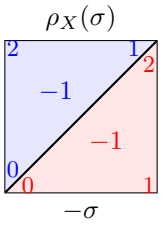


Abbildung (2.36): Variante der Prismenzerlegung für Lemma 2.35 in Dimension 1

1. *Dann ist* $\varrho_X := (\varrho_{X,n})_{n\in\mathbb{Z}} \colon C(X) \longrightarrow C(X)$ *eine Kettenabbildung.*
2. *Es gibt eine natürliche Kettenhomotopie* $\varrho_X \simeq_{\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C(X)}$.

Beweisskizze. Der erste Teil ergibt sich durch Nachrechnen. Der zweite Teil folgt mit einer geeigneten Variante der Prismenzerlegung (Lemma II.3.22 und Abbildung (2.36)). □

Beweisskizze (von Proposition 2.34). Es genügt den ersten Teil zu zeigen. Wir betrachten die Kokettenabbildung

$$\varrho_X^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\varrho_X, R) \colon C^*(X;R) \longrightarrow C^*(X;R).$$

Nach Lemma 2.35 gibt es dann eine (in X und R natürliche) Kokettenhomotopie $\varrho_X^* \simeq \mathrm{id}_{C^*(X;R)}$. Außerdem zeigt eine Rechnung, dass

$$(\,\cdot\,\cup\,\cdot\,)\circ T_X \circ (\varrho_X^* \otimes_R \varrho_X^*) = \varrho_X^* \circ (\,\cdot\,\cup\,\cdot\,).$$

Also erhalten wir eine (in X und R natürliche) Kokettenhomotopie

$$\begin{aligned}(\,\cdot\,\cup\,\cdot\,)\circ T_X &\simeq \,\cdot\,\cup\,\cdot\, \circ T_X \circ (\varrho_X^* \otimes_R \varrho_X^*)\\ &= \varrho_X^* \circ (\,\cdot\,\cup\,\cdot\,)\\ &\simeq \,\cdot\,\cup\,\cdot\,,\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Die Konstruktion des absoluten Cup-Produkts in singulärer Kohomologie ist damit abgeschlossen. Wir gehen nun zum relativen Fall über und erklären wie sich die Eigenschaften des absoluten Cup-Produkts in die entsprechenden Eigenschaften des relativen Cup-Produkts übersetzen.

Definition 2.37 (relatives Cup-Produkt auf $H^*(\,\cdot\,;R)$)**.** Sei $(X,A,B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und seien $p,q \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir

$$\cdot\,\cup\,\cdot : H^p(X,A;R) \otimes_R H^q(X,B;R) \longrightarrow H^{p+q}(X, A\cup B; R)$$

als die von

$$C^p(X,A;R)\otimes_R C^q(X,B;R)\xrightarrow{\cdot\cup\cdot}\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\tfrac{C_{p+q}(X)}{C_{p+q}(A)+C_{p+q}(B)},R\right)\longleftarrow\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\left(\tfrac{C_{p+q}(X)}{C_{p+q}(A\cup B)},R\right)$$
$$\Big\|$$
$$C^{p+q}(X,A\cup B;R)$$

und vom algebraischen Kreuz-Produkt (Lemma 2.31) induzierte Abbildung in Kohomologie; man beachte dabei:

- Die linke Abbildung ist aufgrund der Definition des absoluten Cup-Produkts auf $C^*(\,\cdot\,;R)$ wohldefiniert.
- Die rechte Abbildung ist von der Inklusion $C_*(A)+C_*(B)\hookrightarrow C_*(A\cup B)$ induziert und somit eine Kokettenhomotopieäquivalenz: Die Inklusion $C_*(A)+C_*(B)\hookrightarrow C_*(A\cup B)$ ist wegen $(X,A,B)\in\operatorname{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und den Unterteilungsargumenten für singuläre Ketten (Satz II.3.34) ein Homologieisomorphismus; nach dem Fünfer-Lemma (Proposition B.6) ist dann auch die induzierte Abbildung

  $$\frac{C_*(X)}{C_*(A)+C_*(B)}\longrightarrow\frac{C_*(X)}{C_*(A\cup B)}$$

  ein Homologieisomorphismus. Da es sich bei den betrachteten (Quotienten)Kettenkomplexen um freie Kettenkomplexe handelt, die nach unten beschränkt sind, ist diese Kettenabbildung bereits eine Kettenhomotopieäquivalenz. Mit Korollar B.52 ist somit auch das Dual davon eine Kokettenhomotopieäquivalenz.
- Wir schreiben im folgenden kurz

  $$C^*(X,A+B;R):=\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(C_*(X)/(C_*(A)+C_*(B)),R\big).$$

Ist $A\subset B$ oder $B\subset A$ (z.B. $A=\emptyset$ oder $B=\emptyset$, so ist die rechte Ausschneidungsabbildung die Identität.

Satz 2.38 (multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;R)$)**.** *Das in Definition 2.28 und 2.37 definierte Cup-Produkt auf $H^*(\,\cdot\,;R)$ ist eine multiplikative Struktur auf der Kohomologietheorie $H^*(\,\cdot\,;R)$ im Sinne von Definition 2.3.*

Beweisskizze. Wir weisen nach, dass die Axiome aus Definition 2.3 erfüllt sind (in einer etwas angenehmeren Reihenfolge):

1. *Einselement.* Wir betrachten $1_X:=H^0(X\to\bullet;R)(1)\in H^0(X;R)$. Da 1_X eine Klasse in absoluter Kohomologie ist, muss in diesem Fall kein Ausschneidungsisomorphismus angewendet werden und die Neutralität von 1_X folgt somit aus der entsprechenden Aussage für das absolute Cup-Produkt aus Proposition 2.30.
2. *Natürlichkeit.* Natürlichkeit erhalten wir aus der Natürlichkeit des Cup-Produkts auf $C^*(\,\cdot\,;R)$ (Proposition 2.30) und der Natürlichkeit der beteiligten Ausschneidungsisomorphismen.

3. *graduierte Kommutativität.* Sei $(X, A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$. Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} C^*(X,A;R) \otimes_R C^*(X,B;R) & \xrightarrow{\cdot \cup \cdot} & C^*(X, A+B; R) & \xleftarrow{\simeq} & C^*(X, A \cup B; R) \\ \text{induziert von } T_X \big\downarrow & & \big\downarrow \mathrm{id} & & \big\downarrow \mathrm{id} \\ C^*(X,B;R) \otimes_R C^*(X,A;R) & \xrightarrow[\cdot \cup \cdot]{} & C^*(X, A+B; R) & \xleftarrow[\simeq]{} & C^*(X, A \cup B; R) \end{array}$$

   Die rechten horizontalen Abbildungen sind dabei durch die Inklusion $C_*(A) + C_*(B) \hookrightarrow C_*(A \cup B)$ induziert und das rechte Quadrat ist offenbar kommutativ. Das linke Quadrat kommutiert bis auf Kokettenhomotopie – da die entsprechenden Kokettenhomotopien im absoluten Fall natürlich sind (Proposition 2.34) und sich deshalb auf den relativen Fall übertragen lassen. Anwenden von Kohomologie liefert somit die graduierte Kommutativität.
4. *Assoziativität.* Die Assoziativität folgt aus der Assoziativität des absoluten Cup-Produkts auf Koketten und der Natürlichkeit des Cup-Produkts auf Koketten; man beachte dabei, dass jeweils die entsprechenden Ausschneidungsschritte eingebaut werden müssen.
5. *Verträglichkeit mit den Verbindungshomomorphismen.* Sei $(X, A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und seien $p, q \in \mathbb{Z}$. Aufgrund der graduierten Kommutativität genügt es die erste Variante zu zeigen. Wir betrachten das Diagramm in Abbildung (2.39). Man beachte, dass der durch das Cup-Produkt auf Kokettenniveau gegebene Homomorphismus ① wohldefiniert ist (da die Koketten des zweiten Arguments auf singulären Simplizes auf B verschwinden). Natürlichkeit des Cup-Produkts bzw. der Verbindungshomomorphismen in Tripelsequenzen zeigt, dass alle Drei- bzw. Vierecke dieses Diagramms kommutieren – mit Ausnahme des oberen linken Vierecks, für das ein separates Argument nötig ist: Seien $f \in C^p(A; R)$ und $g \in C^q(X, B; R)$ Kozykel, und sei $\widetilde{f} \in C^p(X; R)$ eine Fortsetzung von f. Dann gilt (Satz 1.15; es spielt dabei keine Rolle, welche Fortsetzung gewählt wird, wie eine einfache Rechnung zeigt)

$$\delta[f] = [\delta \widetilde{f}].$$

   Die linke untere Route in diesem Viereck ergibt also

$$\big(\delta[f]\big) \cup [g] = [(\delta \widetilde{f}) \cup g];$$

   da $\widetilde{f} \cup g$ eine Fortsetzung von $f \cup g$ von $C_*(A) + C_*(B)$ auf $C_*(X)$ ist und $\delta g = 0$ ist, ergibt die rechte obere Route

$$\delta[f \cup g] = \big[\delta(\widetilde{f} \cup g)\big] = \big[(\delta \widetilde{f}) \cup g + (-1)^p \cdot \widetilde{f} \cup (\delta g)\big] = \big[(\delta \widetilde{f}) \cup g\big].$$

   Also ist auch dieses Viereck kommutativ. Damit ist das gesamte Diagramm kommutativ. Dies entspricht genau der Verträglichkeit des Cup-Produkts mit Verbindungshomomorphismen. □

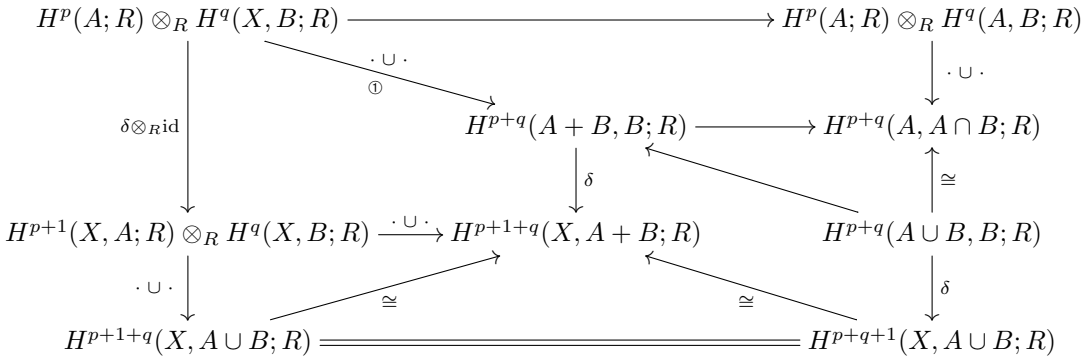


Abbildung (2.39): Verträglichkeit des Cup-Produkts mit den Verbindungshomomorphismen; die unbeschrifteten Abbildungen sind durch die entsprechenden Inklusionen induziert.

Bemerkung 2.40 (assoziiertes Kreuz-Produkt, explizit)**.** Wir definieren wie folgt ein externes Produkt $\cdot \times \cdot$ auf $C^*(\,\cdot\,;R)$: Sind X und Y topologische Räume und sind $p, q \in \mathbb{N}$, so definieren wir

$$\begin{aligned} \cdot \times \cdot : C^p(X;R) \otimes_R C^q(Y;R) &\longrightarrow C^{p+q}(X \times Y; R) \\ f \otimes g &\longmapsto C^p(p_X)(f) \cup C^q(p_Y)(g) \\ &= \big(\sigma \mapsto (-1)^{p \cdot q} \cdot f((p_X \circ \sigma)\rfloor_p) \cdot g({}_q\lfloor(p_Y \circ \sigma))\big), \end{aligned}$$

wobei $p_X \colon X \times Y \longrightarrow X$ und $p_Y \colon X \times Y \longrightarrow Y$ die Projektionen sind; umgekehrt gilt: Ist $\Delta_X \colon X \longrightarrow X \times X$ die Diagonalabbildung, so folgt für alle $f \in C^p(X;R)$, $g \in C^q(X;R)$, dass

$$f \cup g = C^{p+q}(\Delta_X; R)(f \times g).$$

Es induziert $\cdot \times \cdot$ ein externes Produkt auf $H^*(\,\cdot\,;R)$ und dieses stimmt mit dem zu $\cdot \cup \cdot$ assoziierten Kreuz-Produkt (Proposition 2.12) überein.

Bemerkung 2.41 (Verträglichkeit des Cup-Produkts mit Koeffizientenwechsel)**.** Ist S ein kommutativer Ring mit Eins und ist $\varphi \colon S \longrightarrow R$ ein unitaler Ringhomomorphismus, so induziert φ natürliche Transformationen

$$\begin{aligned} C^*(\,\cdot\,;R) &\Longrightarrow C^*(\,\cdot\,;S) \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{CoCh} \\ H^*(\,\cdot\,;R) &\Longrightarrow H^*(\,\cdot\,;S) \colon \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Grad} \\ C^*_{H^*(\,\cdot\,;R)}(\,\cdot\,) &\Longrightarrow C^*_{H^*(\,\cdot\,;S)}(\,\cdot\,) \colon \mathsf{CW}^2 \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{CoCh} \end{aligned}$$

und die ersten beiden sind mit den entsprechenden Cup-Produkten verträglich.

Beispiel 2.42 (der Kohomologiering $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, sei $p \colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/2$ der surjektive Ringhomomorphismus und sei $c \colon H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)$ der von p

induzierte Koeffizientenwechselhomomorphismus. Den graduierten Modul $H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$ haben wir bereits in Beispiel 1.20 und Satz 1.23 berechnet. Sei $\alpha \in H^2(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2$ der Erzeuger; ist n ungerade, so sei $\beta \in H^n(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ ein Erzeuger. Außerdem schreiben wir $k := \lfloor n/2 \rfloor$.

Aus der Betrachtung der zellulären Kokettenkomplexe folgt, dass das Bildelement $c(\alpha) \in H^2(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) \cong_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2$ der Erzeuger ist; insbesondere gilt

$$c(\alpha^{\cup m}) = \big(c(\alpha)\big)^{\cup m} \neq 0 \in H^{2\cdot m}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)$$

für alle $m \in \{1,\dots,k\}$, und damit $\alpha^{\cup m} \neq 0 \in H^{2\cdot m}(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z})$. Aus Dimensionsgründen erhalten wir somit:

– Ist $n = 2\cdot k$ gerade, so ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x]/(2\cdot x, x^{k+1}) &\longrightarrow H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \\ x &\longmapsto \alpha \end{aligned}$$

ein Isomorphismus graduierter Ringe, wobei $|x| = 2$.

– Ist $n = 2\cdot k + 1$ ungerade, so ist

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[x,y]/(2\cdot x, x^{k+1}, x\cdot y, y^2) &\longrightarrow H^*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) \\ x &\longmapsto \alpha \\ y &\longmapsto \beta \end{aligned}$$

ein Isomorphismus graduierter Ringe, wobei $|x| = 2$, $|y| = n$.

Bemerkung 2.43 (Cup-Produkt auf beschränkter Kohomologie)**.** Die explizite Beschreibung des Cup-Produkts auf $C^*(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ zeigt, dass es ein wohldefiniertes Cup-Produkt auf dem beschränkten Kokettenkomplexfunktor $C_b^*(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ induziert. Dieses wiederum induziert ein Cup-Produkt

$$\big(\,\cdot\,\cup\,\cdot : H_b^p(X,A;\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H_b^q(X,A;\mathbb{R}) \longrightarrow H_b^{p+q}(X,A;\mathbb{R})\big)_{p,q\in\mathbb{Z},(X,A)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)}$$

auf beschränkter Kohomologie $H_b^*(\,\cdot\,;\mathbb{R})$.[11] Dieses Cup-Produkt ist natürlich, assoziativ, graduiert kommutativ (hierbei geht ein, dass die (Ko)Kettenhomotopien im Fall singulärer Kohomologie natürlich sind und sich deshalb auf den beschränkten Kokettenkomplex einschränken) und besitzt ein Einselement. Außerdem gilt eine geeignete Form der Verträglichkeit mit Verbindungshomomorphismen.

Man beachte dabei, dass es im allgemeinen *kein* vernünftiges Cup-Produkt der Form $H_b^p(X,A;\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H_b^q(X,B;\mathbb{R}) \longrightarrow H_b^{p+q}(X, A\cup B;\mathbb{R})$ gibt, da beschränkte Kohomologie im allgemeinen Ausschneidung *nicht* erfüllt.

Bemerkung 2.44 (Cup-Produkt via Eilenberg-MacLane-Spektren)**.** Zu $p,q \in \mathbb{N}$ kann man explizit eine stetige Abbildung $m\colon K(R,p)\times K(R,q) \longrightarrow K(R,p+q)$ konstruieren,

[11] Mehr zu beschränkter Kohomologie findet sich zum Beispiel im Skript zur Vorlesung Algebraische Topologie III, Georg-August-Universität Göttingen, WS 2009/10
http://www.mathematik.uni-r.de/loeh/teaching/topologie3_ws0910/prelim.pdf

die die folgende Eigenschaft besitzt: Die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} H^p(\,\cdot\,;R) \times H^q(\,\cdot\,;R) & \longrightarrow & H^{p+q}(\,\cdot\,;R) \\ \uparrow\cong & & \cong\uparrow \\ \big[\,\cdot\,, K(R,p)\big]_* \times \big[\,\cdot\,, K(R,q)\big]_* & \longrightarrow & \big[\,\cdot\,, K(R,p+q)\big]_* \\ \big([f]_*, [g]_*\big) & \longmapsto & \big[m \circ (f,g)\big]_* \end{array}$$

stimmt auf CW_{0*} mit dem Cup-Produkt $\cdot \cup \cdot$ überein. Allgemeiner liefern Spektren mit zusätzlicher multiplikativer Sturktur (sogenannte *Ringspektren*) auf den durch sie repräsentierten Kohomologietheorien multiplikative Strukturen.

Es stellen sich nun die folgenden Fragen:

- Wieviel Spielraum gibt es bei der Konstruktion des Cup-Produkts auf (Ko)Kettenniveau? Man beachte dabei, dass das Cup-Produkt auf singulärer Kohomologie von (endlichen) CW-Komplexen durch die kohomologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$ (Korollar 2.17 und 2.18) im wesentlichen eindeutig festgelegt ist.
- Wie können wir (externe) Produkte auf singulärer Homologie konstruieren?
- Wie können wir singuläre Kohomolgoie und singuläre Homologie und ihre Produkte durch geeignete Paarungen verbinden?

All diese Fragen lassen sich bequem über sogenannte Diagonalapproximationen und die Methode der azyklischen Modelle (Kapitel B.5) beantworten.

2.5. Diagonalapproximationen und der Satz von Eilenberg-Zilber

Wir beginnen mit Diagonalapproximationen und dem Bezug zum Cup-Produkt auf singulärer Homologie. Im Anschluss betrachten wir eine analoge Situation in mehreren Variabelen – den Satz von Eilenberg-Zilber (Satz 2.55) – der für externe Produkte auf Homologie und den Zusammenhang zwischen homologischen und kohomologischen Produkten in singulärer (Ko)Homologie relevant werden wird.

Definition 2.45 (Diagonalapproximation)**.** Eine *Diagonalapproximation* ist eine natürliche Transformation $D\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ von Funktoren $\mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ mit: für alle topologischen Räume X und alle $\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^0, X)$ gilt

$$D_X(\sigma) = \sigma \otimes \sigma.$$

Der Name Diagonalapproximation leitet sich daraus ab, dass Diagonalapproximationen im Grad 0 der Diagonalabbildung in das Tensorprodukt entsprechen und diese zu einer Kettenabbildung fortsetzen. Man beachte dabei, dass für $C \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ die Diagonalabbildung

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} C \\ x &\longmapsto x \otimes x \end{aligned}$$

selbst im allgemeinen *keine* Kettenabbildung ist.

Proposition 2.46 (Alexander-Whitney-Abbildung)**.** *Ist X ein topologischer Raum, so ist die* Alexander-Whitney-Abbildung *von X durch*

$$\begin{aligned} A_X \colon C(X) &\longrightarrow C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(X) \\ \operatorname{map}(\Delta^n, X) \ni \sigma &\longmapsto \sum_{p=0}^{n} \sigma\rfloor_p \otimes {}_{n-p}\lfloor\sigma \end{aligned}$$

definiert. Dann ist $(A_X)_{X \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top})}$ eine Diagonalapproximation.

Beweisskizze. Die gewünschten Eigenschaften lassen sich leicht anhand der Definitionen nachrechnen. □

Proposition 2.47 (von einer Diagonalapproximation induziertes Cup-Produkt)**.** *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins und sei X ein topologischer Raum.*

1. *Sei $D \colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ eine Diagonalapproximation. Sind $p, q \in \mathbb{Z}$, so ist*

$$\begin{aligned} \cdot \cup_D \cdot \colon H^p(X;R) \otimes_R H^q(X;R) &\longrightarrow H^{p+q}(X;R) \\ [f] \otimes [g] &\longmapsto \left[(-1)^{p \cdot q} \cdot m_R \circ (f \otimes_{\mathbb{Z}} g) \circ D_X\right] \end{aligned}$$

   wohldefiniert und linear. Dabei ist $m_R \colon R \otimes_{\mathbb{Z}} R \longrightarrow R$ die Multiplikation.
2. *Sind D und D' Diagonalapproximationen mit $D_X \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} D'_X$, so stimmen $\cdot \cup_D \cdot$ und $\cdot \cup_{D'} \cdot$ auf $H^*(X;R)$ überein.*

Beweisskizze. Nachrechnen zeigt, dass[12]

$$\begin{aligned} C^*(X;R) \otimes_R C^*(X;R) &\longrightarrow C^*(X;R) \\ f \otimes g &\longmapsto (-1)^{|f| \cdot |g|} \cdot m_R \circ (f \otimes_{\mathbb{Z}} g) \circ D_X \end{aligned}$$

für eine Diagonalapproximation D eine Kokettenabbildung ist. Daraus lassen sich leicht beide Aussagen folgern. □

Beispiel 2.48. Das Cup-Produkt auf $H^*(\,\cdot\,;R)$ stimmt für jeden kommutativen Ring R mit Eins mit dem von der Alexander-Whitney-Diagonalapproximation A induzierten Cup-Produkt $\cdot \cup_A \cdot$ überein.

Satz 2.49 (Eindeutigkeit von Diagonalapproximationen)**.** *Sind D und $D' \colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ Diagonalapproximationen, so gibt es eine natürliche Kettenhomotopie zwischen D und D'.*

Als Vorbereitung betrachten wir singuläre Kettenkomplexe von Simplizes genauer:

Lemma 2.50 (singuläre Kettenkomplexe von Simplizes)**.** *Sei $C_{\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ der Kettenkomplex, der im Grad 0 konzentriert ist und dort durch $\mathbb{Z}$ gegeben ist, und sei $n \in \mathbb{N}$.*

[12] Ist C ein Kokettenkomplex, ist $p \in \mathbb{Z}$ und $x \in C^p$, so schreibt man auch $|x| := p$. Analog für Kettenkomplexe.

1. *Dann ist* $C(\Delta^n) \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} C_{\mathbb{Z}}$.
2. *Insbesondere gilt: Ist* $C \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$*, so folgt*

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} C(\Delta^n) \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} C.$$

Beweisskizze (von Lemma 2.50). Der zweite Teil folgt aus dem ersten; der erste Teil kann auf verschiedene Weisen aus den bereits bekannten Eigenschaften von $C(\Delta^n)$ gefolgert werden. □

Beweisskizze (von Satz 2.49). Mithilfe von Lemma 2.50 folgt die Eindeutigkeit von Diagonalapproximationen aus dem Satz über azyklische Modelle (Satz B.60 und die Beispiele aus Abschnitt B.5). □

Korollar 2.51 (Cup-Produkt via Diagonalapproximationen)**.** *Sei* R *ein kommutativer Ring mit Eins und sei* $D\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ *eine Diagonalapproximation. Dann stimmt* $\cdot \cup_D \cdot$ *in der Kategorie* Top *auf* $H^*(\,\cdot\,; R)$ *mit dem gewöhnlichen Cup-Produkt auf singulärer Kohomologie überein.*

Beweisskizze. Dies folgt aus den Eigenschaften der Alexander-Whitney-Diagonalapproximation und dem Eindeutigkeitssatz 2.49. □

Die Eigenschaften des Cup-Produkts lassen sich nun alternativ zu den expliziten Berechnungen im vorigen Abschnitt auch aus den Eigenschaften von Diagonalapproximationen ableiten; diesen Zugang werden wir im analogen Fall des externen Produkts auf singulärer Homologie (Abschnitt 2.6) genauer betrachten.

Außerdem kann man zeigen, dass analoge Überlegungen auch auf das relative Cup-Produkt zutreffen.

Wir betrachten nun die analoge Situation für externe Produkte:

Definition 2.52 (Eilenberg-Zilber-Morphismen)**.** Natürliche Transformationen der Form

$$\begin{aligned} P\colon C(①) \otimes_{\mathbb{Z}} C(②) &\Longrightarrow C(① \times ②)\colon \mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch} \\ Q\colon C(① \times ②) &\Longrightarrow C(①) \otimes_{\mathbb{Z}} C(②)\colon \mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch} \end{aligned}$$

heißen *Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ* $\otimes \to \times$ *bzw.* $\times \to \otimes$, falls

$$P(\sigma \otimes \tau) = (\sigma, \tau) \qquad \text{bzw.} \qquad Q(\sigma, \tau) = \sigma \otimes \tau$$

für alle topologischen Räume X, Y und alle $\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^0, X)$, $\tau \in \mathrm{map}(\Delta^0, Y)$ gilt.

Beispiel 2.53.

– Ist $D\colon C(\,\cdot\,) \Longrightarrow C(\,\cdot\,) \otimes_{\mathbb{Z}} C(\,\cdot\,)$ eine Diagonalapproximation, so ist

$$\big(\, C(X \times Y) \xrightarrow{D_{X\times Y}} C(X \times Y) \otimes_{\mathbb{Z}} C(X \times Y) \xrightarrow{C(p_X)\otimes_{\mathbb{Z}} C(p_Y)} C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y) \,\big)_{X,Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top})}$$

ein Eilenberg-Zilber-Morphismus vom Typ $\times \to \otimes$; dabei sind $p_X\colon X \times Y \longrightarrow X$ und $p_Y\colon X \times Y \longrightarrow Y$ die Projektionen.

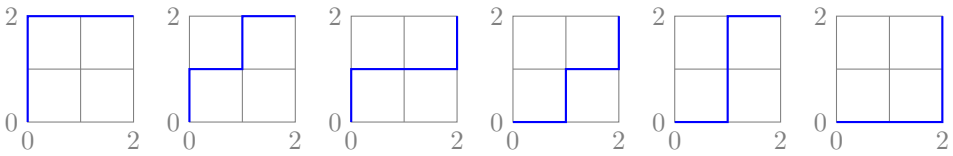


Abbildung (2.54): Die möglichen Kantenwege von $(2,2)$-Shuffles

– Explizite Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ erhält man zum Beispiel aus dem sogenannten *Shuffle-Produkt*: Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Ein (p,q)-*Shuffle* ist eine Abbildung $s\colon \{0,\dots,p+q\} \longrightarrow \{0,\dots,p\} \times \{0,\dots,q\}$ mit der Eigenschaft, dass die beiden Komponenten s_1 und s_2 von s monoton wachsend sind und

$$s(0) = (0,0) \qquad \text{und} \qquad s(p+q) = (p,q)$$

gilt. Die Menge aller (p,q)-Shuffles bezeichnen wir mit $S(p,q)$. Ist $s \in S(p,q)$, so entspricht die Folge $(s(0),\dots,s(p+q))$ einem Kantenweg im Quadratgitter auf $\{0,\dots,p\} \times \{0,\dots,q\}$. Zum Beispiel sind die Elemente von $S(2,2)$ durch die in Abbildung (2.54) skizzierten Kantenwege in $\{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$ gegeben.
Zu einem Shuffle $s \in S(p,q)$ sei $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$ die eindeutige Permutation von $\{1,\dots,p+q\}$ mit folgender Eigenschaft: Es gilt

$$x_1 < x_2 < \dots < x_p \qquad \text{und} \qquad y_1 < y_2 < \dots < y_q$$

$$\forall_{j\in\{1,\dots,p\}} \quad s_1(x_j) > s_1(x_j - 1) \qquad \text{und} \qquad \forall_{j\in\{1,\dots,q\}} \quad s_2(y_j) > s_2(y_j - 1).$$

Sei $\varepsilon_s \in \{-1,1\}$ das Signum dieser Permutation $(x_1,\dots,x_p,y_1,\dots,y_q)$. Außerdem sei $\sigma_s := \big([s_1(0),\dots,s_1(p+q)],[s_2(0),\dots,s_2(p+q)]\big) \in \operatorname{map}(\Delta^{p+q}, \Delta^p \times \Delta^q)$:

$$\begin{aligned} \sigma_s\colon \Delta^{p+q} &\longrightarrow \Delta^p \times \Delta^q \\ (t_0,\dots,t_{p+q}) &\longmapsto \left(\sum_{j=0}^{p+q} t_j \cdot e_{s_1(j)}, \sum_{j=0}^{p+q} t_j \cdot e_{s_2(j)}\right) \end{aligned}$$

Sind X und Y topologische Räume, so definieren wir das *Shuffle-Produkt*

$$\begin{aligned} S_{X,Y}\colon C_p(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C_q(Y) &\longrightarrow C_{p+q}(X \times Y) \\ \sigma \otimes \tau &\longmapsto \sum_{s\in S(p,q)} \varepsilon_s \cdot (\sigma,\tau) \circ \sigma_s. \end{aligned}$$

– Für kubische singuläre Homologie können Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ einfach durch kartesische Produktbildung singulärer Würfel konstruiert werden (da kartesische Produkte von Würfeln wieder Würfel sind).

Satz 2.55 (der Satz von Eilenberg-Zilber)**.**

1. *Es gibt Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ und vom Typ $\times \to \otimes$ und diese sind jeweils bis auf natürliche Kettenhomotopie eindeutig.*

2. *Sind P und Q Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ bzw. $\times \to \otimes$, so sind $P \circ Q$ und $Q \circ P$ jeweils natürlich kettenhomotop zur Identität.*
3. (Ko)Assoziativität. *Seien P und Q Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ bzw. $\times \to \otimes$. Dann sind*

$$P_{①\times②,③} \circ (P_{①,②} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}) \qquad \textit{und} \qquad P_{①,②\times③} \circ (\mathrm{id} \otimes_{\mathbb{Z}} P_{②,③})$$

bzw.

$$(Q_{①,②} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathrm{id}) \circ Q_{①\times②,③} \qquad \textit{und} \qquad (\mathrm{id} \otimes_{\mathbb{Z}} Q_{②,③}) \circ Q_{①,②\times③}$$

jeweils natürlich kettenhomotop als natürliche Transformationen von Funktoren $\mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.
4. (Ko)Kommutativität. *Seien P und Q Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ bzw. $\times \to \otimes$. Für topologische Räume X und Y seien*

$$\begin{aligned} \tau_{X,Y} \colon X \times Y &\longrightarrow Y \times X \\ (x, y) &\longmapsto (y, x) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} T_{X,Y} \colon C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y) &\longrightarrow C(Y) \otimes_{\mathbb{Z}} C(X) \\ x \otimes y &\longmapsto (-1)^{|x|\cdot|y|} \cdot y \otimes x \end{aligned}$$

die entsprechenden Vertauschungsabbildungen. Dann sind

$$C(\tau_{①,②}) \circ P_{①,②} \qquad \textit{und} \qquad P_{②,①} \circ T_{①,②}$$

bzw.

$$Q_{②,①} \circ C(\tau_{①,②}) \qquad \textit{und} \qquad T_{①,②} \circ Q_{①,②}$$

jeweils natürlich kettenhomotop als natürliche Transformationen von Funktoren $\mathsf{Top} \times \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.

Beweisskizze. Mithilfe von Lemma 2.50 (bzw. Varianten davon) folgen diese Aussagen aus dem Satz über azyklische Modelle (Satz B.60 und die Beispiele aus Abschnitt B.5) und konkreten Berechnungen im Grad 0. □

Aus der Natürlichkeit der involvierten Kettenabbildungen bzw. -homotopien erhalten wir auch entsprechende relative Varianten:

Bemerkung 2.56 (relative Eilenberg-Zilber-Morphismen)**.** Seien P und Q Eilenberg-Zilber-Morphismen vom Typ $\otimes \to \times$ bzw. $\times \to \otimes$. Sind (X, A) und (Y, B) Raumpaare, so erhalten wir folgendes Diagramm mit exakten Zeilen und kommutativen Quadraten:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C(A) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y) + C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(B) & \longrightarrow & C(X) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y) & \longrightarrow & C(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y, B) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow\downarrow & & \uparrow\downarrow Q_{X,Y} \quad P_{X,Y} & & \uparrow\downarrow \overline{Q}_{(X,A),(Y,B)} \quad \overline{P}_{(X,A),(Y,B)} & & \\
0 & \longrightarrow & C(A \times Y) + C(X \times B) & \longrightarrow & C(X \times Y) & \longrightarrow & \frac{C(X \times Y)}{C(A \times Y) + C(X \times B)} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Die vertikalen Abbildungen sind dabei von P bzw. Q induziert, die horizontalen von den entsprechenden Inklusionen. Für die Exaktheit der oberen Zeile beachte man, dass $C(X)$ bzw. $C(Y)$ gradweise frei sind. Dann gilt:

1. Es gibt natürliche Kettenhomotopien zwischen $\overline{P} \circ \overline{Q}$ bzw. $\overline{Q} \circ \overline{P}$ und den entsprechenden Identitäten.
2. Insbesondere sind auch $\overline{P}$ und $\overline{Q}$ bis auf natürliche Kettenhomotopie eindeutig bestimmt.
3. Aus $\overline{P}$ erhalten wir eine natürliche Transformation

   $$\overline{\overline{P}} \colon C(①) \otimes_{\mathbb{Z}} C(②) \Longrightarrow C(① \times ②)$$

   von Funktoren $\mathsf{Top}^2 \times \mathsf{Top}^2 \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ durch

   $$\left(C(X,A) \otimes C(Y,B) \xrightarrow{\overline{P}^{(X,A),(Y,B)}} \frac{C(X \times Y)}{C(A \times Y) + C(X \times B)} \longrightarrow C\big((X,A) \times (Y,B)\big) \right)_{(X,A),(Y,B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)}$$

   (wobei der rechte Morphismus von der Inklusion $C(A \times Y) + C(X \times B) \hookrightarrow C(A \times Y \cup X \times B)$ der herausgeteilten Unterkomplexe induziert ist). Dann ist auch $\overline{\overline{P}}$ bis auf natürliche Kettenhomotopie eindeutig bestimmt, und diese natürliche Transformation ist bis auf Homotopie assoziativ bzw. kommutativ.

2.6. Externe Produkte auf Homologie

Wir betrachten nun Produkte auf Homologie.

Caveat 2.57. Es gibt auf $H_*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ *kein* nicht-triviales natürliches internes Produkt!

Wir betrachten daher nur externe Produkte auf Homologietheorien. Wir beginnen mit einer axiomatischen Beschreibung (analog zu externen Produkten auf Kohomologietheorien, Definition 2.11) und zeigen dann, wie man mithilfe von Eilenberg-Zilber-Morphismen ein externes Produkt auf singulärer Homologie erhält.

Setup 2.58. Im folgenden sei R ein kommutativer[13] Ring mit Eins.

Definition 2.59 (externes Produkt auf einer Homologietheorie)**.** Sei h eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und sei ein Isomorphismus $h_0(\bullet) \cong_R R$ gegeben; sei $1 \in h_0(\bullet)$ das entsprechende Einselement. Ein *externes Produkt auf der Homologietheorie h* ist eine Familie

$$\big(\,\cdot \times \cdot : h_p(X,A) \otimes_R h_q(Y,B) \longrightarrow h_{p+q}\big((X,A) \times (Y,B)\big)\big)_{\,p,\,q \,\in\, \mathbb{Z},\,(X,\,A),\,(Y,\,B) \,\in\, \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)}$$

von R-linearen Abbildungen (sogenannter *Kreuz-Produkte*) mit folgenden Eigenschaften:

[13] bzw. involutiver

– *Natürlichkeit.* Für alle $(X,A),(Y,B),(X',A'),(Y',B') \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$, alle $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^2}((X,A),(X',A')), g \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^2}((Y,B),(Y',B'))$, alle $p,q \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h^p(X,A), y \in h^q(Y,B)$ gilt

$$h_{p+q}(f \times g)(x \times y) = h_p(f)(x) \times h_q(g)(y).$$

– *Assoziativität.* Für alle Homologieklassen x,y,z, für die die entsprechenden Kreuz-Produkte definiert sind, gilt

$$x \times (y \times z) = (x \times y) \times z.$$

– *(graduierte) Kommutativität.* Für alle $(X,A),(Y,B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$, alle $p,q \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h_p(X,A)$, $y \in h_q(Y,B)$ gilt

$$h_{p+q}(\tau_{X,Y})(x \times y) = (-1)^{p \cdot q} \cdot y \times x,$$

wobei

$$\begin{aligned} \tau_{X,Y} \colon X \times Y &\longrightarrow Y \times X \\ (x,y) &\longmapsto (y,x). \end{aligned}$$

– *Einselement.* Für alle Raumpaare (X,A), alle $p \in \mathbb{Z}$ und alle $x \in h_p(X,A)$ gilt

$$1 \times x = x = x \times 1.$$

In den Gleichheiten gehen die kanonischen Homöomorphismen $\bullet \times (X,A) \cong (X,A) \cong (X,A) \times \bullet$ ein.

– *Verträglichkeit mit Verbindungshomomorphismen.* Seien $(X,A),(Y,B)$ Raumpaare mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und seien $p,q \in \mathbb{Z}$.

1. Ist $x \in h_p(X,A)$ und $y \in h^q(Y,B)$, so gilt

$$(\partial x) \times y = \partial_{①}(x \times y),$$

wobei $\partial \colon h_p(X,A) \longrightarrow h_{p-1}(A)$ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X,A) ist und $\partial_{①}$ die Komposition

$$h_{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \longrightarrow h_{p+q-1}(A \times Y \cup X \times B, X \times B) \longleftarrow h_{p+q-1}(A \times Y, A \times B)$$

aus dem Verbindungsmorphismus der entsprechenden Tripelsequenz und dem Ausschneidungsisomorphismus ist.

2. Ist $x \in h_p(X,A)$ und $y \in h_q(Y,B)$, so gilt

$$x \times (\partial y) = (-1)^p \cdot \partial_{②}(x \times y),$$

wobei $\partial \colon h_q(X,B) \longrightarrow h_{q-1}(B)$ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X,B) ist und $\partial_{②}$ die Komposition

$$h_{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B) \longrightarrow h_{p+q-1}(A \times Y \cup X \times B, A \times Y) \longleftarrow h_{p+q-1}(X \times B, A \times B)$$

aus dem Verbindungsmorphismus der entsprechenden Tripelsequenz und dem Ausschneidungsisomorphismus ist.

Caveat 2.60. Da Homologie kovariant ist, kann man im Fall von externen Produkten auf Homologie im allgemeinen *kein* internes Produkt auf Homologie mithilfe der Diagonalabbildung (wie in Proposition 2.12) konstruieren.[14]

Bemerkung 2.61 (Einhängungsisomorphismus und homologisches Kreuz-Produkt)**.** Analog zum Fall von Kohomologie (Proposition 2.14 und Korollar 2.16) erlauben es externe Produkte auf Homologie, eine alternative Beschreibung des Einhängungsisomorphismus auf Homologie zu geben.

Wir erwähnen hier nur explizit die folgende Konsequenz:

Proposition 2.62 (homologische Orientierung auf $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei h eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$, sei $\cdot \times \cdot$ ein externes Produkt auf der Homologietheorie h, es sei ein Isomorphismus $h_0(\bullet) \cong_R R$ gegeben, und es sei $\varepsilon(1) \in h_1(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\}) \cong_R R$ als Bild von $1 \in h_0(\bullet)$ unter der folgenden Komposition definiert:*

$$h_0(\bullet) \xrightarrow{h_0(\bullet\mapsto -1)} h_0\big(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \{1\}\big) \xleftarrow{\partial} h_1\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}\setminus\{0\}\big)$$

(Dabei ist der rechte Morphismus ein Isomorphismus, wie man leicht anhand der langen exakten Tripelsequenz abliest.) Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann heißt das n-fache Kreuz-Produkt

$$\varepsilon(n) := \varepsilon(1) \times \cdots \times \varepsilon(1) \in h_n\big(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\big)$$

homologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$ bezüglich h und $\cdot \times \cdot$.

1. *Dann ist $\varepsilon(n)$ ein Erzeuger von $h_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong_R R$.*
2. *Sind $p, q \in \mathbb{N}_{>0}$ mit $p + q = n$, so ist*

$$\cdot \times \cdot : h_p(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p \setminus 0) \otimes_R h_q(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^q \setminus 0) \longrightarrow h_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus 0)$$

ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit

$$\varepsilon(p) \times \varepsilon(q) = \varepsilon(n).$$

Beweisskizze. Dies folgt analog zu Korollar 2.17 aus der entsprechenden Beschreibung des Einhängungsisomorphismus. □

Dies liefert, dass externe Produkte auf endlichen CW-Komplexen auf gewöhnlichen Homologietheorien im wesentlichen eindeutig bestimmt sind.

Wir konstruieren nun ein/das externes Produkt auf singulärer Homologie mithilfe von Eilenberg-Zilber-Morphismen:

Setup 2.63. Im folgenden identifizieren wir $H_0(\,\cdot\,; R)$ durch den Isomorphismus

$$H_0(\bullet; R) \rightleftarrows R$$
$$[a \cdot \mathrm{const}] \mapsfrom a$$

mit dem Ring R.

[14] Für spezielle Räume ist dies möglich; so erhält man zum Beispiel das sogenannte Pontryagin-Produkt auf singulärer Homologie für gewisse Räume.

Proposition und Definition 2.64 (Kreuz-Produkt auf singulärer Homologie)**.** *Sei P ein Eilenberg-Zilber-Morphismus vom Typ $\otimes \to \times$ und sei $\overline{\overline{P}}$ die zugehörige relative Version (Bemerkung 2.56). Seien $(X, A), (Y, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)$ und seien $p, q \in \mathbb{Z}$. Dann definieren wir das Kreuz-Produkt*

$$\cdot \times \cdot : H_p(X, A; R) \otimes_R H_q(Y, B; R) \longrightarrow H_{p+q}((X, A) \times (Y, B); R)$$

durch die Komposition

$$H_p(X, A; R) \otimes_R H_q(Y, B; R) \xrightarrow{①} H_{p+q}\big(C(X, A; R) \otimes_R C(Y, B; R)\big) \xrightarrow{②} H_{p+q}((X, A) \times (Y, B); R),$$

wobei ① das algebraische homologische Kreuzprodukt ist und ② von der folgenden Kettenabbildung induziert ist:

$$\begin{aligned} C(X, A; R) \otimes_R C(Y, B; R) &\longrightarrow (R \otimes_Z C(X, A)) \otimes_R (R \otimes_Z C(Y, B)) \\ &\longrightarrow (R \otimes_R R) \otimes_{\mathbb{Z}} C(X, A) \otimes_{\mathbb{Z}} C(Y, B) \\ &\longrightarrow R \otimes_{\mathbb{Z}} C\big((X, A) \times (Y, B)\big); \end{aligned}$$

dabei ist die erste Abbildung der kanonische Isomorphismus, die zweite Abbildung ist durch Umordnung der Faktoren (Kettenabbildung!) gegeben, und die dritte Abbildung ist $(x \otimes y \mapsto x \cdot y) \otimes_R \overline{\overline{P}}_{(X,A),(Y,B)}$. Diese Definition hängt nicht *vom gewählten Eilenberg-Zilber-Morphismus P ab.*

Beweisskizze. Die Unabhängigkeit vom gewählten Eilenberg-Zilber-Morphismus folgt aus der relativen Version des Satzes von Eilenberg-Zilber (Bemerkung 2.56). □

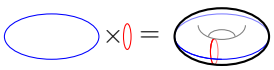
Insbesondere erhalten wir zum Beispiel eine konkrete Beschreibung des homologischen Kreuz-Produkts durch das Shuffle-Produkt (Beispiel 2.53).

Beispiel 2.65 (homologisches Kreuz-Produkt im Torus)**.** Wir betrachten den zweidimensionalen Torus $T := S^1 \times S^1$. Sei $\sigma \in C_1(S^1; Z)$ der 1-Zykel, der durch einmaliges, positives Umlaufen von S^1 gegeben ist; dann ist $[\sigma] \in H_1(S^1; \mathbb{Z})$ ein Erzeuger von $H_1(S^1; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Um welche Klasse handelt es sich bei $[\sigma] \times [\sigma] \in H_2(T; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$?

Aus der expliziten Beschreibung des Kreuz-Produkts auf $H_*(\,\cdot\,; \mathbb{Z})$ über das Shuffle-Produkt folgt

$$\begin{aligned} [\sigma] \times [\sigma] &= \big[S_{S^1, S^1}(\sigma \otimes \sigma)\big] \\ &= [\tau_1 - \tau_0], \end{aligned}$$

wobei $\tau_0, \tau_1 \in C_2(T; \mathbb{Z})$ in Abbildung (2.66) skizziert sind. Nach den Berechnungen in Beispiel II.3.45 ist dies ein Erzeuger von $H_2(T; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$. Es gilt also auch in Homologie die Gleichung



Satz 2.67 (externes Produkt auf singulärer Homologie)**.** *Das in Definition 2.64 eingeführte Kreuz-Produkt auf $H_*(\,\cdot\,; R)$ ist ein externes Produkt auf $H_*(\,\cdot\,; R)$.*

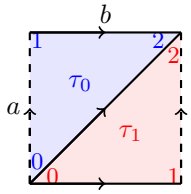


Abbildung (2.66): Shuffle-Produkt im Torus

Beweisskizze. Wir weisen nach, dass die entsprechenden Axiome erfüllt sind:
- Natürlichkeit folgt aus der Natürlichkeit der relativen Eilenberg-Zilber-Morphismen.
- Assoziativität und
- (graduierte) Kommutativität folgen aus den entsprechenden Eigenschaften von relativen Eilenberg-Zilber-Morphismen (Bemerkung 2.56).
- Die Eigenschaft des Einselements kann man zum Beispiel über das Shuffle-Produkt nachprüfen.
- Die Verträglichkeit mit den Verbindungshomomorphismen folgt aus der Tatsache, dass (relative) Eilenberg-Zilber-Morphismen Kettenabbildungen liefern, und der expliziten Beschreibung der Verbindungshomomorphismen. □

2.7. Das Cap-Produkt zwischen Kohomologie und Homologie

Als letztes Produkt betrachten wir das sogenannte Cap-Produkt, das Kohomologie und Homologie verbindet und das Kronecker-Produkt verallgemeinert.

Setup 2.68. Sei R ein kommutativer[15] Ring mit Eins.

Definition 2.69 (Dualitätspaarung zwischen Kohomologie und Homologie)**.** Sei k eine Kohomologietheorie und sei h eine Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$. Außerdem sei ein Isomorphismus $h_0(\bullet) \cong_R R$ gegeben und $1 \in h_0(\bullet)$ das entsprechende Einselement. Eine *Dualitätspaarung zwischen k und h* ist eine Familie

$$\big(\cdot \cap \cdot : k^p(X,A) \otimes_R h_n(X, A \cup B) \longrightarrow h_{n-p}(X,B)\big)_{p,n\in\mathbb{Z},(X,A,B)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)}$$

von R-linearen Abbildungen (sogenannter *Cap-Produkte*) mit folgenden Eigenschaften:
- *Natürlichkeit.* Sei $(X,A,B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, sei $(X',A',B') \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, und sei $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Top}^3}((X,A,B),(X',A',B'))$. Dann gilt für alle $n,p \in \mathbb{Z}$, alle $x \in k^p(X',A')$ und alle $y \in h_n(X, A\cup B)$, dass

$$h_{n-p}(f)\big(k^p(f)(x) \cap y\big) = x \cap h_n(f)(y).$$

[15] oder involutiver

– *Einselement.* Für alle $p \in \mathbb{Z}$ ist

$$\cdot \cap 1 \colon k^p(\bullet) \longrightarrow h_{-p}(\bullet)$$

ein Isomorphismus.

– *Verträglichkeit mit den Verbindungshomomorphismen.* Seien $n, p \in \mathbb{Z}$, und es sei $(X, A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, sowie $y \in h_n(X, A \cup B)$.

1. Dann gilt für alle $x \in k^p(X, A)$, dass

$$k^p(j_B)(x) \cap \partial_{①} y = (-1)^p \cdot \partial(x \cap y),$$

wobei ∂ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X, B) bezüglich h ist, $j_B \colon (B, A \cap B) \hookrightarrow (X, A)$ die Inklusion ist und $\partial_{①}$ die Komposition

$$h_n(X, A \cup B) \longrightarrow h_{n-1}(A \cup B, A) \longleftarrow h_{n-1}(B, A \cap B)$$

aus dem Verbindungshomomorphismus der Tripelsequenz und des Ausschneidungsisomorphismus ist.

2. Und für alle $x \in k^p(A)$ gilt

$$h_{n-p}(j_A)(x \cap \partial_{②} y) = (-1)^{p+1} \cdot (\delta x) \cap y,$$

wobei δ der Verbindungshomomorphismus des Paares (X, A) bezüglich k ist, $j_A \colon (A, A \cap B) \hookrightarrow (X, B)$ die Inklusion ist und $\partial_{②}$ die Komposition

$$h_n(X, A \cup B) \longrightarrow h_{n-1}(A \cup B, B) \longleftarrow h_{n-1}(A, A \cap B)$$

aus dem Verbindungshomomorphismus der Tripelsequenz und des Ausschneidungsisomorphismus ist.

Ist $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf k (mit Einselement $1 \in k^0(\bullet) \cong_R R$) und ist $\cdot \times \cdot$ ein externes Produkt auf h, so ist $\cdot \cap \cdot$ *kompatibel* mit diesen Produktstrukturen, wenn folgendes gilt:

– *Cup-Cap-Relation.* Für alle (Ko)Homologieklassen x, x', y, für die die nachfolgenden Produkte definiert sind, gilt

$$1 \cap y = y$$
$$(x \cup x') \cap y = x \cap (x' \cap y).$$

(Insbesondere: Ist X ein topologischer Raum, so wird $h_*(X)$ durch $\cdot \cap \cdot$ zu einem $k^*(X)$-Modul).

– *Verträglichkeit mit den Kreuz-Produkten.* Für alle (Ko)Homologieklassen x, x', y, y', für die die nachfolgenden Produkte definiert sind, gilt

$$(x \times x') \cap (y \times y') = (-1)^{|x'| \cdot |y|} \cdot (x \cap y) \times (x' \cap y').$$

Die Intuition dahinter ist folgende: Besitzt k ein Cup-Produkt $\cdot \cup \cdot$ und ist $\varphi \in k^p(X, A)$, so erhalten wir einen Homomorphismus

$$\varphi \cup \cdot \colon k^{n-p}(X, B) \longrightarrow k^n(X, A \cup B).$$

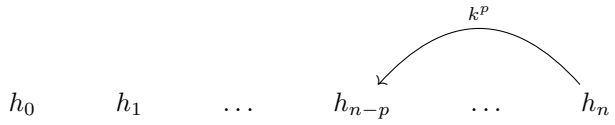


Abbildung (2.70): Cap-Produkt, schematisch

„Dual“ dazu liefert φ einen Homomorphismus

$$\varphi \cap \cdot : h_n(X, A \cup B) \longrightarrow h_{n-p}(X, B).$$

Eine schematische Darstellung ist in Abbildung (2.70) gegeben.

Die folgende Beobachtung erklärt, warum Cap-Produkte als Dualitätspaarungen bezeichnet werden:

Proposition 2.71 ((ko)homologische Dualität für $\mathbb{R}^n$)**.** *Seien k bzw. h eine Kohomologietheorie bzw. Homologietheorie auf Top^2 mit Werten in ${}_R\mathsf{Mod}$ und seien Isomorphismen $k^0(\bullet) \cong_R R \cong_R h_0(\bullet)$ gegeben. Sei $\cdot \cup \cdot$ eine multiplikative Struktur auf k, sei $\cdot \times \cdot$ ein externes Produkt auf h und sei $\cdot \cap \cdot$ eine mit diesen Produkten kompatible Dualitätspaarung zwischen k und h. Zu $n \in \mathbb{N}_{>0}$ sei $\varepsilon(n) \in h_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ die entsprechende (ko)homologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$. Dann sind*

$$\begin{aligned} \cdot \cap \varepsilon(n) \colon k^p(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow h_{n-p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}), \\ \cdot \cap \varepsilon(n) \colon k^p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) &\longrightarrow h_{n-p}(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

für alle $p \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen.

Beweisskizze. Dies folgt induktiv aus der Konstruktion der homologischen Orientierung über das homologische Kreuz-Produkt, die Eigenschaften der entsprechenden Einselemente (bzgl. der Kreuz-Produkte und des Cap-Produkts) und der Verträglichkeit des Cap-Produkts mit den Kreuz-Produkten. □

Bemerkung 2.72.

- Die obige Proposition kann auch ohne Produktstrukturen auf auf den beteiligten (Ko)Homologietheorien formuliert und bewiesen werden (mithilfe von geeigneten Einhängungsisomorphismen).
- Die obige Proposition ist eine lokale Version von Poincaré-Dualität (Satz 4.35) und fungiert im Beweis von Poincaré-Dualität als Induktionsanfang.

Wir konstruieren nun das Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie:

Definition 2.73 (Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie)**.** Seien $n, p \in \mathbb{Z}$.

- Dann definieren wir das *Cap-Produkt auf singulären (Ko)Ketten* für einen topologischen Raum X durch

$$\begin{aligned} \cdot \cap \cdot : C^p(X; R) \otimes_R C_n(X; R) &\longrightarrow C_{n-p}(X; R) \\ f \otimes a \cdot \sigma &\longmapsto (-1)^{p \cdot (n-p)} \cdot f({}_p\lfloor \sigma) \cdot a \cdot \sigma\rfloor_{n-p}. \end{aligned}$$

(Dabei nehmen wir ohne Einschränkung $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \{0, \ldots, n\}$ an, sowie $a \in R$ und $\sigma \in \mathrm{map}(\Delta^n, X)$ an.)

– Ist $(X, A, B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, so definieren wir das *Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie* durch die Komposition

$$\begin{array}{ccc} H^p(X, A; R) \otimes_R H_n(X, A \cup B; R) & \xrightarrow{\cdot \cap \cdot} & H_{n-p}(X, B; R) \\ {\scriptstyle \mathrm{id} \otimes_R H_n(\text{Inklusion})} \uparrow \cong & & \| \\ H^p(X, A; R) \otimes_R H_n\left(\frac{C(X;R)}{C(A;R)+C(B;R)}\right) & \longrightarrow & H_{n-p}(X, B; R) \end{array}$$

$$[f] \otimes [c] \longmapsto [f \cap c]$$

(Dabei fassen wir f als Abbildung auf $\mathrm{map}(\Delta^p, X)$ auf, die auf $\mathrm{map}(\Delta^p, A)$ trivial ist, und c als Kette in $C_n(X; R)$, deren Rand in $C(A; R) + C(B; R)$ liegt.)

Bemerkung 2.74.

– Dass das obige Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie wohldefiniert ist, folgt aus einer einfachen Rechnung.

– Das Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie besitzt auch eine Beschreibung mithilfe von Diagonalapproximationen; die obige explizite Beschreibung erhält man dann aus der Alexander-Whitney-Abbildung (Proposition 2.46).

Beispiel 2.75 (Cap-Produkte für den Torus)**.** Wir betrachten den zweidimensionalen Torus $T := S^1 \times S^1$. Seien $p_1, p_2 \colon T \longrightarrow S^1$ bzw. $i_1, i_2 \colon S^1 \longrightarrow T$ die Projektionen bzw. Inklusionen der S^1-Faktoren. Sei $f \in C^1(S^1; \mathbb{Z})$ der Umlaufzahlkozykel (Beispiel 1.14) und sei $\sigma \in C_1(S^1; \mathbb{Z})$ der Zykel, der durch einmaliges, positives Umlaufen von S^1 gegeben ist. Wir betrachten nun die folgenden (Ko)Homologieklassen

$$\begin{aligned} \varphi_1 &:= H^1(p_1; \mathbb{Z})[f] \in H^1(T; \mathbb{Z}) \\ \varphi_2 &:= H^1(p_2; \mathbb{Z})[f] \in H^1(T; \mathbb{Z}) \\ [T] &:= [\sigma \times \sigma] = [\tau_1 - \tau_0] \in H_2(T; \mathbb{Z}) \\ \alpha_1 &:= H_1(i_1; \mathbb{Z})[\sigma] \in H_1(T; \mathbb{Z}) \\ \alpha_2 &:= H_1(i_2; \mathbb{Z})[\sigma] \in H_1(T; \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Dabei sind τ_0, τ_2 die singulären 2-Simplizes aus Beispiel 2.65.

Mit der expliziten Darstellung des Cap-Produkts erhält man dann (Abbildung (2.76))

$$\begin{aligned} \varphi_1 \cap [T] &= \alpha_2 \\ \varphi_2 \cap [T] &= -\alpha_1 \\ \varphi_1 \cap \alpha_1 &= 1 \cdot [\mathrm{const}_{(1,1)}] \\ \varphi_1 \cap \alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

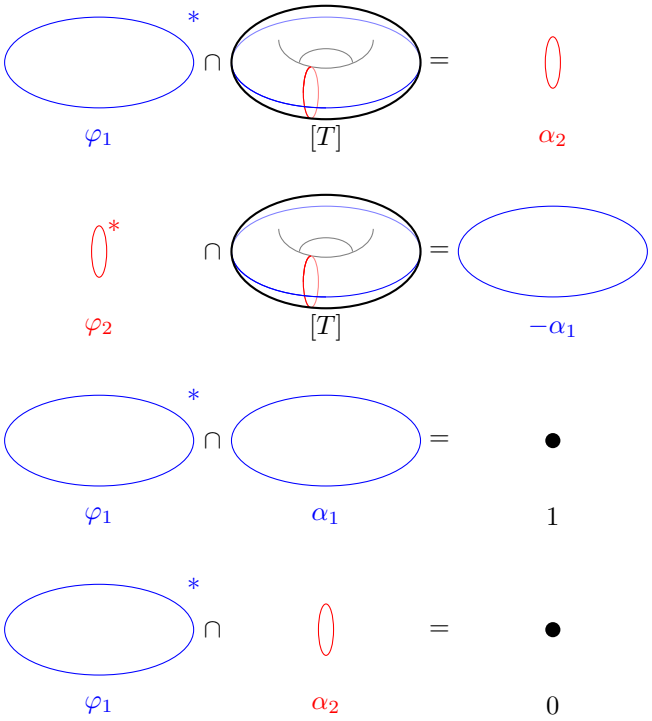


Abbildung (2.76): Cap-Produkte im zweidimensionalen Torus, schematisch

Beispiel 2.77 (Modulstruktur auf singulärer Homologie von $\mathbb{C}P^n$)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann ist $H_*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$ bezüglich der durch das Cap-Produkt induzierten Modulstruktur ein freier $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Z})$-Modul vom Rang 1. Eine allgemeinere Erklärung dafür wird auch durch Poincaré-Dualität gegeben (Satz 4.35).

Als nächstes zeigen wir, dass das Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie tatsächlich eine Dualitätspaarung zwischen singulärer Kohomologie und singulärer Homologie ist:

Satz 2.78 (Cap-Produkt auf singulärer (Ko)Homologie als Dualitätspaarung)**.**

1. *Das Cap-Produkt aus Definition 2.73 ist eine mit dem Cup-Produkt und dem homologischen Kreuz-Produkt kompatible Dualitätspaarung zwischen $H^*(\,\cdot\,;R)$ und $H_*(\,\cdot\,;R)$.*
2. *Außerdem verallgemeinert dieses Cap-Produkt das* Kronecker-Produkt*: Ist (X,A) ein Raumpaar und $n \in \mathbb{Z}$, so ist das Kronecker-Produkt durch*

$$\begin{aligned}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon H^n(X,A;R) \otimes_R H_n(X,A;R) &\longrightarrow R\\ [f]\otimes[c] &\longmapsto f(c)\end{aligned}$$

gegeben (dies ist wohldefiniert). Dann gilt

$$\langle\varphi,\alpha\rangle = \varepsilon(\varphi\cap\alpha)$$

für alle $\varphi \in H^n(X,A;R)$ und $\alpha \in H_n(X,A;R)$, wobei ε die folgende (wohldefinierte) Abbildung ist:

$$\begin{aligned}\varepsilon\colon H_0(X;R) &\longrightarrow R\\ \Big[\sum_{j=1}^m a_j\cdot\sigma_j\Big] &\longmapsto \sum_{j=1}^m a_j\end{aligned}$$

Beweisskizze. Bis auf die Verträglichkeit des Cap-Produkts mit den Kreuz-Produkten können alle behaupteten Eigenschaften (analog zu den anderen Produkten) mit der expliziten Beschreibung auf (Ko)Kettenniveau nachgerechnet werden.

Für die Verträglichkeit mit den Kreuz-Produkten bietet es sich an, die Beschreibungen der beteiligten Produkte mithilfe der Diagonalapproximationen bzw. der Eilenberg-Zilber-Morphismen und die Methode der azyklischen Modelle zu verwenden [3, Exercise VII.12.24.4]. □

2.8. Übersicht über die Produkte auf singulärer (Ko)Homologie

Im folgenden geben wir einen kurzen (und entsprechend unpräzisen) Überblick über die behandelten Produkte auf singulärer (Ko)Homologie. Genauere Erklärungen finden sich in den jeweils angegebenen Abschnitten.

Setup 2.79. Im folgenden sei R ein (der Einfachheit halber) kommutativer Ring mit Eins.

Cup-Produkt (Abschnitt 2.1 und 2.4)

- *Typ.* Multiplikative Struktur auf $H^*(\,\cdot\,;R)$:

  $$\big(\,\cdot\,\cup\,\cdot\,: H^p(X,A;R)\otimes_R H^q(X,B;R)\longrightarrow H^{p+q}(X,A\cup B;R)\big)_{p,q\in\mathbb{Z},(X,A,B)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)}$$

- *Konstruktion (absolut, auf (Ko)Kettenniveau).*

  $$\cdot\,\cup\,\cdot\,: C^p(X;R)\otimes_R C^q(X;R)\longrightarrow C^{p+q}(X;R)$$
  $$f\otimes g\longmapsto \begin{pmatrix}\mathrm{map}(\Delta^{p+q},X) & \to & R\\ \sigma & \mapsto & (-1)^{p\cdot q}\cdot f(\sigma\rfloor_p)\cdot g({}_q\lfloor\sigma).\end{pmatrix}$$

  Alternativ kann das Cup-Produkt über Diagonalapproximationen beschrieben werden.
- *Eigenschaften.*

  $$\begin{aligned} x\cup(y\cup z)&=(x\cup y)\cup z\\ x\cup y&=(-1)^{|x|\cdot|y|}\cdot y\cup x\\ 1_X\cup x&=x=x\cup 1_X\\ H^*(f;R)(x\cup y)&=\big(H^*(f;R)(x)\big)\cup\big(H^*(f;R)(y)\big)\\ (\delta x)\cup y&=\delta_{①}\big(x\cup H^*(i;R)(y)\big)\\ x\cup(\delta y)&=(-1)^{|x|}\cdot\delta_{②}\big(H^*(j;R)(x)\cup y\big)\\ x\cup y&=H^*(\Delta_{X,A,B};R)(x\times y).\end{aligned}$$

- *Anwendungen.* Algebrenstruktur auf Kohomologie (verfeinerte Homotopieinvariante), Lusternik-Schnirelmann-Kategorie, Hopf-Invariante, ...

Kohomologisches Kreuz-Produkt (Abschnitt 2.2 und 2.4)

- *Typ.* Externes Produkt auf $H^*(\,\cdot\,;R)$:

  $$\big(\,\cdot\times\cdot\,: H^p(X,A;R)\otimes_R H^q(Y,B;R)\longrightarrow H^{p+q}\big((X,A)\times(Y,B);R\big)\big)_{\substack{p,\,q\,\in\,\mathbb{Z},\,(X,\,A),\,(Y,\,B)\,\in\,\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)\\ \text{mit }(X\times Y,\,A\times Y,\,X\times B)\,\in\,\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)}}$$

- *Konstruktion (absolut, auf (Ko)Kettenniveau).*

  $$\cdot\,\cup\,\cdot\,: C^p(X;R)\otimes_R C^q(Y;R)\longrightarrow C^{p+q}(X\times Y;R)$$
  $$f\otimes g\longmapsto \begin{pmatrix}\mathrm{map}(\Delta^{p+q},X\times Y) & \to & R\\ (\sigma,\tau) & \mapsto & (-1)^{p\cdot q}\cdot f(\sigma\rfloor_p)\cdot g({}_q\lfloor\tau).\end{pmatrix}$$

  Alternativ kann man das Kreuz-Produkt über Diagonalapproximationen beschreiben.
- *Eigenschaften.*

  $$\begin{aligned} x\times(y\times z)&=(x\times y)\times z\\ H^*(\tau_{X,Y};R)(y\times x)&=(-1)^{|x|\cdot|y|}\cdot x\times y\\ 1\times x&=x=x\times 1\\ H^*(f\times g;R)(x\times y)&=H^*(f;R)(x)\times H^*(g;R)(y)\\ (\delta x)\times y&=\delta_{①}(x\times y)\\ x\times(\delta y)&=(-1)^{|x|}\cdot\delta_{②}\big(x\times y\big)\\ x\times y&=(H^*(p_X;R)(x))\cup(H^*(p_Y;R)(y)).\end{aligned}$$

- *Anwendungen.* alternative Beschreibung des Einhängungsisomorphismus, kohomologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$, Künnetheoreme, ...

Homologisches Kreuz-Produkt (Abschnitt 2.6)

- *Typ.* Externes Produkt auf $H_*(\,\cdot\,;R)$:

  $$\big(\,\cdot\times\cdot : H_p(X,A;R)\otimes_R H_q(Y,B;R)\longrightarrow H_{p+q}\big((X,A)\times(Y,B);R\big)\big)_{\;p,\,q\,\in\,\mathbb{Z},\,(X,\,A),\,(Y,\,B)\,\in\,\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)}$$

- *Konstruktion (absolut, auf (Ko)Kettenniveau).*

  $$\begin{aligned}\cdot\cup\cdot : C_p(X;R)\otimes_R C_q(Y;R)&\longrightarrow C_{p+q}(X\times Y;R)\\ a\cdot\sigma\otimes b\cdot\tau&\longmapsto a\cdot b\cdot P_{X,Y}(\sigma\otimes\tau)\end{aligned}$$

  Man kann das Kreuz-Produkt auch explizit über den Shuffle-Morphismus beschreiben.
- *Eigenschaften.*

  $$\begin{aligned}x\times(y\times z)&=(x\times y)\times z\\ H_*(\tau_{X,Y};R)(x\times y)&=(-1)^{|x|\cdot|y|}\cdot y\times x\\ 1\times x&=x=x\times 1\\ H_*(f\times g;R)(x\times y)&=H_*(f;R)(x)\times H_*(g;R)(y)\\ (\partial x)\times y&=\partial_{①}(x\times y)\\ x\times(\partial y)&=(-1)^{|x|}\cdot\partial_{②}\big(x\times y\big)\end{aligned}$$

- *Anwendungen.* alternative Beschreibung des Einhängungsisomorphismus, homologische Orientierung von $\mathbb{R}^n$, Künneththeoreme, ...

Cap-Produkt (Abschnitt 2.7)

- *Typ.* Kompatible Dualitätspaarung zwischen $H^*(\,\cdot\,;R)$ und $H_*(\,\cdot\,;R)$:

  $$\big(\,\cdot\cap\cdot : H^p(X,A;R)\otimes_R H_n(X,A\cup B;R)\longrightarrow H_{n-p}(X,B;R)\big)_{p,n\in\mathbb{Z},(X,A,B)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)}$$

- *Konstruktion (absolut, auf (Ko)Kettenniveau).*

  $$\begin{aligned}\cdot\cap\cdot : C^p(X;R)\otimes_R C_n(X;R)&\longrightarrow C_{n-p}(X;R)\\ f\otimes a\cdot\sigma&\longmapsto(-1)^{p\cdot(n-p)}\cdot f({}_p\lfloor\sigma)\cdot a\cdot\sigma\rfloor_{n-p}\end{aligned}$$

  Alternativ kann man das Cap-Produkt über Eilenberg-Zilber-Morphismen beschreiben.
- *Eigenschaften.*

  $$\begin{aligned}H_*(f;R)\big(H^*(f;R)(x)\cap y\big)&=x\cap H_*(f;R)(y)\\ H^*(j_B;R)(x)\cap\partial_{①}y&=(-1)^{|x|}\cdot\partial(x\cap y)\\ H_*(j_A;R)(x\cap\partial_{②}y)&=(-1)^{|x|+1}\cdot(\delta x)\cap y\\ 1\cap y&=y\\ (x\cup x')\cap y&=x\cap(x'\cap y)\\ (x\times x')\cap(y\times y')&=(-1)^{|x'|\cdot|y|}\cdot(x\cap y)\times(x'\cap y').\end{aligned}$$

- *Anwendungen.* Dualitätsphänomene, insbesondere Poincaré-Dualität (und ihre geometrischen Anwendungen), ...

Kronecker-Produkt (Satz 2.78)

- *Typ.* Spezialfall des Cap-Produkts:

  $$\big(\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon H^n(X,A;R)\otimes_R H_n(X,A;R)\longrightarrow R\big)_{n\in\mathbb{Z},(X,A)\in\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^2)}$$

- *Konstruktion (absolut, auf (Ko)Kettenniveau.*

  $$\begin{aligned}\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle\colon C^n(X,A;R)\otimes_R C_n(X,A;R)&\longrightarrow R\\ f\otimes c&\longmapsto f(c)\end{aligned}$$

- *Eigenschaften.* Diese leiten sich aus den Eigenschaften des Cap-Produkts ab, denn

  $$\langle x,y\rangle=\varepsilon(x\cap y).$$

- *Anwendungen.* Universelle Koeffiziententheoreme und deren Anwendungen, ...

3. Universelle Koeffiziententheoreme

Wir werden nun die folgenden Fragen betrachten:

- Wie hängt singuläre (Ko)Homologie von den Koeffizienten ab?
- Wie kann man singuläre (Ko)Homologie von Produkten aus der (Ko)Homologie der Faktoren berechnen?
- Wie kann man singuläre Kohomologie aus singulärer Homologie berechnen?
- Wie kann man singuläre Kohomologie von aufsteigenden Vereinigungen berechnen?

Das Problem in all diesen Fällen ist, dass die unterliegenden Funktoren *nicht* exakt sind, und somit nicht mit (Ko)Homologie verträglich sind. Das entsprechende Hilfsmittel aus der homologischen Algebra sind abgeleitete Funktoren (Anhang B.6–B.8). Dies führt zu den sogenannten universellen Koeffiziententheoremen und Künnetheoremen.

3.1. Singuläre Homologie mit Koeffizienten: das universelle Koeffiziententheorem in Homologie

Wir geben nun eine Antwort auf die Frage wie singuläre Homologie von den Koeffizienten abhängt. Wir beginnen mit der entsprechenden algebraischen Variante und leiten daraus das topologische universelle Koeffiziententheorem[16] ab.

Satz 3.1 (universelles Koeffiziententheorem für Homologie, algebraisch)**.** *Sei R ein Hauptidealring mit Eins, sei $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ und sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ein R-Kettenkomplex, der aus freien R-Moduln besteht. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (in Z und C natürliche) exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Z \otimes_R H_n(C) &\longrightarrow H_n(Z \otimes_R C) \longrightarrow \mathrm{Tor}_1^R\big(Z, H_{n-1}(C)\big) \longrightarrow 0 \\ z \otimes [c] &\longmapsto [z \otimes c] \end{aligned}$$

(die linke Abbildung ist also das algebraische Kreuz-Produkt). Diese Sequenz besitzt einen in Z natürlichen Spalt; insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen (in Z natürlichen) Isomorphismus

$$H_n(Z \otimes_R C) \cong_{\mathbb{Z}} Z \otimes_R H_n(C) \oplus \mathrm{Tor}_1^R\big(Z, H_{n-1}(C)\big).$$

Caveat 3.2. Es gibt *keinen* Spalt der obigen kurzen exakten Sequenz, der im gegebenen Kettenkomplex natürlich ist; wir werden im topologischen Fall ein explizites Beispiel dafür kennenlernen (Beispiel 3.4).

Beweisskizze (von Satz 3.1). Zu $n \in \mathbb{Z}$ sei

$$\begin{aligned} Z_n &:= \ker \partial_n \subset C_n \\ B_n &:= \mathrm{im}\, \partial_{n+1} \subset C_n. \end{aligned}$$

[16] „Universelles Koeffiziententheorem“ wird in der Literatur oft als *UCT* (universal coefficient theorem) abgekürzt.

Da C_n frei ist und R ein Hauptidealring ist, sind Z_n und B_n freie R-Moduln.

Die gewünschte kurze exakte Sequenz erhalten wir aus den folgenden exakten Sequenzen:

1. Nach Definition von $H_n(C)$ ist

$$0 \longrightarrow B_n \xrightarrow{j_n} Z_n \xrightarrow{\text{Projektion}} H_n(C) \longrightarrow 0$$

exakt. Da $\operatorname{Tor}^R(Z, \cdot\,)$ der links-abgeleitete Funktor von $Z \otimes_R \cdot$ ist, erhalten wir daraus die exakte Sequenz

$$\operatorname{Tor}_1^R(Z, Z_n) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R\big(Z, H_n(C)\big) \longrightarrow Z \otimes_R B_n \xrightarrow{Z \otimes_R j_n} Z \otimes_R Z_n.$$

Da Z_n frei ist, ist $\operatorname{Tor}_1^r(Z, Z_n) \cong 0$ (Beispiel B.91), und somit

$$\operatorname{Tor}_1^R\big(Z, H_{n-1}(C)\big) \cong_{\mathbb{Z}} \ker(Z \otimes_R j_n).$$

2. Außerdem ist

$$0 \longrightarrow Z_n \xrightarrow{i_n} C_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \longrightarrow 0$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ exakt. Da B_{n-1} frei ist, spaltet diese Sequenz; also ist auch

$$0 \longrightarrow Z \otimes_R Z_n \xrightarrow{Z \otimes_R i_n} Z \otimes_R C_n \xrightarrow{Z \otimes_R \partial_n} Z \otimes_R B_{n-1} \longrightarrow 0$$

exakt. Wir fassen nun $(Z \otimes_R Z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ und $(Z \otimes_R B_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ zusammen mit dem trivialen Randoperator als Kettenkomplexe C' bzw. C'' auf. Dann ist

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{Z \otimes_R i} Z \otimes_R C \xrightarrow{Z \otimes_R \partial} C'' \longrightarrow 0$$

eine Sequenz von Kettenkomplexen und Kettenabbildungen, die gradweise exakt ist. Somit erhalten wir mit der algebraischen langen exakten Homologiesequenz (Satz B.23) die exakte Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_{n+1}(C'') & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & H_n(C') & \xrightarrow{H_n(Z\otimes_R i)} & H_n(Z \otimes_R C) & \longrightarrow & H_n(C'') & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(C') \\
\| & & \| & & & & \| & & \| \\
Z \otimes_R B_n & \xrightarrow[①]{} & Z \otimes_R Z_n & & & & Z \otimes_R B_{n-1} & \xrightarrow[②]{} & Z \otimes_R Z_{n-1}
\end{array}$$

Die explizite Beschreibung des Verbindungshomomorphismus (wie im Beweis von Satz B.23) zeigt, dass ① mit $Z \otimes_R j_n$ und ② mit $Z \otimes_R j_{n-1}$ übereinstimmt. Somit erhalten wir die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} Z \otimes_R j_n \xrightarrow{\text{induziert von } Z\otimes_R i} H_n(Z \otimes_R C) \longrightarrow \ker Z \otimes_R j_{n-1} \longrightarrow 0.$$

Da $Z \otimes_R \cdot$ rechts-exakt ist, ist

$$\begin{aligned} Z \otimes_R H_n(C) &\longrightarrow \operatorname{coker} Z \otimes_R j_n \\ z \otimes [c] &\longmapsto [z \otimes c] \end{aligned}$$

ein Isomorphismus, und wir erhalten aus den beiden obigen Überlegungen die gewünschte exakte Sequenz (inklusive der Beschreibung der linken Abbildung als algebraisches Kreuz-Produkt).

Warum spaltet diese Sequenz? Aus der ersten exakten Sequenz im zweiten Schritt erhalten wir (da B_{n-1} frei ist) einen Spalt der linken Abbildung, d.h. einen R-Homomorphismus $t_n \colon C_n \longrightarrow Z_n$ mit $t_n \circ i_n = \mathrm{id}_{Z_n}$. Man rechnet nun leicht nach, dass

$$\begin{aligned} H_n(Z \otimes_R C) &\longmapsto Z \otimes_R H_n(C) \\ \Big[\sum_{j=1}^{m} z_j \otimes c_j\Big] &\longmapsto \sum_{j=1}^{m} z_j \otimes \big[t_n(c_j)\big] \end{aligned}$$

wohldefiniert ist, dass es sich dabei um einen Spalt des algebraischen Kreuz-Produkts handelt und dass dieser Homomorphismus in Z natürlich ist. □

Dieser Satz steht außerdem Modell für die noch folgenden universellen Koeffiziententheoreme (die alle von derselben Gestalt sind).

Wir leiten nun daraus die entsprechende topologische Version ab:

Korollar 3.3 (universelles Koeffiziententheorem für singuläre Homologie)**.** *Sei (X, A) ein Raumpaar und sei $n \in \mathbb{Z}$.*

1. *Sei R ein Hauptidealring mit Eins und sei $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Dann gibt es eine (in Z und (X, A) natürliche) exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Z \otimes_R H_n(X, A; R) &\longrightarrow H_n(X, A; Z) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^R\big(Z, H_{n-1}(X, A; R)\big) \longrightarrow 0. \\ z \otimes [c] &\longmapsto [z \otimes c] \end{aligned}$$

   Diese Sequenz spaltet (natürlich in Z, aber nicht natürlich in (X, A)).
2. *Ist R ein Ring mit Eins und ist $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, so gibt es eine (in Z und (X, A) natürliche) exakte Sequenz*

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow Z \otimes_{\mathbb{Z}} H_n(X, A; \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_n(X, A; Z) \longrightarrow \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\big(Z, H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z})\big) \longrightarrow 0. \\ z \otimes [c] &\longmapsto [z \otimes c] \end{aligned}$$

   in ${}_R\mathsf{Mod}$. Diese Diese Sequenz spaltet (natürlich in Z, aber nicht natürlich in (X, A)).
3. *Insbesondere gilt: Ist $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, so ist*

$$\begin{aligned} R \otimes_{\mathbb{Z}} H_n(X, A; \mathbb{Z}) &\longrightarrow H_n(X, A; R) \\ z \otimes [c] &\longmapsto [z \otimes c] \end{aligned}$$

   ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Der erste bzw. zweite Teil folgen aus dem algebraischen universellen Koeffiziententheorem für Homologie, angewendet auf die (gradweise freien!) Kettenkomplexe $C(X, A; R)$ bzw. $C(X, A; \mathbb{Z})$. Der dritte Teil folgt aus dem zweiten Teil, da $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ über $\mathbb{Z}$ flach sind, und somit die auftretenden $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}$-Terme trivial sind (Beispiel B.91). □

Beispiel 3.4. Die Projektion $\mathbb{R}P^2 \longrightarrow \mathbb{R}P^2/\mathbb{R}P^1$ zeigt für $H_2(\,\cdot\,; \mathbb{Z}/2)$, dass es im universellen Koeffiziententheorem *nicht* möglich ist, die Spalte natürlich zu wählen.

Beispiel 3.5 (Homologie von reell-projektiven Räumen)**.** Das universelle Koeffiziententheorem erklärt insbesondere das Ergebnis für Homologie von $\mathbb{R}P^n$ mit Koeffizienten (ohne über zelluläre Homologie zu argumentieren). Zum Beispiel gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$:

$$\begin{aligned} H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Q}) &\cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2 \cong 0 \\ H_2(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}/2) &\cong_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, H_1(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})) \\ &\cong_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2 \otimes_{\mathbb{Z}} 0 \oplus \mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2) \\ &\cong_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2 \end{aligned}$$

(die letzte Isomorphie folgt aus den Berechnungen in Beispiel B.91).

Außerdem erklärt das universelle Koeffiziententheorem auch auf Ebene der Homologie, warum die Euler-Charakteristik über verschiedene Koeffizienten berechnet werden kann, obwohl die einzelnen Betti-Zahlen durchaus von den Koeffizienten abhängen können: Durch die Tor-Terme werden die entsprechenden Unterschiede in benachbarten Dimensionen ausgeglichen.

3.2. Singuläre Kohomologie aus singulärer Homologie – das universelle Koeffiziententheorem in Kohomologie

Wir zeigen nun wie singuläre Kohomologie mithilfe von Ext-Termen aus singulärer Homologie berechnet werden kann. Analog zum universellen Koeffiziententheorem für Tensorprodukte gibt es das folgende universelle Koeffiziententheorem für Hom-Funktoren:

Satz 3.6 (universelles Koeffiziententheorem für Kohomologie, algebraisch)**.** *Sei R ein Hauptidealring mit Eins, sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ein R-Kettenkomplex, der aus freien R-Moduln besteht. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (in Z und C natürliche) exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathrm{Ext}_R^1\big(H_{n-1}(C), Z\big) & \longrightarrow & H^n\big(\mathrm{Hom}_R(C, Z)\big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R\big(H_n(C), Z\big) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & & & \varphi & \longmapsto & \langle \varphi, \,\cdot\, \rangle \end{array}$$

(die rechte Abbildung ist also das algebraische Kronecker-Produkt). Diese Sequenz besitzt einen in Z natürlichen Spalt; insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen (in Z natürlichen) Isomorphismus

$$H^n\big(\mathrm{Hom}_R(C, Z)\big) \cong_{\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_R\big(H_n(C), Z\big) \oplus \mathrm{Ext}_R^1\big(H_{n-1}(C), Z\big).$$

Beweisskizze. Der Beweis ist analog zum Beweis von Satz 3.1, wobei wir „$Z \otimes_R \cdot$“ durch $\mathrm{Hom}_R(\cdot, Z)$ und entsprechend Tor_1^R durch Ext_R^1 ersetzen. □

Caveat 3.7. Es gibt *keinen* Spalt der obigen kurzen exakten Sequenz, der im gegebenen Kettenkomplex natürlich ist.

Korollar 3.8 (universelles Koeffiziententheorem für singuläre Kohomologie)**.** *Sei (X, A) ein Raumpaar und sei $n \in \mathbb{Z}$.*

1. *Sei R ein Hauptidealring mit Eins und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann gibt es eine (in Z und (X, A) natürliche) exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_R^1\big(H_{n-1}(X, A; R), Z\big) \longrightarrow H^n(X, A; Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R\big(H_n(X, A; R), Z\big) \longrightarrow 0.$$
$$\varphi \longmapsto \langle \varphi, \cdot \rangle$$

   Diese Sequenz spaltet (natürlich in Z, aber nicht natürlich in (X, A)).
2. *Insbesondere gilt: Ist K ein Körper, so ist*

$$\begin{aligned} H^n(X, A; K) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_K\big(H_n(X, A; K), K\big) \\ \varphi &\longmapsto \langle \varphi, \cdot \rangle \end{aligned}$$

   ein K-Isomorphismus.
3. *Ist R ein Ring mit Eins und ist $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, so gibt es eine (in Z und (X, A) natürliche) exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathbb{Z}}^1\big(H_{n-1}(X, A; \mathbb{Z}), Z\big) \longrightarrow H^n(X, A; Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X, A; \mathbb{Z}), Z\big) \longrightarrow 0.$$
$$\varphi \longmapsto \langle \varphi, \cdot \rangle$$

   in ${}_R\mathsf{Mod}$. Diese Sequenz spaltet (natürlich in Z, aber nicht natürlich in (X, A)).
4. *Insbesondere gilt: Ist $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, so ist*

$$\begin{aligned} H^n(X, A; R) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_n(X, A; \mathbb{Z}), R\big) \\ \varphi &\longmapsto \langle \varphi, \cdot \rangle \end{aligned}$$

   ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Der erste bzw. dritte Teil folgen aus dem algebraischen universellen Koeffiziententheorem für Kohomologie, angewendet auf die (gradweise freien!) Kettenkomplexe $C(X, A; R)$ bzw. $C(X, A; \mathbb{Z})$. Der zweite bzw. vierte Teil folgen aus dem ersten bzw. dritten, da die auftretenden Ext-Terme trivial sind (Beispiel B.94). □

Beispiel 3.9 (Kohomologie von reell-projektiven Räumen)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ ist

$$\begin{aligned} H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}) &\cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}\big) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}\big(H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}\big) \\ &\cong_{\mathbb{Z}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \\ &\cong_{\mathbb{Z}} 0 \oplus 0, \\ H^1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2) &\cong_{\mathbb{Z}/2} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_1(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}),\mathbb{Z}\big) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}\big(H_0(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2),\mathbb{Z}\big) \\ &\cong_{\mathbb{Z}/2} \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/2,\mathbb{Z}/2) \oplus \operatorname{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \\ &\cong_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2 \oplus 0. \end{aligned}$$

Allgemeiner gilt:

Korollar 3.10 (Singuläre Kohomologie im Grad 1)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$.*

1. *Dann ist*

$$\begin{aligned} H^1(X;Z) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(H_1(X;\mathbb{Z}),Z\big) \\ \varphi &\longmapsto \langle \varphi, \cdot \rangle \end{aligned}$$

   ein (in Z und X natürlicher) Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.
2. *Insbesondere gilt: Ist (X,x_0) ein wegzusammenhängender punktierter Raum, so ist*

$$\begin{aligned} H^1(X;Z) &\longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}\big(\pi_1(X,x_0)_{\mathrm{ab}},Z\big) \\ \varphi &\longmapsto \big([\gamma]_* \mapsto \langle \varphi, [\text{„}\gamma\text{“}]\rangle\big) \end{aligned}$$

   ein (in Z und (X,x_0) natürlicher) Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus Korollar 3.8 und den Berechnungen in Beispiel B.94, da $H_0(X;\mathbb{Z})$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul ist (Proposition II.3.17). Der zweite Teil folgt mit dem Satz von Hurewicz (Satz II.3.81) aus dem ersten Teil. □

Mit den bisherigen Ergebnissen zur Überlagerungstheorie (Algebraische Topologie I), der obigen Beschreibung von singulärer Kohomologie im Grad 1 und der Berechnung des Kohomologierings von reell-projektiven Räumen erhalten wir einen eleganten und kurzen Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam (Abbildung (3.11)):

Satz 3.12 (Satz von Borsuk-Ulam)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Dann gibt es keine stetige antipodenerhaltende Abbildung $S^n \longrightarrow S^{n-1}$. Dabei heißt eine Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow S^{n-1}$* antipodenerhaltend*, wenn*

$$\forall_{x \in S^n} \quad f(-x) = -f(x).$$

Beweisskizze. Sei ohne Einschränkung $n \geq 2$. *Angenommen,* es gibt eine stetige antipodenerhaltende Abbildung $f\colon S^n \longrightarrow S^{n-1}$. Dann induziert diese Abbildung eine wohldefinierte stetige Abbildung $\overline{f}\colon \mathbb{R}P^n \longrightarrow \mathbb{R}P^{n-1}$. Überlagerungstheorie zeigt, dass die von $\overline{f}$ induzierte Abbildung auf den Fundamentalgruppen nicht trivial ist. Nun führen kohomologische Argumente zu einem Widerspruch. □

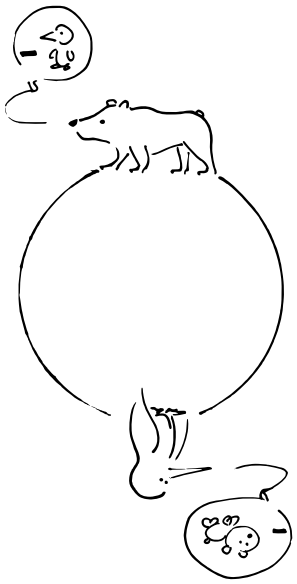


Abbildung (3.11): antipodale Punkte auf S^2

Der Satz von Borsuk-Ulam besitzt zahlreiche Anwendungen, z.B. auch auf Färbungsprobleme in der Kombinatorik[17]

3.3. Singuläre (Ko)Homologie von Produkten – das Künneththeorem

Wir erklären nun wie man singuläre Homologie bzw. Kohomologie von Produkträumen aus der (Ko)Homologie der Faktoren berechnen kann. Wir beginnen mit der algebraischen, homologischen Situation:

Satz 3.13 (Künneththeorem für Homologie, algebraisch)**.** *Sei R ein Hauptidealring mit Eins, sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ein R-Kettenkomplex, der aus freien R-Moduln besteht und sei $D \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (in D und C natürliche) exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(D) \otimes_R H_{n-p}(C) \longrightarrow H_n(D \otimes_R C) \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1^R\big(H_p(D), H_{n-1-p}(C)\big) \longrightarrow 0$$

$$[d] \otimes [c] \longmapsto [d \otimes c]$$

(die linke Abbildung ist also das algebraische Kreuz-Produkt). Diese Sequenz besitzt einen in D natürlichen Spalt; insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen (in D natürli-

[17] J. Matoušek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem*, Lectures on topological methods in combinatorics and geometry. Written in cooperation with Anders Björner and Günter M. Ziegler, *Universitext*, Springer, 2003.

chen) Isomorphismus

$$H_n(D \otimes_R C) \cong_{\mathbb{Z}} \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(D) \otimes_R H_{n-p}(C) \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^R\big(H_p(D), H_{n-1-p}(C)\big).$$

Caveat 3.14. Es gibt *keinen* Spalt der obigen kurzen exakten Sequenz, der in beiden gegebenen Kettenkomplexen gleichzeitig natürlich ist.

Beweisskizze. Dies folgt analog zum Beweis des algebraischen universellen Koeffiziententheorems für Homologie (Satz 3.1), wobei wir „$Z \otimes_R \cdot$“ durch $D \otimes_R \cdot$ ersetzen. □

Korollar 3.15 (Künneththeorem für singuläre Homologie)**.** *Seien $(X, A), (Y, B)$ Raumpaare mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \operatorname{Ob}(\mathsf{Top}^3)$ und sei $n \in \mathbb{Z}$.*

1. *Sei R ein kommutativer Hauptidealring mit Eins. Dann gibt es eine (in R und den Raumpaaren natürliche) exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(X, A; R) \otimes_R H_{n-p}(Y, B; R) \xrightarrow{\cdot\times\cdot} H_n\big((X, A) \times (Y, B)\big) \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \operatorname{Tor}_1^R\big(H_p(X, A; R), H_{n-1-p}(Y, B; R)\big) \longrightarrow 0$$

   Diese Sequenz spaltet (aber nicht *natürlich in beiden Raumpaaren gleichzeitig).*

2. *Ist K ein Körper, so ist das homologische Kreuz-Produkt*

$$\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(X, A; K) \otimes_K H_{n-p}(Y, B; K) \longrightarrow H_n\big((X, A) \times (Y, B); K\big)$$
$$\alpha \otimes \beta \longmapsto \alpha \times \beta$$

   ein K-Isomorphismus.

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus dem algebraischen Künneththeorem für Homologie, zusammen mit den (natürlichen) relativen Eilenberg-Zilber-Morphismen

$$C(X, A; R) \otimes_R C(Y, B; R) \simeq C\big((X, A) \times (Y, B); R\big)$$

(Bemerkung 2.56) und der Konstruktion des homologischen Kreuz-Produkts (Definition 2.64). □

Beispiel 3.16.

- Zum Beispiel kann man mit Korollar 3.15 induktiv $H_*(S^1 \times \cdots \times S^1; \mathbb{Z})$ (zusammen mit den entsprechenden homologischen Kreuz-Produkten) aus $H_*(S^1; \mathbb{Z})$ berechnen.
- Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$, dass

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}}\ & H_0(\mathbb{R}P^n) \otimes_{\mathbb{Z}} H_2(\mathbb{R}P^n) \\ & \oplus H_1(\mathbb{R}P^n) \otimes_{\mathbb{Z}} H_1(\mathbb{R}P^n) \\ & \oplus H_2(\mathbb{R}P^n) \otimes_{\mathbb{Z}} H_0(\mathbb{R}P^n) \\ & \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\big(H_0(\mathbb{R}P^2), H_1(\mathbb{R}P^2)\big) \\ & \oplus \operatorname{Tor}_1^{\mathbb{Z}}\big(H_1(\mathbb{R}P^2), H_0(\mathbb{R}P^2)\big) \\ \cong_{\mathbb{Z}}\ & 0 \oplus \mathbb{Z}/2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0. \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt leiten wir aus dem algebraischen Künnetheorem für Homologie eine entsprechende kohomologische Version für duale Komplexe her:

Satz 3.17 (Künnetheorem für Kohomologie, algebraisch)**.** *Sei R ein kommutativer Hauptidealring mit Eins, sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ ein R-Kettenkomplex, der aus freien R-Moduln besteht und sei $D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Außerdem sei $H_n(C)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ über R endlich erzeugt. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (in D und C natürliche) exakte Sequenz*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(D') \otimes_R H^{n-p}(C') & \xrightarrow{\cdot\times\cdot} & H^n(D' \otimes_R C') & \longrightarrow & \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1^R\big(H^p(D'), H^{n+1-p}(C')\big) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow\cong & & & & \\ & & & & H^n\big(\mathrm{Hom}_R(C \otimes_R D, R)\big) & & & & \end{array}$$

(die linke Abbildung ist das algebraische Kreuz-Produkt). Dabei schreiben wir $C' := \mathrm{Hom}_R(C, R)$ und $D' := \mathrm{Hom}_R(D, R)$ Diese Sequenz besitzt einen in D natürlichen Spalt; insbesondere gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen (in D natürlichen) Isomorphismus

$$\begin{aligned} H^n\big(\mathrm{Hom}_R(D \otimes_R C, R)\big) \cong_R & \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(D') \otimes_R H^{n-p}(C') \\ & \oplus \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1^R\big(H^p(D'), H^{n+1-p}(C')\big). \end{aligned}$$

Caveat 3.18. Es gibt *keinen* Spalt der obigen kurzen exakten Sequenz, der in beiden gegebenen Kettenkomplexen gleichzeitig natürlich ist.

Beweisskizze. Wir beginnen mit einem Trick aus der homologischen Algebra: Da C aus freien R-Moduln besteht und $H_n(C)$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ über R endlich erzeugt ist, gibt es einen Kettenkomplex $\widetilde{C} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ mit $\widetilde{C} \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C$, der aus *endlich erzeugten* freien R-Moduln besteht. Insbesondere gilt dann auch $\mathrm{Hom}_R(C, R) \simeq_{{}_R\mathsf{CoCh}} \mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, R)$ etc.. Es genügt also, die Behauptung für $\widetilde{C}$ statt C zu zeigen.

Da $\widetilde{C}$ aus endlich erzeugten freien R-Moduln besteht, besteht auch $\mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, R)$ aus (endlich erzeugten) freien R-Moduln. Wir wenden nun das algebraische Künnetheorem (Satz 3.13) für Homologie auf $\mathrm{Hom}_R(\widetilde{C}, R)$ und $\mathrm{Hom}_R(D, R)$ an (Beispiel B.43). □

Insbesondere erhalten wir auch die korrespondierende Version für singuläre Kohomologie:

Korollar 3.19 (Künnetheorem für singuläre Kohomologie)**.** *Seien $(X, A), (Y, B)$ Raumpaare mit $(X \times Y, A \times Y, X \times B) \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Top}^3)$, sei R ein kommutativer Hauptidealring mit Eins und für alle $n \in \mathbb{Z}$ sei $H_n(Y, B; R)$ über R endlich erzeugt. Sei außerdem $n \in \mathbb{Z}$.*

1. Dann gibt es eine (in (X, A) und (Y, B) natürliche) exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(X, A; R) \otimes_R H^{n-p}(Y, B; R) \xrightarrow{\cdot\times\cdot} H^n\big((X, A) \times (Y, B); R\big) \longrightarrow \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1^R\big(H^p(X, A; R), H^{n+1-p}(Y, B; R)\big) \longrightarrow 0$$

Die linke Abbildung ist dabei das kohomologische Kreuz-Produkt. Die Sequenz spaltet (natürlich in (X, A), aber nicht natürlich in (Y, B)).

2. *Ist $K = R$ ein Körper, so ist das kohomologische Kreuz-Produkt*

$$\bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H^p(X, A; K) \otimes_K H^{n-p}(Y, B; K) \longrightarrow H^n\big((X, A) \times (Y, B); K\big)$$
$$\varphi \otimes \psi \longmapsto \varphi \times \psi$$

ein K-Isomorphismus. Insbesondere induziert das kohomologische Kreuz-Produkt einen Isomorphismus

$$H^*(X, A; K) \otimes_K H^*(Y, B; K) \cong_{K\,\mathsf{GradAlg}} H^*\big((X, A) \times (Y, B); K\big)$$

graduierter K-Algebren.[18]

Beweisskizze. Der erste Teil folgt, indem wir das algebraische Künneththeorem für Kohomologie auf den singulären Kettenkomplex $C(\,\cdot\,; R)$ anwenden, dem Satz von Eilenberg-Zilber (Bemerkung 2.56), und dem Zusammenhang zwischen Diagonalapproximationen bzw. Eilenberg-Zilber-Morphismen und dem kohomologischen Kreuz-Produkt bzw. Cup-Produkt (Korollar 2.51, Beispiel 2.53).

Der zweite Teil folgt aus dem ersten, da die entsprechenden Tor-Terme trivial sind (Beispiel B.91), der Natürlichkeit des Cup-Produkts und dem Zusammenhang zwischen dem Cup-Produkt und dem kohomologischen Kreuz-Produkt (Proposition 2.12). □

Caveat 3.20. Bereits diskrete Räume und singuläre Kohomologie im Grad 0 zeigen, dass die Endlichkeitsvoraussetzung an die Kohomologie eines der beiden Faktoren nicht einfach fallengelassen werden kann.

Beispiel 3.21. Seien $n, m \in \mathbb{N}_{>1}$. Zusammen mit Satz 2.23 und 2.24 erhalten wir die folgenden Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P^n \times \mathbb{R}P^m; \mathbb{Z}/2) &\cong \mathbb{Z}/2[x]/(x^{n+1}) \otimes_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/2[y]/(y^{m+1}) && \text{mit } |x| = 1 = |y| \\ &\cong \mathbb{Z}/2[x, y]/(x^{n+1}, y^{m+1}) \\ H^*(\mathbb{C}P^n \times \mathbb{C}P^m; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[x]/(x^{n+1}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[y]/(y^{m+1}) && \text{mit } |x| = 2 = |y| \\ &\cong \mathbb{Z}[x, y]/(x^{n+1}, y^{m+1}) \end{aligned}$$

von graduierten Algebren. Im Fall komplex-projektiver Räume gilt dies auch über $\mathbb{Z}$, da die entsprechenden Tor-Terme trivial sind (alle Kohomologiemoduln von $\mathbb{C}P^n$ bzw. $\mathbb{C}P^m$ sind frei).

[18] Sind A und B graduierte K-Algebren, so definieren wir die graduierte K-Algebra $A \otimes_K B$ durch

$$(A \otimes_K B)^n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p \otimes_K B^{n-p}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und durch die durch

$$\forall_{a,a'\in A}\ \ \forall_{b,b'\in B}\quad (a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') := (-1)^{|a'|\cdot|b|} \cdot (a \cdot a') \otimes (b \cdot b')$$

gegebene Multiplikation.

Insbesondere erhalten wir:

Satz 3.22 (Eingrenzen der Dimensionen reeller Divisionsalgebren)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Falls $\mathbb{R}^n$ die Struktur einer reellen Divisionsalgebra zulässt, ist n eine Potenz von 2.*

Beweisskizze. Dies folgt ähnlich zum Beweis des Satzes von Borsuk-Ulam (Satz 3.12) mithilfe des Kohomologierings $H^*(\mathbb{R}P^{n-1} \times \mathbb{R}P^{n-1}; \mathbb{Z}/2)$. □

3.4. Singuläre Kohomologie von aufsteigenden Vereinigungen – die $\lim^1$-Sequenz

Als letztes universelles Koeffiziententheorem betrachten wir die Frage, wie man singuläre Kohomologie von aufsteigenden Vereinigungen aus der Kohomologie der einzelnen Räume berechnen kann. Auch diese Situation kann wie das algebraische universelle Koeffiziententheorem für Homologie modelliert werden – mit der technischen Schwierigkeit, dass die betrachteten Funktoren nicht direkt auf einer Modulkategorie agieren. Man kann nun den Formalismus abgeleiteter Funktoren auf abelschen Kategorien einsetzen oder die nötigen Terme ad-hoc definieren und studieren. Wir werden uns hier mit letzterer Variante begnügen.

Satz 3.23 ($\lim^1$-Sequenz für Kohomologie, algebraisch)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei $C := (C(k), r(k))_{k\in\mathbb{N}}$ ein inverses System in ${}_R\mathsf{CoCh}$ und für jedes $n \in \mathbb{Z}$ erfülle $(C^n(k), r^n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ die Mittag-Leffler-Bedingung. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1_{\substack{R\\k\in\mathbb{N}}} H^{n-1}(C(k)) \longrightarrow H^n(\varprojlim{}^1_R C) \longrightarrow \varprojlim_{k\in\mathbb{N}} H^n(C(k)) \longrightarrow 0$$

wobei das inverse System in Kohomologie von den Strukturabbildungen von C induziert wird und die rechte Abbildung die kanonische Abbildung in den inversen Limes ist.

Wir erklären kurz die auftretenden Begriffe und Hilfsmittel; hierbei ist $\varprojlim^1_R$ eine ad-hoc Variante des abgeleiteten Funktors des inversen Limes und die Mittag-Leffler-Bedingung stellt das Verschwinden hinreichend vieler $\varprojlim^1_R$-Terme sicher (analog zur Freiheits-Voraussetzung im universellen Koeffiziententheorem).

Definition 3.24 ($\lim^1$)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Zu einem inversen System $A := (A^k, r^k\colon A^k \longrightarrow A^{k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ (wobei wir kurz $A^{-1} := 0$ schreiben) definiert man

$$\varprojlim{}^1_R A := \operatorname{coker} \begin{pmatrix} \prod_{k\in\mathbb{N}} A^k & \to & \prod_{k\in\mathbb{N}} A^k \\ x & \mapsto & (x_k - r^{k+1}(x_{k+1}))_{k\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 3.25 (kurze exakte $\lim^1$-Sequenz)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Sei

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz von inversen Systemen in ${}_R\mathsf{Mod}$, d.h. f und g sind Folgen von Homomorphismen, die mit den Strukturabbildungen von A und B verträglich sind, und für jedes $k \in \mathbb{N}$ ist die zugehörige Sequenz

$$0 \longrightarrow A^k \xrightarrow{f^k} B^k \xrightarrow{g^k} C^k \longrightarrow 0$$

exakt in ${}_R\mathsf{Mod}$. Dann zeigt eine passende lange exakte Homologiesequenz, dass es eine natürliche exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ der folgenden Form gibt:

$$0 \longrightarrow \varprojlim A \xrightarrow{\varprojlim f} \varprojlim B \xrightarrow{\varprojlim g} \varprojlim C \longrightarrow \varprojlim{}^1_R A \xrightarrow{\varprojlim^1_R f} \varprojlim{}^1_R B \xrightarrow{\varprojlim^1_R g} \varprojlim{}^1_R C \longrightarrow 0$$

Bemerkung 3.26 (Mittag-Leffler-Bedingung)**.** Sei R ein Ring mit Eins. Ein inverses System A in ${}_R\mathsf{Mod}$ erfüllt die *Mittag-Leffler-Bedingung*, wenn folgendes gilt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}_{\geq k}$, so dass für alle $m \in \mathbb{N}_{\geq K}$ die Gleichheit

$$\operatorname{im}(f^{k+1} \circ \cdots \circ f^m \colon A^m \to A^k) = \operatorname{im}(f^{k+1} \circ \cdots \circ f^K \colon A^K \to A^k)$$

gilt.

Eine Rechnung zeigt: Erfüllt ein inverses System A in ${}_R\mathsf{Mod}$ die Mittag-Leffler-Bedingung, so ist $\varprojlim^1_R A \cong 0$.

Beweisskizze (von Satz 3.23). Wir verfahren nach demselben Beweismuster wie im algebraischen universellen Koeffiziententheorem für Homologie (Satz 3.1). □

Aus der $\lim^1$-Sequenz erhalten wir die folgende topologische Version:

Korollar 3.27 (singuläre Kohomologie aufsteigender Vereinigungen)**.** *Sei X ein topologischer Raum und sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge von Unterräumen mit $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$ und der folgenden Eigenschaft: Zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset X$ gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $K \subset X_k$. Sei außerdem $Z \in \operatorname{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine (in X und Z) natürliche exakte Sequenz*

$$0 \longrightarrow \varprojlim{}^1_{\substack{\longleftarrow \\ k\in\mathbb{N}}} H^{n-1}(X_k; Z) \longrightarrow H^n(X; Z) \longrightarrow \varprojlim_{\substack{\longleftarrow \\ k\in\mathbb{N}}} H^n(X_k; Z) \longrightarrow 0,$$

wobei das inverse System bzw. die rechte Abbildung von den Inklusionen $(X_k \hookrightarrow X_{k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ bzw. $(X_k \hookrightarrow X)_{k\in\mathbb{N}}$ induziert wird.

Beweisskizze. Dies folgt, indem wir Satz 3.23 auf die entsprechenden singuläre Kokettenkomplexe anwenden. Die Voraussetzungen an die Folge der Unterräume stellt sicher, dass diese Komplexe gradweise die Mittag-Leffler-Bedingung erfüllen. □

Mit diesem Hilfsmittel sehen wir insbesondere, dass wir singuläre Kohomologie von allgemeinen CW-Komplexen durch den zugehörigen zelluläre Kokettenkomplex berechnen können:

Korollar 3.28 (singuläre Kohomologie via zelluläre Kohomologie)**.** *Sei X ein CW-Komplex und sei R ein Ring mit Eins. Dann gibt es für alle $n \in \mathbb{Z}$ einen (in R und in zellulären Abbildungen natürlichen) Isomorphismus*

$$H^n(X;R) \cong_R H^n_{H^*(\,\cdot\,;R)}(X).$$

Beweisskizze. Da $H^*(\,\cdot\,;R)$ additiv ist, ist leicht zu sehen, dass Satz 1.23 im Fall von $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{R})$ auch für endlich-dimensionale CW-Komplexe gilt.

Man wendet nun Korollar 3.27 auf die Filtrierung von X durch die Skelette und Satz 3.23 auf die entsprechende Situation für zelluläre Kokettenkomplexe an. Ein Vergleich der entsprechenden exakten Sequenzen und die Tatsache, dass singuläre und zelluläre Kohomologie für die (endlich-dimensionalen!) Skelette übereinstimmen, liefert nun mithilfe des Fünfer-Lemmas (Proposition B.6) die Behauptung. □

Beispiel 3.29 (Kohomologieringe unendlich-dimensionaler projektiver Räume)**.** Mit Korollar 3.28 (für den additiven Isomorphismus) und Korollar 3.27 (für die multiplikative Struktur) erhalten wir die folgenden Isomorphismen graduierter Algebren:

$$\begin{aligned} H^*(\mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) &\cong \mathbb{Z}/2[x] && \text{mit } |x| = 1 \\ H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2) &\cong \mathbb{Z}/2[x,y] && \text{mit } |x| = 1 = |y| \\ H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[x] && \text{mit } |x| = 2 \\ H^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}[x,y] && \text{mit } |x| = 2 = |y| \end{aligned}$$

Zum Beispiel zeigt diese Berechnung von $H^*(\mathbb{R}P^\infty \times \mathbb{R}P^\infty;\mathbb{Z}/2)$, dass $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ *nicht* frei auf einer Sphäre operieren kann.

Allgemeiner gilt:

Bemerkung 3.30 (Kohomologie der Grassmannschen und charakteristische Klassen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen die unendlich-dimensionalen reellen bzw. komplexen Grassmannschen von n-dimensionalen Unterräumen mit $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ bzw. $G_n(\mathbb{C}^\infty)$. Man kann nun (z.B. mithilfe einer geeigneten CW-Struktur und Zusatzinformationen über Vektorbündel) zeigen, dass es Isomorphismen

$$\begin{aligned} H^*\big(G_n(\mathbb{R}^\infty);\mathbb{Z}/2\big) &\cong \mathbb{Z}/2[w_1,\ldots,w_n] && \text{mit } |w_j| = j \\ H^*\big(G_n(\mathbb{C}^\infty);\mathbb{Z}\big) &\cong \mathbb{Z}[c_1,\ldots,c_n] && \text{mit } |c_j| = 2 \cdot j \end{aligned}$$

graduierter Algebren gibt.

Da diese Grassmannschen klassifizierende Räume für n-dimensionale reelle bzw. komplexe Vektorbündel sind, erhalten wir mit der auf Seite 7 beschriebenen Methode charakteristische Klassen für reelle bzw. komplexe Vektorbündel. Im reellen Fall liefert dies die sogenannten *Stiefel-Whitney-Klassen*, im komplexen Fall die sogenannten *Chern-Klassen*.

Zum Abschluss skizzieren wir wie die Kohomologie von $\mathbb{C}P^\infty$ eine interessante Brücke zwischen Algebra bzw. algebraischer Geometrie und algebraischer Topologie baut:

Bemerkung 3.31 (Kohomologietheorien und formale Gruppengesetze)**.** Sei h eine additive Kohomologietheorie auf Top^2, die eine multiplikative Struktur trägt. Eine *komplexe Orientierung von h* ist eine Klasse $u \in \widetilde{h}^2(\mathbb{C}P^\infty)$, die unter der Komposition

$$\widetilde{h}^2(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow \widetilde{h}^2(\mathbb{C}P^1) = \widetilde{h}^2(S^2) \xleftarrow{\cong} h^0(\bullet)$$

auf das Einselement des Rings $h^0(\bullet)$ abgebildet wird; dabei ist der linke Homomorphismus von der Inklusion $\mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ induziert und der rechte Isomorphismus ist der Einhängungsisomorphismus.

Man kann nun mithilfe der Atiyah-Hirzebruch-Spektralsequenz (Satz 1.28) zeigen, dass

$$\begin{array}{rcll} h^*(\mathbb{C}P^n) & \longleftarrow & E[x]/(x^{n+1}) & \text{mit } |x| = 2 \\ u & \longmapsto & x & \end{array}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus graduierter Algebren ist; dabei schreiben wir E für den graduierten Ring $h^*(\bullet)$. Mithilfe einer geeigneten $\lim^1$-Sequenz für allgemeine additive Kohomologietheorien und einem entsprechenden Künnetheorem erhalten wir daraus entsprechende Isomorphismen

$$\begin{aligned} h^*(\mathbb{C}P^\infty) &\cong E[\![x]\!]_h \\ h^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) &\cong E[\![x, y]\!]_h \end{aligned}$$

graduierter Algebren.[19]

Es gibt eine kanonische, interessante stetige Abbildung $m\colon \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$ (die zum Beispiel durch komplexe Geradenbündel beschrieben werden kann). Man kann dann zeigen, dass die formale Potenzreihe

$$F_h := h^2(m)(u) \in h^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong E[\![x, y]\!]_h$$

ein sogenanntes formales Gruppengesetz ist. Dies kann zum Beispiel (mithilfe eines geeigneten Spaltungsprinzips für komplexe Vektorbündel bzgl. h) genutzt werden, um h-wertige charakteristische Klassen für komplexe Vektorraumbündel zu konstruieren.

Zum Beispiel gilt:

- Reelle topologische K-Theorie KO besitzt *keine* komplexe Orientierung.
- Singuläre Kohomologie $H^*(\,\cdot\,;\mathbb{Z})$ mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten besitzt eine komplexe Orientierung (dies zeigt unsere Berechnung von $H^*(\mathbb{C}P^\infty;\mathbb{Z})$); das zugehörige formale Gruppengesetz ist das sogenannte *additive formale Gruppengesetz* „$x + y$.“
- Komplexe topologische K-Theorie KU besitzt eine komplexe Orientierung; das formale Gruppengesetz ist das *multiplikative formale Gruppengesetz* „$x{+}y{+}x{\cdot}y$.“

[19] Für einen graduierten Ring A bezeichnet $A[\![x]\!]_h$ den *graduierten homogenen formalen Potenzreihenring*: Ist $n \in \mathbb{Z}$, so ist

$$A[\![x]\!]_h^n = \Big\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \cdot x^j \;\Big|\; \forall_{j\in\mathbb{N}} \quad |a_j| + |x| \cdot j = n \Big\}.$$

Die Multiplikation ist wie üblich durch Ausmultiplizieren der Potenzreihen gegeben.

– Komplexer Kobordismus MU besitzt eine komplexe Orientierung; das zugehörige formale Gruppengesetz ist das sogenannte *universelle formale Gruppengesetz* über dem Lazard-Ring.

Umgekehrt liefert das *Landweber exact functor theorem* ein hinreichendes Kriterium dafür, wann ein formales Gruppengesetz zu einer Kohomologietheorie führt. Zum Beispiel erhält man aus elliptischen Kurven formale Gruppengesetze und daraus entsprechend die sogenannten *elliptischen Kohomologietheorien*.

4. (Ko)Homologie von Mannigfaltigkeiten

Wir werden nun die Geometrie und Topologie von Mannigfaltigkeiten mithilfe von singulärer (Ko)Homologie studieren. Insbesondere betrachten wir die folgenden Fragestellungen:

- Wie kann man Orientierbarkeit von Mannigfaltigkeiten mithilfe von singulärer (Ko)Homologie formulieren?
- Welche Konsequenzen hat dies für die (Ko)Homologie von Mannigfaltigkeiten? Welche Dualitätseigenschaften ergeben sich dadurch?
- Wie kann man (Ko)Homologietheorien auf der Kategorie der Mannigfaltigkeiten vergleichen? Was hat Kohomologie mit Integration zu tun?

In all diesen Fällen spielen geeignete Induktionsprinzipien für Mannigfaltigkeiten eine Schlüsselrolle.

4.1. Topologische Mannigfaltigkeiten

Wir beginnen mit einer kurzen Wiederholung der Grundbegriffe, geben Standardbeispiele für Mannigfaltigkeiten und beschreiben dann Induktionsprinzipien für Mannigfaltigkeiten. Im wesentlichen werden wir uns im folgenden mit topologischen Mannigfaltigkeiten beschäftigen:

Definition 4.1 (topologische Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine *n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit* ist ein topologischer Raum M mit folgenden Eigenschaften (Abbildung (4.2)):

- der topologische Raum M ist lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, d.h. für alle $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von x mit

$$U \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n,$$

- der topologische Raum M ist hausdorffsch,
- der topologische Raum M erfüllt das zweite Abzählbarkeitsaxiom (d.h. er besitzt eine abzählbare Basis der Topologie).

Wir schreiben Mfd_n für die Kategorie der n-dimensionalen topologischen Mannigfaltigkeiten (mit stetigen Abbildungen als Morphismen) und $\mathsf{Mfd}_n^{\neq\emptyset}$ für die Kategorie der nicht-leeren Mannigfaltigkeiten in Mfd_n.

Wir betrachten nur topologische Mannigfaltigkeiten wie in der obigen Definition, d.h. Mannigfaltigkeiten ohne Rand. Kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand bezeichnet man auch als *geschlossene* Mannigfaltigkeiten.

Bemerkung 4.3 (Wohldefiniertheit der Dimension)**.** Nach dem Satz über die Invarianz der Dimension (Korollar II.2.19) besitzt jede nicht-leere topologische Mannigfaltigkeit nur genau eine Dimension.

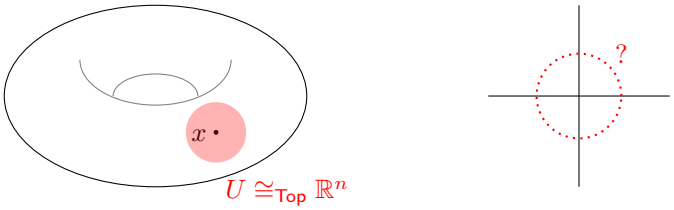


Abbildung (4.2): Topologische Mannigfaltigkeiten sehen lokal wie $\mathbb{R}^n$ aus; das Beispiel rechts ist daher *keine* topologische Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 4.4 (Mannigfaltigkeiten und CW-Strukturen)**.** Wir werden hin und wieder die folgenden Fakten über topologische Mannigfaltigkeiten Mannigfaltigkeiten verwenden:[20]

- Jede topologische Mannigfaltigkeit ist zu einem abzählbaren CW-Komplex homotopieäquivalent.
- Jede kompakte topologische Mannigfaltigkeit M wird von einem endlichen CW-Komplex dominiert, d.h. es gibt einen endlichen CW-Komplex X und stetige Abbildungen $i\colon M \longrightarrow X$, $r\colon X \longrightarrow M$ mit

$$r \circ i \simeq_{\mathsf{Top}} \mathrm{id}_M \,.$$

  Insbesondere folgt daraus, dass für jeden Ring R mit Eins und jedes $n \in \mathbb{Z}$ der Homologiemodul $H_n(M;R)$ über R endlich erzeugt ist und dass die Fundmantalgruppe $\pi_1(M,x)$ für jedes $x \in M$ endlich erzeugt ist.

Beispiel 4.5 (topologische Mannigfaltigkeiten)**.**

- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\emptyset$ eine topologische n-Mannigfaltigkeit.
- Ein diskreter topologischer Raum ist genau dann eine topologische Mannigfaltigkeit (der Dimension 0), wenn er höchstens abzählbar ist.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ (bzw. alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$) und die Sphäre S^n topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind die projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ bzw. $\mathbb{C}P^n$ topologische Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. $2 \cdot n$.
- Sind $n, m \in \mathbb{N}$, so sind die Grassmannschen $G_n(\mathbb{R}^m)$ bzw. $G_n(\mathbb{C}^m)$ topologische Mannigfaltigkeiten.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ sind $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ etc. bezüglich der Standardtopologien auf Matrizen topologische Mannigfaltigkeiten.
- Sind M und N topologische Mannigfaltigkeiten, so ist $M \times N$ bzgl. der Produkttopologie eine topologische Mannigfaltigkeit mit $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$. Insbesondere sind Tori topologische Mannigfaltigkeiten.
- Ist M eine topologische Mannigfaltigkeit und ist $N \longrightarrow M$ eine abzählbare Überlagerung, so ist auch N eine topologische Mannigfaltigkeit.

[20] J.W. Milnor. On Spaces Having the Homotopy Type of a CW-Complex. *Transactions of the American Mathematical Society*, 90(2), S. 272–280, 1959.

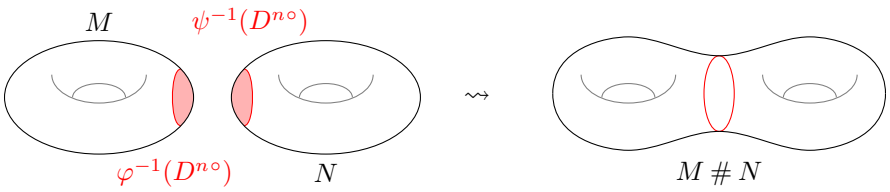


Abbildung (4.6): Konstruktion der zusammenhängenden Summe

Abbildung (4.7): Die Kleinsche Flasche

- Totalräume von Faserbündeln, deren Faser und Basisraum topologische Mannigfaltigkeiten sind, sind topologische Mannigfaltigkeiten; z.B. ist das (offene) Möbiusband eine topologische Mannigfaltigkeit.
- Seien M und N (nicht-leere) topologische Mannigfaltigkeiten derselben Dimension n. Die *zusammenhängende Summe $M \# N$ von M und N* wird wie folgt definiert (Abbildung (4.6)): Seien $x \in M$ und $y \in N$ und seien $U \subset M$ bzw. $V \subset N$ offene Umgebungen von x bzw. y in N mit Homöomorphismen $\varphi\colon U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ bzw. $\psi\colon V \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Man setzt nun:

$$M \# N := \big((M \setminus \varphi^{-1}(D^{n\circ}) \sqcup (N \setminus \psi^{-1}(D^{n\circ})\big) \,/\, (\forall_{x \in S^{n-1}} \quad \varphi(x) \sim \psi(x)).$$

  Man kann zeigen, dass $M \# N$ eine topologische n-Mannigfaltigkeit ist und dass diese Konstruktion tatsächlich (bis auf Homöomorphie) von den gewählten Punkten und den gewählten Umgebungen unabhängig ist.
- Die *Kleinsche Flasche* $K := [0,1] \times [0,1] \,/\!\sim$, wobei die Äquivalenzrelation „$\sim$“ die Verklebung in Abbildung (4.7) modelliert, ist eine 2-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.
- Allgemeiner erhält man alle kompakten Flächen durch geeignete Verklebungen regulärer Polygone (Abbildung (4.8)).

Caveat 4.9. Es gibt kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die *keine* glatte Struktur zulassen und es gibt sogar kompakte topologische Mannigfaltigkeiten, die *nicht* triangulierbar sind.

Bemerkung 4.10 (Unberechenbarkeit der Klassifikation)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 4}$. Man kann beweisen, dass man trianguliert kompakte topologische n-Mannigfaltigkeiten *nicht*

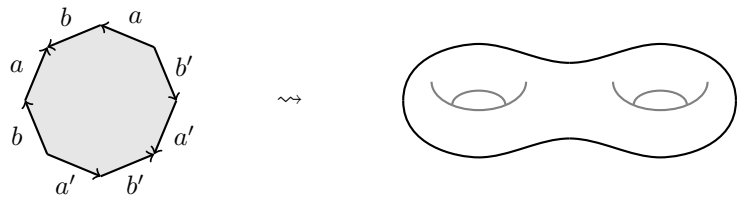


Abbildung (4.8): orientierte, geschlossene, zusammenhängende Fläche mit „zwei Henkeln“ aus einem Achteck

algorithmisch bis auf Homöomorphie oder bis auf Homotopieäquivalenz klassifizieren kann, indem man Klassifikationsprobleme dieser Art mit dem Wortproblem in der Gruppentheorie (und damit mit dem Halteproblem für Turingmaschinen) in Verbindung setzt.

Ein zentrales Hilfsmittel, um Aussagen über alle Mannigfaltigkeiten einer gegebenen Dimension zu beweisen, sind Induktionsprinzipien, die jeweils nur aus Mannigfaltigkeitsbausteinen bestehen (im Gegensatz zu z.B. CW-Zerlegungen). Ein Beispiel dafür ist:

Satz 4.11 (Induktionsprinzip für Mannigfaltigkeiten und kompakte Teilräume)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei P eine Klasse von Paaren der Form (M, K), wobei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n)$ und $K \subset M$ kompakt ist. Die Klasse P besitze die folgenden Eigenschaften:*

1. *Es ist $(\emptyset, \emptyset) \in P$.*
2. *Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, so ist $(\mathbb{R}^n, K) \in P$.*
3. *Ist $(M, K) \in P$, ist $N \in \mathsf{Mfd}_n$ und ist $f\colon M \longrightarrow N$ ein Homöomorphismus, so ist auch $(N, f(K)) \in P$.*
4. *Ist $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n)$, ist $U \subset M$ offen und $K \subset U$ kompakt mit $(U, K) \in P$, so ist auch $(M, K) \in P$.*
5. *Für alle $(M, K_1), (M, K_2) \in P$ mit $(M, K_1 \cap K_2) \in P$ ist auch $(M, K_1 \cup K_2) \in P$.*
6. *Sind $(M, K_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset P$ und $K := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} K_j$ mit den Eigenschaften (siehe Abbildung (4.12))*
   - *Für alle $j \in \mathbb{N}$ ist $K_{j+1} \subset K_j^\circ$*
   - *Für alle $j \in \mathbb{N}$ und alle $x \in K_j$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von x mit*
   $$U \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad U \cap K \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \subset K_{j-1}^\circ.$$

   so folgt $(M, K) \subset P$.

Dann ist

$$P = \big\{(M, K) \;\big|\; M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n),\ K \subset M \text{ kompakt}\big\}.$$

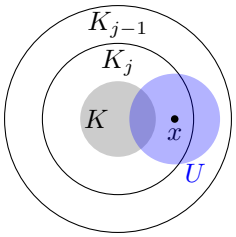


Abbildung (4.12): Approximation von kompakten Teilmengen von außen

Beweisskizze.

a Aus 1. und 4. folgt per Induktion: Ist $m \in \mathbb{N}$ und sind $K_1, \dots, K_m \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex, so ist
$$(\mathbb{R}^n, K_1 \cup \dots \cup K_m) \in P,$$
denn $(K_1 \cup \dots \cup K_{m-1}) \cap K_m = (K_1 \cap K_m) \cup \dots \cup (K_{m-1} \cap K_m)$ und Schnitte kompakter konvexer Mengen sind kompakt und konvex.

b Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, so ist $(\mathbb{R}^n, K) \in P$, denn man kann ohne Schwierigkeiten eine Folge $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen mit den Eigenschaften aus a. und mit $K = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} K_j$ konstruieren, die die Bedingungen aus 4. erfüllt (z.B. als Vereinigungen kleiner abgeschlossener Bälle um endlich viele Punkte aus K).

c Ist $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n)$ und ist $K \subset M$ kompakt mit der Eigenschaft, dass es eine offene Teilmenge $U \subset M$ mit $U \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n$ und $K \subset U$ gibt, so ist $(U, K) \in P$ (nach b.), und somit $(M, K) \in P$ (nach 3.).

d Ist $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n)$ und ist $K \subset M$ kompakt, so existiert ein $m \in \mathbb{N}$ und $K_1, \dots, K_m$ wie in c. mit $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$. Analog zu a. folgt mit c. und 4. induktiv, dass $(M, K) \in P$. □

Weitere Beispiele werden wir im Beweis von Poincaré-Dualität und beim Vergleich von Theorien auf glatten Mannigfaltigkeiten mit singulärer (Ko)Homologie kennenlernen.

4.2. Orientierbarkeit und Fundamentalklassen

Wir führen nun mithilfe von singulärer Homologie einen Orientierbarkeitsbegriff für Mannigfaltigkeiten ein. Grob gesagt ist eine Mannigfaltigkeit orientierbar, wenn man lokal (wo die Mannigfaltigkeit aussieht wie $\mathbb{R}^n$) Orientierungen von $\mathbb{R}^n$ wählen kann, die „stetig“ zusammenpassen (Abbildung (4.13)). Eine präzise Formulierung dieser Vorstellung erhält man zum Beispiel über singuläre Homologie:

Definition 4.14 (Orientierung einer topologischen Mannigfaltigkeit)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$, sei M eine topologische n-Mannigfaltigkeit und sei R ein Ring mit Eins.

– Eine *R-Orientierung von M* ist eine Familie $\big(\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)\big)_{x\in M}$ mit folgenden Eigenschaften:

orientierbar *nicht* orientierbar

Abbildung (4.13): (Nicht-)Orientierbarkeit, anschaulich

- Für alle $x \in M$ ist

$$\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R) \cong_R H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) \cong_R R$$

  eine Einheit.
- Zu jedem $x \in M$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von x und eine Homologieklase $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; R)$ mit: Für alle $y \in U$ gilt

$$H_d(i_y^U; R)(\mu_U) = \mu_y,$$

  wobei $i_y^U \colon (M, M \setminus U) \longrightarrow (M, M \setminus \{y\})$ die Inklusion ist.

- Die Mannigfaltigkeit M heißt *R-orientierbar*, wenn es eine R-Orientierung auf M gibt.
- Die Mannigfaltigkeit M heißt *orientierbar*, wenn sie $\mathbb{Z}$-orientierbar ist.

Eine *orientierte Mannigfaltigkeit* ist eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer $\mathbb{Z}$-Orientierung.

Bemerkung 4.15 (Orientierbarkeit glatter Mannigfaltigkeiten)**.** Man kann zeigen, dass eine glatte Mannigfaltigkeit genau dann im Sinne der Differentialtopologie (d.h. definiert über das Tangentialbündel) orientierbar ist, wenn sie im Sinne von Definition 4.14 orientierbar ist.

Beispiel 4.16. Ist R ein Ring mit Eins, so ist jede topologische 0-Mannigfaltigkeit offenbar R-orientierbar.

Proposition 4.17 (Orientierbarkeit bzgl. verschiedener Koeffizienten)**.** *Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.*

1. *Dann gibt es genau eine $\mathbb{Z}/2$-Orientierung auf M.*
2. *Sei R ein Ring mit Eins. Ist M orientierbar, so ist M auch R-orientierbar.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt im wesentlichen daraus, dass es in $\mathbb{Z}/2$ genau eine Einheit gibt.

Der zweite Teil folgt, da die lokalen Koeffizientenwechselabbildungen Einheiten auf Einheiten abbilden und diese Abbildungen natürlich sind. □

Proposition 4.18 (Orientierbarkeit von $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei R ein Ring mit Eins.*

1. *Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$ und $K := r \cdot D^n := \{r \cdot x \mid x \in D^n\}$. Ist $k \in \mathbb{Z}$ und $x \in K^\circ$, so sind die von den Inklusionen induzierten Abbildungen*

$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; R) \longrightarrow H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$$
$$H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K^\circ; R) \longrightarrow H_k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$$

   Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$.
2. *Insbesondere ist $\mathbb{R}^n$ eine R-orientierbare topologische n-Mannigfaltigkeit. Ist $x \in \mathbb{R}^n$, so ist eine R-Orientierung μ auf $\mathbb{R}^n$ bereits durch $\mu_x \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}; R)$ eindeutig bestimmt.*
3. *Insbesondere liefert die homologischer Orientierung $\varepsilon(n)$ aus Proposition 2.62 eine R-Orientierung auf $\mathbb{R}^n$.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus der verallgemeinerten Homotopieinvarianz von singulärer Homologie (Proposition II.2.5) und dem folgenden kommutativen Diagramm von Inklusionen:

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K^\circ) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{x\}) \\ & \nwarrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & (2 \cdot r \cdot D^n, 2 \cdot r \cdot S^{n-1}) & & \end{array}$$

Der zweite Teil folgt aus dem ersten Teil (da Translationen auf $\mathbb{R}^n$ Homöomorphismen sind). Der dritte Teil folgt aus dem zweiten Teil. □

Wir werden nun die lokalen Klassen einer Orientierung zu einer globalen Homologieklasse (einer sogenannten Fundamentalklasse) verkleben. Als ersten Schritt zeigen wir, dass eine solche Verklebung – wenn sie denn existiert – eindeutig ist:

Proposition 4.19 (Eindeutigkeit von Fundamentalklassen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei R ein Ring mit Eins, sei M eine topologische n-Mannigfaltigkeit und sei $K \subset M$ kompakt.*

1. *Dann gilt:*
   a) *Für alle $k \in \mathbb{N}_{>n}$ ist $H_k(M, M \setminus K; R) \cong_R 0$.*
   b) *Sei $\alpha \in H_n(M, M \setminus K; R)$ und für alle $x \in K$ gelte $H_n(i_x^K; R)(\alpha) = 0 \in H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$. Dann ist ist $\alpha = 0$.*
2. *Ist K zusammenhängend, so ist*

$$H_n(i_x^K; R) \colon H_n(M, M \setminus K; R) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$$

   für alle $x \in K$ injektiv.

Beweisskizze. Beweis von Teil 1. Wir beweisen diese beiden Aussagen gleichzeitig mithilfe des Induktionsprinzips für Mannigfaltigkeiten und kompakte Teilräume (Satz 4.11) und weisen dafür die entsprechenden Eigenschaften der Klasse P der Paare (M, K), die beide Behauptungen erfüllen, nach:

1. Offenbar besitzt $(\emptyset, \emptyset)$ die gewünschte Eigenschaft.

2. Ist $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und konvex (und ohne Einschränkung nicht-leer), so ist $(\mathbb{R}^n, K) \cong_{\mathsf{Top}^2} (\mathbb{R}^n, D^n)$. Mit Proposition 4.18 folgt somit, dass die behaupteten Aussagen für $(\mathbb{R}^n, K)$ gelten.
3. Die behaupteten Aussagen bleiben unter Homöomorphismen offensichtlich erhalten, da $H_*(\,\cdot\,; R)$ homöomorphieinvariant ist.
4. Die Abgeschlossenheit unter Übermannigfaltigkeiten folgt aus Ausschneidung.
5. Die Vererbung unter Verklebung zweier kompakter Teilmengen folgt mithilfe der (relativen) Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz II.2.27).
6. Sei $M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n)$ und sei $K = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} K_j$ mit den Voraussetzungen aus Satz 4.11.6. Sei nun $k \in \mathbb{Z}$ und sei $\alpha \in H_k(M, M\setminus K; R)$; sei $c \in C_k(M; R)$ eine singuläre Kette mit $\partial c \in C_{k-1}(M\setminus K; R)$, die α in $H_n(M, M\setminus K; R)$ repräsentiert. Da singuläre Ketten kompaktes „Bild“ haben, gibt es ein $j \in \mathbb{N}$ mit $\partial c \in C_{k-1}(M \setminus K_{j-1}; R)$ (Abbildung (4.20)). Insbesondere gibt es ein $\overline{\alpha} \in H_k(M, M \setminus K_j; R)$ mit

$$H_k(i_K^{K_j}; R)(\overline{\alpha}) = \alpha \in H_k(M, M \setminus K; R).$$

Ist $k > n$, so ist nach Voraussetzung $H_n(M, M \setminus K_j; R) \cong_R 0$, und somit insbesondere $\alpha = 0$.
Sei nun $k = n$ und es gelte für alle $x \in K$, dass $H_n(i_x^K; R)(\alpha) = 0$ ist. Sei nun $y \in K_j$. Nach Voraussetzung gibt es eine offene Umgebung $U \subset M$ von y mit

$$U \cong_{\mathsf{Top}} \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad U \cap K \neq \emptyset \quad \text{und} \quad U \subset K_{j-1}^\circ.$$

Also ist $\partial c \in C_{n-1}(M \setminus U; R)$; somit definiert c eine Klasse in $H_n(U, U \setminus \{y\}; R)$. Sei etwa $x \in U \cap K$. Mit Proposition 4.18 folgt daher, dass

$$\begin{aligned} H_n(i_y^{K_j}; R)(\overline{\alpha}) &= H_n\big((U, U \setminus \{y\}) \hookrightarrow (M, M \setminus \{y\})\big)([c]) \\ &= H_n(i_x^K; R)(\alpha) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nach der Voraussetzung an (M, K_j) ist somit $\overline{\alpha} = 0$, und damit insbesondere auch $\alpha = 0$.

Also ist $P = \{(M, K) \mid M \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mfd}_n),\ K \subset M \text{ kompakt}\}$, wie behauptet.

Beweis von Teil 2. Sei $x \in K$ und sei $\alpha \in H_n(M, M \setminus K)$ mit $H_n(i_x^K; R)(\alpha) = 0$. Wenden wir Proposition 4.18 lokal an, so sehen wir, dass

$$\begin{aligned} U &:= \big\{y \in K \;\big|\; H_n(i_y^K; R)(\alpha) = 0\big\}, \\ V &:= \big\{y \in K \;\big|\; H_n(i_y^K; R)(\alpha) \neq 0\big\} \end{aligned}$$

in K offen sind. Wegen $U = K \setminus V$ ist U also auch abgeschlossen. Da $x \in U$ ist und K zusammenhängend ist, folgt $U = K$. Mit dem ersten Teil erhalten wir somit

$$\alpha \in \bigcap_{y\in K} \ker H_n(i_x^K; R) = 0.$$

Also ist $H_n(i_x^K; R)\colon H_n(M, M \setminus K; R) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ injektiv. □

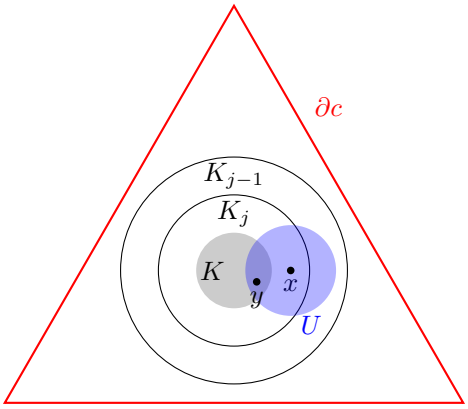


Abbildung (4.20): relative Zykel und approximierende kompakte Teilmengen im Beweis der Eindeutigkeit von Fundamentalklassen

Die Existenz von Fundamentalklassen entlang kompakter Teilmengen erhalten wir nun induktiv durch Verkleben:

Satz 4.21 (Fundamentalklassen orientierter Mannigfaltigkeiten entlang kompakter Teilmengen)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$, sei R ein Ring mit Eins, sei M eine topologische n-Mannigfaltigkeit und sei μ eine R-Orientierung auf M.*

1. *Ist $K \subset M$ kompakt, so gibt es genau ein $\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in K$ gilt*

$$H_n(i_x^K; R)(\mu_K) = \mu_x,$$

   wobei $i_x^K \colon (M, M \setminus K) \longrightarrow (M, M \setminus \{x\})$ die Inklusion bezeichnet.
2. *Ist $K \subset M$ kompakt und zusammenhängend, so ist*

$$H_n(i_x^K; R) \colon H_n(M, M \setminus K; R) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$$

   für alle $x \in K$ ein R-Isomorphismus.

Beweisskizze. Wir beginnen mit dem ersten Teil: Die Eindeutigkeit wurde in Proposition 4.19 gezeigt. Wir zeigen nun induktiv die Existenz:

- Sei $K \subset M$ kompakt und es gebe eine offene Menge $U \subset M$ mit $K \subset U$, sowie eine Klasse $\mu_U \in H_n(M, M \setminus U; R)$ mit

$$\forall_{x \in U} \quad H_n(i_x^U; R)(\mu_U) = \mu_x.$$

  Dann hat $\mu_K := H_n\big((M, M \setminus U) \hookrightarrow (M, M \setminus K); R\big)(\mu_U)$ offenbar die gewünschte Eigenschaft.
- Sind K_1 und K_2 kompakte Teilmengen von M und gilt die Behauptung für K_1 und K_2, so zeigt die relative Mayer-Vietoris-Sequenz für (M, K_1) und (M, K_2) zusammen mit dem ersten Teil von Proposition 4.19, dass dann die Behauptung auch für $(M, K_1 \cup K_2)$ gilt.

– Ist $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge, so gibt es – nach Definition der Orientierbarkeit und aufgrund der Kompaktheit von K – ein $m \in \mathbb{N}$ und kompakte Teilmengen $K_1, \ldots, K_m \subset M$ mit den Eigenschaften aus dem ersten Schritt und $K \subset K_1 \cup \cdots \cup K_m$. Induktiv folgt mit dem zweiten Schritt, dass $K' := K_1 \cup \cdots \cup K_m$ eine entsprechende Fundamentalklasse $\mu_{K'} \in H_n(M, M \setminus K'; R)$ zulässt. Dann hat $\mu_K := H_n\big((M, M \setminus K') \hookrightarrow (M, M \setminus K); R\big)(\mu_{K'})$ offenbar die gewünschte Eigenschaft.

Damit ist der erste Teil gezeigt.

Zum zweiten Teil: Die Surjektivität folgt direkt aus dem ersten Teil. Da K zusammenhängend ist, folgt die Injektivität aus dem zweiten Teil von Proposition 4.19. □

Korollar 4.22 (Fundamentalklasse kompakter orientierter Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine kompakte zusammenhängende topologische n-Mannigfaltigkeit.*

1. *Sei R ein Ring mit Eins und sei μ eine R-Orientierung von M. Dann ist $H_n(i_x^M; R)\colon H_n(M; R) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; R)$ für alle $x \in M$ ein Isomorphismus und es gibt genau eine Homologieklasse $[M]_R \in H_n(M; R)$ mit folgender Eigenschaft: Für alle $x \in M$ gilt*

$$H_n(i_x^M; R)[M]_R = \mu_x.$$

   *Ist M nicht-leer, so wird $H_n(M; R) \cong_R R$ von $[M]_R$ erzeugt. Man nennt $[M]_R$ die R-*Fundamentalklasse von M bzgl. der R-Orientierung μ*. Singuläre Zykel, die $[M]_R$ repräsentieren heißen auch R-*Fundamentalzykel von M bzgl. der R-Orientierung μ.*
2. *Ist M nicht-leer, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:*
   a) *Die Mannigfaltigkeit M ist orientierbar.*
   b) *Es ist $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$.*
   c) *Es ist $H_n(M; \mathbb{Z}) \ncong_{\mathbb{Z}} 0$.*

Beweisskizze. Der erste Teil ist eine direkte Konsequenz von Satz 4.21.

Wir beweisen nun den zweiten Teil. Die Implikation „a) $\Longrightarrow$ b)“ folgt aus dem ersten Teil. Die Implikation „b) $\Longrightarrow$ c)“ ist klar. Es bleibt also, „c) $\Longrightarrow$ a)“ zu zeigen: Es gelte $H_n(M; \mathbb{Z}) \ncong_{\mathbb{Z}} 0$. Aufgrund von Proposition 4.19.2 und da M kompakt ist, ist

$$H_n(i_x^M; \mathbb{Z})\colon H_n(M; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$$

für alle $x \in M$ injektiv; da M nicht-leer ist, folgt somit, dass $H_n(M; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ gilt. Sei etwa $\alpha \in H_n(M; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ ein Erzeuger. Aufgrund der eben erwähnten Injektivität gibt es dann für jedes $x \in M$ genau einen Erzeuger $\mu_x \in H_n(M, M \setminus \{x\}; \mathbb{Z})$, für den es $m_x \in \mathbb{N}_{>0}$ mit

$$H_n(i_x^M; \mathbb{Z})(\alpha) = m_x \cdot \mu_x$$

gibt. Man kann nun leicht nachrechnen (mithilfe von Proposition 4.18), dass $(\mu_x)_{x \in M}$ eine Orientierung auf M ist. □

Beispiel 4.23 (Sphären)**.** Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$, so ist S^n wegen $H_n(S^n; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ orientierbar.

Beispiel 4.24 (Tori)**.** Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(S^1)^n$ orientierbar. Die in Beispiel II.3.45 bzw. Beispiel 2.65 konstruierte Klasse in $H_2(S^1 \times S^1; \mathbb{Z})$ ist eine $\mathbb{Z}$-Fundamentalklasse von $S^1 \times S^1$.

Beispiel 4.25 (Kleinsche Flasche)**.** Sei K die Kleinsche Flasche (Beispiel 4.5 und Abbildung (4.7)). Dann ist $H_2(K; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} 0$. Da K eine kompakte zusammenhängende topologische 2-Mannigfaltigkeit ist, ist die Kleinsche Flasche also *nicht* orientierbar.

Beispiel 4.26 (Orientierbarkeit projektiver Räume)**.** Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

- Da $\mathbb{C}P^n$ eine kompakte zusammenhängende topologische $2 \cdot n$-Mannigfaltigkeit ist und $H_{2 \cdot n}(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ gilt, ist $\mathbb{C}P^n$ orientierbar.
- Die topologische n-Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}P^n$ ist kompakt und zusammenhängend. Wegen
$$H_n(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } n \text{ ungerade ist} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade ist} \end{cases}$$
folgt somit, dass $\mathbb{R}P^n$ genau dann orientierbar ist, wenn n ungerade ist.

Beispiel 4.27 (Fundamentalklasse einer Produktmannigfaltigkeit)**.** Seien M und N orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere Mannigfaltigkeiten. Dann ist auch $M \times N$ orientierbar und
$$[M \times N]_{\mathbb{Z}} := [M]_{\mathbb{Z}} \times [N]_{\mathbb{Z}}$$
ist nach dem Künnetheorem für Homologie (Korollar 3.15) eine Fundamentalklasse von $M \times N$ (für die Produktorientierung auf $M \times N$). Dies verallgemeinert Beispiel 2.65.

Insbesondere erlauben uns Fundamentalklassen kompakter orientierter Mannigfaltigkeiten, Abbildungsgrade für stetige Abbildungen zwischen solchen Mannigfaltigkeiten zu definieren. Dies werden wir in Abschnitt 4.4 etwas genauer betrachten.

Bemerkung 4.28 (simpliziale Fundamentalklasse)**.** Ist M eine triangulierte orientierte geschlossene zusammenhängende Mannigfaltigkeit, so kann man aus den Simplizes der Triangulierung kanonisch einen singulären Zykel konstruieren; dieser Zykel repräsentiert $[M]_{\mathbb{Z}}$. Die Fundamentalklasse ist also in diesem Sinne ein homologisches Abbild der Mannigfaltigkeit (Abbildung (4.29)).

Bemerkung 4.30 (simpliziales Volumen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere n-Mannigfaltigkeit. Das *simpliziale Volumen von* M ist definiert als
$$\begin{aligned} \|M\| &:= \left\| [M]_{\mathbb{R}} \right\|_1 \\ &= \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{k} |a_j| \;\Big|\; \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \sigma_j \in C_n(M; \mathbb{R}) \text{ ist ein } \mathbb{R}\text{-Fundamentalzykel von } M \Big\} \\ &\in \mathbb{R}_{\geq 0}. \end{aligned}$$

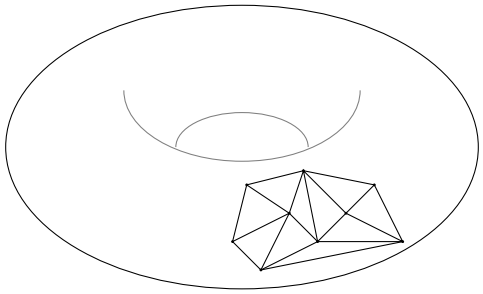


Abbildung (4.29): (Ausschnitt einer) Triangulierung, schematisch

Das simpliziale Volumen misst also, wie effizient man eine Mannigfaltigkeit (singulär, mit reellen Koeffizienten) triangulieren kann. Das simpliziale Volumen besitzt zahlreiche Anwendungen in der Geometrie von Mannigfaltigkeiten (Kapitel II.3.6) und liefert insbesondere ein Hindernis für die Existenz von Abbildungen mit gewissen Abbildungsgraden (Proposition 4.48).

Bemerkung 4.31 (Darstellung von singulären Homologieklassen durch Mannigfaltigkeiten)**.** Aus den Arbeiten von Thom zur Berechnung der Bordismusgruppen folgt: Ist X ein topologischer Raum, ist $n \in \mathbb{N}$ und ist $\alpha \in H_n(X;\mathbb{Z})$, so gibt es eine orientierte zusammenhängende geschlossene n-Mannigfaltigkeit M, eine stetige Abbildung $f\colon M \longrightarrow X$ und ein $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit

$$H_n(f;\mathbb{Z})[M]_{\mathbb{Z}} = d \cdot \alpha.$$

Bis auf Vielfache kann also jede singuläre Homologieklasse durch eine Mannigfaltigkeit dargestellt werden. Im Fall $n = 1$ ist dies mit dem Satz von Hurewicz verwandt, denn die einzige orientierte geschlossene zusammenhängende 1-Mannigfaltigkeit (bis auf Homöomorphie) ist S^1.

Bemerkung 4.32 (Orientierungsüberlagerung)**.** Alternativ zum obigen Zugang zur Orientierbarkeit über singuläre Homologie kann man mithilfe der singulären Homologiegruppen auch die sogenannte Orientierungsüberlagerung konstruieren; diese ist eine zweiblättrige Überlagerung der gegebenen Mannigfaltigkeit. Die Orientierungsüberlagerung ist dann genau dann die triviale zweiblättrige Überlagerung, wenn die unterliegende Mannigfaltigkeit M orientierbar ist. Schnitte der Orientierungsüberlagerung entsprechen dann genau den möglichen Orientierungen von M. Zum Beispiel ist für gerade $n \in \mathbb{N}_{>0}$ die kanonische Projektion $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ die Orientierungsüberlagerung. Überlagerungstheorie zeigt somit insbesondere, dass alle einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten orientierbar sind (da sie keine nicht-trivialen zweiblättrigen Üebrlagerungen besitzen).

4.3. Poincaré-Dualität

Poincaré-Dualität ist ein zentraler Ausgangspunkt für das topologische Verständnis der Welt der Mannigfaltigkeiten. Im wesentlichen beruht Poincaré-Dualität auf der folgenden Beobachtung:

Bemerkung 4.33 (duale Zellenzerlegung und Dualität)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine orientierte geschlossene zusammenhängende triangulierte nicht-leere n-Mannigfaltigkeit. Aus dieser Triangulierung erhält man eine duale Zellenzerlegung (Abbildung (4.34)): Wir ersetzen n-Simplizes durch 0-Zellen, $n-1$-Simplizes durch 1-Zellen zwischen den entsprechenden 0-Zellen, die zu den benachbarten n-Zellen gehören, ...

Mithilfe der Orientierung stellt man nun fest, dass

$$\begin{aligned} C^*(M;\mathbb{Z}) &\simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{CoCh}} C^*_{\text{zellulär}}(M, \text{duale Zellenzerlegung}; \mathbb{Z}) \\ &\simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{CoCh}} C^{\text{simplizial}}_{n-*}(M, \text{gegebene Triangulierung}; \mathbb{Z}) \\ &\simeq_{\mathbb{Z}\mathsf{CoCh}} C_{n-*}(M;\mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Dabei ist die zweite Kettenhomotopieäquivalenz durch „Durchschnitte zählen“ gegeben (mit den Vorzeichen, die durch die Orientierung gegeben sind). Letzteres erinnert an das Cap-Produkt und liefert somit einen Hinweis auf eine Möglichkeit, wie der obige Sachverhalt ohne Triangulierungen etc. formuliert und bewiesen werden kann.

In der Sprache singulärer (Ko)Homologie formuliert sich dies also wie folgt:

Satz 4.35 (Poincaré-Dualität)**.** *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine R-orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere topologische n-Mannigfaltigkeit. Dann ist*

$$\cdot \cap [M]_R \colon H^k(M;R) \longrightarrow H_{n-k}(M;R)$$

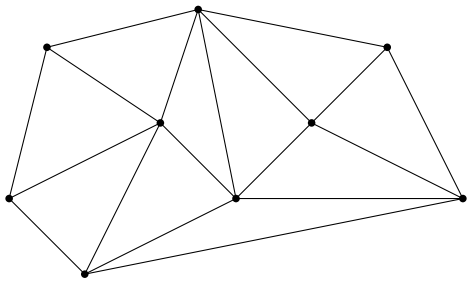
für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus in ${}_R\mathsf{Mod}$.

Der Beweis beruht auf einem Induktionsprinzip für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten. Da der Satz für nicht-kompakte Mannigfaltigkeiten jedoch keinen Sinn ergibt (mangelnde Fundamentalklasse) bzw. falsch ist (es gibt überhaupt keine solchen Isomorphismen), müssen wir die Induktionsbehauptung anders formulieren. Dies lässt sich zum Beispiel mit Kohomologie mit kompaktem Träger erreichen – die nach Definition besser auf Kompaktheit abgestimmt ist als singuläre Kohomologie:

Definition 4.36 (singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger)**.** Sei R ein Ring mit Eins, sei X ein topologischer Raum und sei $K(X)$ die Menge aller kompakten Teilräume von X (partiell geordnet durch Inklusion). Der Unterkomplex $C^*_c(X;R)$ der *Koketten auf X mit kompaktem Träger auf X mit R-Koeffizienten* von $C^*(X;R)$ ist für $k \in \mathbb{N}$ durch

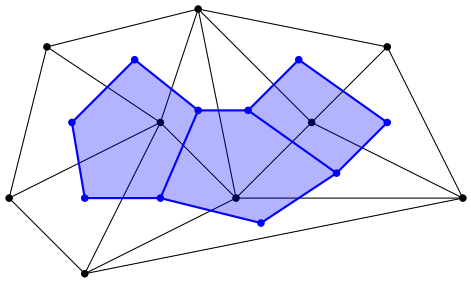
$$C^k_c(X;R) := \left\{ f \in C^k(X;R) \;\middle|\; \exists_{K \in K(X)} \quad f|_{\mathrm{map}(\Delta^k, X \setminus K)} = 0 \right\}$$

gegeben (Abbildung (4.37)). Die Kohomologie $H^*_c(X;R) := H^*(C^*_c(X;R))$ heißt *Kohomologie von X mit kompaktem Träger mit R-Koeffizienten*. Diese Definition ist funktoriell unter eigentlichen stetigen Abbildungen (d.h. stetigen Abbildungen mit der Eigenschaften, dass Urbilder kompakter Mengen kompakt sind).



(Ausschnitt einer) Triangulierung von M

$\wr$



Ausschnitt der dualen Zellenzerlegung von M

Abbildung (4.34): duale Zellenzerlegung zu einer Triangulierung

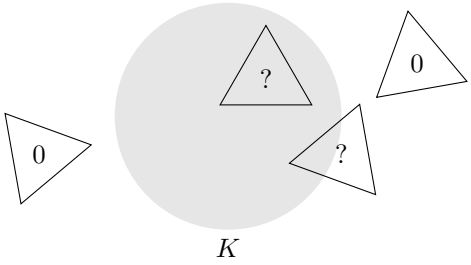


Abbildung (4.37): singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger, schematisch

Proposition 4.38 (Kohomologie mit kompaktem Träger via Kolimiten)**.** *Sei R ein Ring mit Eins, sei X ein topologischer Raum und sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann induzieren die Inklusionen natürlichen Isomorphismus*

$$\operatorname*{colim}_{K \in K(\,\cdot\,)} H^k(\,\cdot\,,\, \cdot \setminus K; R) \cong_R H_c^k(\,\cdot\,; R).$$

Beweisskizze. Dies folgt aus der Definition von singulärer Kohomologie mit kompaktem Träger und der konkreten Konstruktion des Kolimes. □

Satz 4.39 (Poincaré-Dualität für allgemeine Mannigfaltigkeiten)**.** *Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine R-orientierte topologische n-Mannigfaltigkeit. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist dann die von den lokalen Fundamentalklassen $(\mu_K \in H_n(M, M \setminus K; R))_{K \in K(M)}$ (Satz 4.21) induzierte Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} H_c^k(M;R) & \xrightarrow{\mathrm{PD}_{M,k}} & H_{n-k}(M;R) \\ \cong \uparrow & \nearrow_{\text{induziert von } (\,\cdot\, \cap \mu_K)_{K \in K(M)}} & \\ \operatorname{colim}_{K \in K(M)} H^k(M, M \setminus K; R) & & \end{array}$$

wohldefiniert und ein R-Isomorphismus.

Beweisskizze. Die Wohldefiniertheit folgt aus der Natürlichkeit des Cap-Produkts, der lokalen Charakterisierung von (lokalen) Fundamentalklassen und der universellen Eigenschaft des Kolimes.

Wir zeigen, dass $\mathrm{PD}_{M,k}$ für alle R-orientierten topologischen n-Mannigfaltigkeiten M und alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus ist, indem wir ein geeignetes Induktionsprinzip verwenden: Offenbar gilt die Behauptung für die leere Mannigfaltigkeit; wir betrachten daher im folgenden nur nicht-leere Mannigfaltigkeiten.

1. Die Behauptung gilt für $\mathbb{R}^n$, denn: Ohne Einschränkung können wir als Orientierung, die von $\varepsilon(n)$ induzierte Orientierung betrachten (Proposition 4.18; jede andere Orientierung ist durch Multiplikation mit einer Einheit in R gegeben). Das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H_c^k(\mathbb{R}^n;R) & \xrightarrow{\mathrm{PD}_{\mathbb{R}^n,k}} & H_{n-k}(\mathbb{R}^n;R) \\ \cong \uparrow & \nearrow_{\text{induziert von } (\,\cdot\, \cap \mu_K)_{K \in K(M)}} & \| \\ \operatorname{colim}_{K \in K(\mathbb{R}^n)} H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus K; R) & & \| \\ \cong \uparrow & & \| \\ \operatorname{colim}_{r \in \mathbb{N}} H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus r \cdot D^n; R) & & \| \\ \cong \uparrow & & \| \\ H^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}; R) & \xrightarrow[\cdot \cap \varepsilon(n)]{} & H_{n-k}(M;R) \end{array}$$

ist kommutativ und die untere Zeile ist nach Proposition 2.71 ein Isomorphismus. Zusammen mit den vertikalen Isomorphismen folgt somit, dass auch die obere Zeile ein Isomorphismus.

2. Seien $U, V \subset M$ offen und die Behauptung gelte für U, V und $U \cap V$ (jeweils bezüglich der von M induzierten R-Orientierung). Dann gilt die Behauptung auch für $U \cup V$, denn: Sind $K \subset U$ und $L \subset V$ kompakt, so erhalten wir eine exakte relative Mayer-Vietoris-Sequenz für singuläre Kohomologie für $(M, M \setminus K)$ und $(M, M \setminus L)$; mithilfe von Ausschneidung bekommen wir daraus eine exakte Mayer-Vietoris-Sequenz der Form

$$H^k(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L); R) \xrightarrow{-} \begin{matrix} H^k(U, U \setminus K; R) \\ \oplus \\ H^k(V, V \setminus L; R) \end{matrix} \xrightarrow{\oplus} H^k(U \cup V, (U \cup V) \setminus (K \cup L); R) \xrightarrow{\Delta} H^{k+1}(U \cap V, (U \cap V) \setminus (K \cap L); R) \xrightarrow{-} \begin{matrix} H^{k+1}(U, U \setminus K; R) \\ \oplus \\ H^{k+1}(V, V \setminus L; R) \end{matrix}$$

(Man beachte dabei die Richtungen der Pfeile, die von der relativen Mayer-Vietoris-Sequenz in Kohomologie herrühren.) Übergang zu Kolimiten liefert nun eine entsprechende exakte Mayer-Vietoris-Sequenz fru singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger. Somit erhalten wir ein Leiterdiagramm der Form (wobei die vertikalen Abbildungen die jeweiligen Dualitätsabbildungen sind)

$$\begin{array}{ccccccccc}
H_c^k(U \cap V; R) & \xrightarrow{-} & H_c^k(U; R) \oplus H_c^{k+1}(V; R) & \xrightarrow{\oplus} & H_c^k(U \cup V; R) & \xrightarrow{\Delta} & H_c^{k+1}(U \cap V; R) & \xrightarrow{-} & H_c^{k+1}(U; R) \oplus H_c^{k+1}(V; R) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H_{n-k}(U \cap V; R) & \xrightarrow[-]{} & H_{n-k}(U; R) \oplus H_{n-k-1}(V; R) & \xrightarrow[\oplus]{} & H_{n-k}(U \cup V; R) & \xrightarrow[\Delta]{} & H_{n-k-1}(U \cap V; R) & \xrightarrow[-]{} & H_{n-k-1}(U; R) \oplus H_{n-k-1}(V; R)
\end{array}$$

Die Zeilen sind exakt (Mayer-Vietoris-Sequenzen) und die Quadrate, die keine Verbindungshomomorphismen beinhalten sind aufgrund der Natürlichkeit des Cap-Produkts kommutativ. Die verbleibenden Quadrate (mit den Verbindungshomomorphismen der Mayer-Vietoris-Sequenzen) sind auch kommutativ – dies ist jedoch eine aufwendige (aber elementare) Rechnung [6, Kapitel XIV.8]. Mit dem Fünfer-Lemma (Lemma B.6) folgt somit aus der Induktionsvoraussetzung auch die Behauptung für $U \cup V$.

3. Sei $(U_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge offener Teilmengen von M und die Behauptung gelte für U_j für alle $j \in \mathbb{N}$ (bezüglich der von M induzierten R-Orientierung). Dann gilt die Behauptung auch für $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} U_j$, denn: Dies folgt aus Standard-Kompaktheitsargumenten, da singuläre Zykel „kompaktes Bild“ haben.
4. Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ offen, so folgt die Behauptung für M, indem wir M als abzählbare Vereinigung von offenen Bällen $(B_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ schreiben. Induktiv folgt mit 1. und 2., dass die Behauptung für alle $j \in \mathbb{N}$ für

$$U_j := \bigcup_{\ell \in \{0, \dots, j\}} B_\ell$$

gilt (Durchschnitte konvexer Mengen sind konvex und damit homöomorph zu $\mathbb{R}^n$).

Mit Schritt 3. folgt somit, dass die Behauptung auch für

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_j = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j = M$$

gilt.

Im allgemeinen Fall können wir (mithilfe des zweiten Abzählbarkeitsaxioms) M als abzählbare Verinigung von offenen Teilmengen $(V_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ schreiben, die zu offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind. Induktiv folgt mit 4. und 2., dass die Behauptung für alle $j \in \mathbb{N}$ für $\bigcup_{\ell\in\{0,\dots,j\}} V_\ell$ gilt. Mit 3. erhalten wir somit, dass die Behauptung auch für $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} V_j = M$ gilt. □

Beweisskizze (von Satz 4.35). Poincaré-Dualität für geschlossene Mannigfaltigkeiten ist ein Spezialfall von Satz 4.39: im kompakten Fall stimmen singuläre Kohomologie mit kompaktem Träger offenbar mit singulärer Kohomologie überein und die Poincaré-Dualitätsabbildung aus Satz 4.39 übersetzt sich in das Cap-Produkt mit der Fundamentalklasse. □

Wir geben nun ein paar erste Anwendungen von Poincaré-Dualität:

Korollar 4.40 (Euler-Charakteristik von Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension)**.** *Sei M eine orientierte geschlossene zusammenhängende (nicht-leere) Mannigfaltigkeit der Dimension $n = 2 \cdot N + 1$ mit $N \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\chi(M) = 0.$$

Beweisskizze. Hierbei verwenden wir die Beschreibung/Definition der Euler-Charakteristik durch Betti-Zahlen mit $\mathbb{Q}$-Koeffizienten (diese sind nach Bemerkung 4.4 endlich). Mit Poincaré-Dualität (Satz 4.35) und dem universellen Koeffiziententheorem (Korollar 3.8) folgt

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot b_k(M;\mathbb{Q}) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot b_k(M;\mathbb{Q}) + \sum_{k=N+1}^{n} (-1)^k \cdot b^{n-k}(M;\mathbb{Q}) \\
&= \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \cdot b_k(M;\mathbb{Q}) + \sum_{k=N+1}^{n} (-1)^{n-k+1} \cdot b_{n-k}(M;\mathbb{Q}) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

wie behauptet. □

Beispiel 4.41 (einfach zusammenhängende 3-Mannigfaltigkeiten)**.** Ist $M \neq \emptyset$ eine einfach zusammenhängende (nicht-leere) orientierte geschlossene topologische 3-Mannigfaltigkeit, so ist

$$M \simeq_{\mathsf{Top}} S^3,$$

denn:

– Es ist $H_0(M;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$, da M wegzusammenhängend und nicht-leer ist.
– Nach dem Satz von Hurewicz (Satz II.3.81) ist $H_1(M;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} 0$.
– Mit Poincaré-Dualität (Satz 4.35) und dem universellen Koeffiziententheorem (Korollar 3.10) folgt $H_2(M;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} 0$.
– Außerdem ist $H_3(M;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ (Korollar 4.22).
– Desweiteren ist $H_k(M;\mathbb{Z}) \cong_{\mathbb{Z}} 0$ für alle $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0,\dots,3\}$ (Proposition 4.19).

Sei $f\colon M \longrightarrow S^3$ die Abbildung, die alles außerhalb eines kleinen Balles in M zu einem Punkt kollabiert. Dann folgt über die lokale Beschreibung der Homologie in Top-Dimensionen, dass $\deg f = 1$ ist. Mit den obigen Berechnungen erhalten wir daher, dass $H_*(f;\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus ist. Also zeigt der Satz von Whitehead (Korollar II.4.68), dass $f\colon M \longrightarrow S^3$ eine Homotopieäquivalenz ist.

Ein weiterer wichtiger Aspekt von Poincaré-Dualität ist die geometrische Interpretation von Cup-Produkten durch sogenannte Schnittprodukte.

Proposition 4.42 (Schnittform, Signatur)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei M eine $\mathbb{R}$-orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere topologische n-Mannigfaltigkeit.*

1. *Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist die Bilinearform*

$$\begin{aligned} s_{M,k}\colon H^k(M;\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} H^{n-k}(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi \otimes \psi &\longmapsto \langle \varphi \cup \psi, [M]_{\mathbb{R}} \rangle \end{aligned}$$

   regulär.
2. *Ist $n \equiv 0 \mod 4$, so ist $s_{M,n/2}$ symmetrisch. Man bezeichnet $s_{M,n/2}$ als* Schnittform von M*. Die Signatur $\sigma(M)$ der symmetrischen Bilinearform $s_{M,n/2}$ heißt* Signatur von M*. Ist M nicht zusammenhängend, so ist die Signatur von M als Summe der Signaturen der Komponenten definiert.*
3. *Ist $n \equiv 2 \mod 4$, so ist $s_{M,n/2}$ antisymmetrisch.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt aus dem universellen Koeffiziententheorem (Korollar 3.8), Poincaré-Dualität (Satz 4.35) und der Cup-Cap-Relation.

Der zweite und dritte Teil folgen aus der graduierten Kommutativität des Cup-Produkts. □

Die entsprechende geometrische Bedeutung dieser Bilinearform wird zum Beispiel in Abbildung (2.76) deutlich.

Satz 4.43 (Bordismusinvarianz der Signatur)**.** *Ist W eine orientierte kompakte zusammenhängende nicht-leere topologische Mannigfaltigkeit mit nicht-leerem Rand ∂W und ist $\dim W \equiv 1 \mod 4$, so ist*

$$\sigma(\partial W) = 0.$$

Beweisskizze. Dies folgt aus einer geeigneten Variante von Poincaré-Dualität für kompakte Mannigfaltigkeiten mit Rand und aus einem Trick aus der homologischen Algebra (Lagrange-Unterräume). □

Insbesondere können wir damit nicht-triviale Beispiele für Mannigfaltigkeiten angeben, die *nicht* nullbordant sind:

Korollar 4.44. *Für alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ ist $\mathbb{C}P^{2\cdot n}$* nicht *Rand einer kompakten Mannigfaltigkeit mit Rand.*

Beweisskizze. Da $H^n(\mathbb{C}P^{2\cdot n};\mathbb{R})$ eindimensional und die Schnittform regulär ist, ist $\sigma(\mathbb{C}P^{2\cdot n}) \neq 0$. Damit folgt die Behauptung aus dem Satz. □

Eine interessante Mischung von Geometrie und Algebra ergibt sich für Gruppen, die auf (Ko)Homologie ein algebraisches Analogon zu Poincaré-Dualität besitzen: die sogenannten *Poincaré-Dualitätsgruppen*.

4.4. Der Abbildungsgrad für Mannigfaltigkeiten

Die Fundamentalklasse orientierter geschlossener Mannigfaltigkeiten, erlaubt es, den Abbildungsgrad für stetige Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten einzuführen:

Definition 4.45 (Abbildungsgrad)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M und N orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere topologische n-Manngifaltigkeiten. Ist $f\colon M \longrightarrow N$ stetig, so ist der *Abbildungsgrad von f* die eindeutig bestimmte ganze Zahl $\deg f \in \mathbb{Z}$ mit

$$H_n(f;\mathbb{Z})[M]_{\mathbb{Z}} = \deg f \cdot [N]_{\mathbb{Z}}.$$

Dieser Abbildungsgrad folgt dem allgemeinen Schema für Abbildungsgrade aus Proposition II.1.58 und verallgemeinert den Abbildungsgrad für stetige Abbildungen auf Sphären (Korollar II.2.20).

Der Abbildungsgrad beschreibt grob gesagt, wie oft die Startmannigfaltigkeit durch die stetige Abbildung um die Zielmannigfaltigkeit herumgewickelt wird. Dies kann zum Beispiel im Falle simplizialer Beschreibungen der Fundamentalklasse oder mithilfe von differentialtopologischen Begriffen präzisiert werden. Ein einfacher Spezialfall davon ist (der zum Beispiel aus Proposition 4.19 folgt):

Beispiel 4.46 (Abbildungsgrad nicht-surjektiver Abbildungen)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M, N orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere topologische Mannigfaltigkeiten derselben Dimension und sei $f\colon M \longrightarrow N$ stetig. Ist f nicht surjektiv, so folgt $\deg f = 0$.

Der Abbildungsgrad erlaubt es, orientierte geschlossene Mannigfaltigkeiten „der Größe nach“ zu „ordnen“:

Proposition 4.47 (Abbildungen von nicht-trivialem Grad)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien M und N orientierte geschlossene zusammenhängende n-Mannigfaltigkeiten. Sei $f\colon M \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung.*

1. *Ist $\deg f \neq 0$, so ist $H_k(f;\mathbb{Q})\colon H_k(M;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_k(N;\mathbb{Q})$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ surjektiv und $H^k(f;\mathbb{Q})\colon H^k(N;\mathbb{Q}) \longrightarrow H^k(M;\mathbb{Q})$ injektiv.*
2. *Für alle $x_0 \in M$ hat $\pi_1(f)\big(\pi_1(M,x_0)\big)$ endlichen Index in $\pi_1(N, f(x_0))$.*

Beweisskizze. Der erste Teil folgt mit einer einfachen Rechnung aus Poincaré-Dualität (Satz 4.35). Der zweite Teil folgt aus Überlagerungstheorie und der Bestimmung von Homologie von nicht-kompakten Mannigfaltigkeiten in der Dimension der Mannigfaltigkeit (zum Beispiel über allgemeine Poincaré-Dualität (Satz 4.39)). □

Im allgemeinen ist es sehr schwierig, für gegebene Mannigfaltigkeiten M und N die Menge $\{\deg f \mid f \in \operatorname{map}(M,N)\}$ der möglichen Abbildungsgrade für Abbildungen $M \longrightarrow N$ zu berechnen – selbst im Fall, dass $M = N$ ist. Ein weiteres Hindernis (außer Proposition 4.47) für die Existenz von stetigen Abbildungen mit gewissen Abbildungsgraden liefert das simpliziale Volumen:

Proposition 4.48. *Sei $n \in \mathbb{N}$, seien M und N orientierte geshlossene zusammenhängende nicht-leere topologische n-Mannigfaltigkeiten und sei $f\colon M \longrightarrow N$ stetig.*

1. *Dann ist $|\deg f| \cdot \|N\| \leq \|M\|$.*
2. *Insbesondere gilt: Ist $\|N\| \neq 0$, so folgt*

$$|\deg f| \leq \frac{\|M\|}{\|N\|}.$$

3. *Ist $\|M\| \neq 0$, so gibt es keine stetige Abbildung $f\colon M \longrightarrow M$ mit $|\deg f| \geq 2$.*

Beweisskizze. Dies folgt direkt aus der Tatsache, dass (nach Definition der ℓ^1-Halbnorm) die Abschätzung $\|H_n(f;\mathbb{Z})\| \leq 1$ gilt. □

Beispiel 4.49 (Sphären sind klein)**.** Ist $n \in \mathbb{N}_{>0}$ und ist M eine orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere topologische n-Mannigfaltigkeit, so gibt es eine stetige Abbildung $f\colon M \longrightarrow S^n$ mit $\deg f = 1$ wie man sich leicht durch Kollabieren von M außerhalb eines kleinen n-Balls überlegen kann.

Homotopieäquivalenzen haben natürlich Grad 1 oder -1. Umgekehrt erlaubt es der Abbildungsgrad in manchen Fällen, Homotopieäquivalenzen zu erkennen:

Proposition 4.50 (Selbstabbildungen von einfach-zusammenhängenden Manngifaltigkeiten)**.** *Sei M eine einfach zusammenhängende orientierte geschlossene Mannigfaltigkeit und sei $f\colon M \longrightarrow M$ stetig mit $|\deg f| = 1$. Dann ist f bereits eine Homotopieäquivalenz.*

Beweisskizze. Dies folgt aus Proposition 4.47, Bemerkung 4.4 und dem Satz von Whitehead für Homologie (Korollar II.4.68). □

Diese Beobachtung ist der Ausgangspunkt für die *Hopf-Vermutung für Abbildungsgrade*. Im allgemeinen ist diese Vermutung jedoch noch offen (es sind aber zum Beispiel Teilresultate für gewisse Arten von Fundamentalgruppen bekannt).

4.5. deRham-Kohomologie

Wir skizzieren zum Abschluss kurz den Zusammenhang zwischen deRham-Kohomologie und singulärer Kohomologie; dies wird insbesondere eine geometrische Interpretation von singulärer Kohomologie als Integrationsprozesse liefern.

Zur Vorbereitung betrachten wir eine glatte Version von singulärer (Ko)Homologie:

Definition 4.51 (glatte singuläre (Ko)Homologie)**.** Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit.

- Zu $k \in \mathbb{N}$ sei $C^\infty(\Delta^k, M)$ die Menge aller stetigen Abbildungen $\Delta^k \longrightarrow M$, die sich zu einer glatten Abbildung auf einer offenen Umgebung von $\Delta^k \subset \mathbb{R}^{k+1}$ fortsetzen lassen. Die Elemente von $C^\infty(\Delta^k, M)$ heißen *glatte k-Simplizes auf M.*
- Man erhält nun einen entsprechenden Kettenkomplex $C_s(M;\mathbb{R})$ der *glatten singuläre Ketten auf M* und *glatte singuläre Homologie von M*:

$$H_{s,*}(M;\mathbb{R}) := H_*\big(C_{s,*}(M;\mathbb{R})\big).$$

- Analog liefert der Kokettenkomplex $C_s^*(M;\mathbb{R}) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(C_s(M;\mathbb{R}),\mathbb{R})$ *glatte singuläre Kohomologie von M*:

$$H_s^*(M;\mathbb{R}) := H^*\big(C_s^*(M;\mathbb{R})\big).$$

Satz 4.52 (glatte singuläre (Ko)Homologie ist singuläre (Ko)Homologie)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit. Die Inklusion $C_s(M;\mathbb{R}) \hookrightarrow C(M;\mathbb{R})$ induziert für alle $k \in \mathbb{Z}$ Isomorphismen*

$$\begin{aligned} H_{s,k}(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow H_k(M;\mathbb{R}) \\ H^k(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow H_s^k(M;\mathbb{R}) \end{aligned}$$

von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Beweisskizze. Dies folgt aus einem geeigneten Approximationssatz für stetige Abbildungen durch glatte Abbildungen und einem passenden Induktionsprinzip für glatte Manngifaltigkeiten. □

DeRham-Kohomologie zeigt insbesondere, dass wir (glatte) singuläre Kohomologieklassen (zumindest im Fall glatter Mannigfaltigkeiten) in Verallgemeinerung von Beispiel 1.14 als geeignete Integrationsprozesse auffassen können:

Satz 4.53 (singuläre Kohomologie ist de Rham-Kohomologie)**.** *Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und sei $k \in \mathbb{N}$. Dann induziert die Integrationsabbildung*

$$\begin{aligned} I_M^k \colon \Omega^k(M;\mathbb{R}) &\longrightarrow C_s^k(M;\mathbb{R}) \\ \omega &\longmapsto \begin{pmatrix} C^\infty(\Delta^k, M) & \to & \mathbb{C} \\ \sigma & \mapsto & \int_{\Delta^k} \sigma^*\omega \end{pmatrix} \end{aligned}$$

einen Isomorphismus $H_{dR}^k(M;\mathbb{R}) \longrightarrow H_s^k(M;\mathbb{R})$ zwischen deRham-Kohomologie und singulärer Kohomologie. Dabei bezeichnet $\Omega^*(M;\mathbb{R})$ den Kokettenkomplex der glatten reellwertigen Formen auf M und $H_{dR}^*(M;\mathbb{R}) := H^*(\Omega^*(M;\mathbb{R}))$ die deRham-Kohomologie von M*.*

Beweisskizze. Dass diese Integrationsabbildung auf Kohomologie wohldefiniert ist, ist eine Konsequenz des Satzes von Stokes.

Die Isomorphie folgt mithilfe eines geeigneten Induktionsprinzips für glatte Mannigfaltigkeiten; das Poincaré-Lemma für deRham-Kohomologie liefert dabei den Induktionsanfang. □

Einfache differentialtopologische/-geometrische Argumente zeigen dabei:

Beispiel 4.54 (Fundamentalklasse und Volumen)**.** Sei M eine orientierte geschlossene zusammenhängende nicht-leere Riemannsche glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und sei $\omega \in \Omega^n(M;\mathbb{R})$ die Volumenform auf M. Dann gilt

$$\left\langle [I_M^n(\omega)], [M]_{\mathbb{R}} \right\rangle = \operatorname{vol} M.$$

Insbesondere kann man umgekehrt Integration nutzen um herauszufinden, welches Vielfache von der Fundamentalklase $[M]_{\mathbb{R}}$ ein gegebener glatter n-Zykel von M repräsentiert.

Man kann die Aussagen aus Satz 4.53 wie folgt verfeineren: Unter dieser Identifikation stimmt das Cup-Produkt mit dem äußeren Produkt von Differentialformen und das Kronecker-Produkt mit der Integration über (glatte) Zykel überein.

A. Grundbegriffe aus der mengentheoretischen Topologie

Wir sammeln die wichtigsten Grundbegriffe und Aussagen aus der mengentheoretische Topologie aus den Grundvorlesungen. Detailliertere Erklärungen, sowie Beispiele finden sich in allen Büchern über mengentheoretische Topologie.

A.1. Topologische Räume

Die Grundidee topologischer Räume ist, Nähe nicht durch Abstände, sondern durch Systeme von Teilmengen auszudrücken – den sogenannten offenen Mengen:

Definition A.1 (topologischer Raum, Topologie)**.** Ein *topologischer Raum* ist ein Paar (X, T), wobei X eine Menge und T eine *Topologie auf* X ist, d.h. T ist eine Teilmenge der Potenzmenge $P(X)$ von X mit folgenden Eigenschaften:
- Es ist $\emptyset \in T$ und $X \in T$.
- Ist $U \subset T$, so ist $\bigcup U \in T$.
- Ist $U \subset T$ endlich, so ist $\bigcap U \in T$.

Die Elemente von T heißen *offene Mengen* (bezüglich T); ist $A \subset X$ und $X \setminus A \in T$, so heißt A *abgeschlossen* (bezüglich T).

Warum man gerade diese Axiome für offene Mengen betrachtet, kann man gut anhand des Beispiels metrischer Räume illustrieren:

Proposition A.2 (die von einer Metrik induzierte Topologie)**.** *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann ist*

$$T := \big\{U \subset X \;\big|\; \forall_{x\in U} \quad \exists_{\varepsilon\in\mathbb{R}_{>0}} \quad U(x,\varepsilon) \subset U\big\}$$

eine Topologie auf X. Man nennt T die von d auf X induzierte Topologie*. Dabei verwenden wir für $x \in X$ und $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ die Notation*

$$U(x,\varepsilon) := \big\{y \in X \;\big|\; d(y,x) < \varepsilon\big\}.$$

Bemerkung A.3.
- Der Begriff offener Mengen bezüglich der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ stimmt also mit dem Begriff aus der Analysis I überein.
- Die von der euklidischen Metrik auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Topologie auf $\mathbb{R}^n$ heißt *Standardtopologie auf* $\mathbb{R}^n$.
- Ist (X, d) ein metrischer Raum, ist $x \in X$ und ist $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$, so ist $U(x, \varepsilon)$ in X offen. D.h. offene Bälle sind tatsächlich offene Mengen bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie.
- Analog zum Fall von Teilmengen von $\mathbb{R}$ kann Abgeschlossenheit in metrischen Räumen auch durch Konvergenz von Folgen ausgedrückt werden. Daraus folgt, dass abgeschlossene Bälle tatsächlich bezüglich der von der Metrik induzierten Topologie abgeschlossen sind.

Caveat A.4. Nicht jeder topologische Raum ist metrisierbar! (Korollar A.26).

Bemerkung A.5 (Klumpentopologie, diskrete Topologie)**.** Sei X eine Menge.
- Dann ist $\{\emptyset, X\}$ eine Topologie auf X, die sogenannte *Klumpentopologie auf* X.
- Außerdem ist $P(X)$ eine Topologie auf X, die sogenannte *diskrete Topologie auf* X; iese stimmt mit der von der diskreten Metrik induzierten Topologie überein.

Zwei elementare Konstruktionen topologischer Räume sind Teilräume und Produkte:

Bemerkung A.6 (Teilraumtopologie)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und $Y \subset X$. Dann ist

$$\{U \cap Y \mid U \in T\}$$

eine Topologie auf Y, die sogenannte *Teilraumtopologie*. Ist T auf X von einer Metrik d auf X induziert, so stimmt die Teilraumtopologie auf Y mit der von d auf Y induzierten Metrik induzierten Topologie überein.

Bemerkung A.7 (Produkttopologie)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Dann ist

$$\left\{U \subset X \times Y \;\middle|\; \forall_{x \in U} \quad \exists_{U_X \in T_X} \quad \exists_{U_Y \in T_Y} \quad x \in U_X \times U_Y \subset U\right\}$$

eine Topologie auf $X \times Y$, die sogenannte *Produkttopologie*.

Die Standardtopologie auf $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ stimmt dabei mit der Produkttopologie der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ überein. Die Produkttopologie erfüllt auch die universelle Eigenschaft des Produkts im kategorientheoretischen Sinne.

Außerdem ist es oft nützlich, die folgenden Begriffe zur Verfügung zu haben:

Definition A.8 ((offene) Umgebung)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und $x \in X$.
- Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine *offene Umgebung von* x, wenn U offen ist und $x \in U$ ist.
- Eine Teilmenge $U \subset X$ ist eine *Umgebung von* x, wenn es eine offene Umgebung $V \subset X$ von x mit $V \subset U$ gibt.

Definition A.9 (Abschluss, Inneres, Rand)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$.
- Das *Innere von* Y ist

  $$Y^\circ := \bigcup \{U \mid U \in T \text{ und } U \subset Y\}.$$

  D.h. Y° ist die (bezüglich Inklusion) größte in X offene Menge, die in Y enthalten ist.
- Der *Abschluss von* Y ist

  $$\overline{Y} := \bigcap \{A \mid X \setminus A \in T \text{ und } Y \subset A\}.$$

  D.h. $\overline{Y}$ ist die (bezüglich Inklusion) kleinste in X abgeschlossene Menge, die Y enthält.
- Der *Rand von* Y ist

  $$\partial Y := \overline{Y} \cap \overline{(X \setminus Y)}.$$

A.2. Stetige Abbildungen

Stetige Abbildungen spielen die Rolle der strukturverträglichen Abbildungen in der Welt der topologischen Räume:

Definition A.10 (stetig)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist *stetig* (bezüglich T_X und T_Y), wenn

$$\forall_{U \in T_Y} \quad f^{-1}(U) \in T_X,$$

d.h., wenn Urbilder offener Mengen offen sind.

Bemerkung A.11.

- Für Abbildungen vom Typ $X \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $X \subset \mathbb{R}$ stimmt dieser Begriff von Stetigkeit mit dem aus der Analysis I überein.
- Dasselbe Argument über das ε-δ-Kriterium zeigt: Für Abbildungen zwischen metrischen Räumen stimmt dieser Begriff von Stetigkeit mit dem bereits zuvor definierten überein.
- Sei X eine Menge und seien T bzw. T' Topologien auf X. Dann ist die Identität $\mathrm{id}_X\colon (X, T) \longrightarrow (X, T')$ genau dann stetig, wenn $T' \subset T$ ist, d.h. wenn T' gröber als T ist.
- Die Abbildungen $+, \cdot, -\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ und $/\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sind bezüglich der Standardtopologie stetig.
- Ist (X, T) ein topologischer Raum und $Y \subset X$, so ist die Inklusion $Y \hookrightarrow X$ bezüglich der Teilraumtopologie auf Y stetig.
- Konstante Abbildungen sind stetig.

Proposition A.12 (Vererbungseigenschaften stetiger Abbildungen)**.** *Seien (X, T_X), (Y, T_Y) und (Z, T_Z) topologische Räume und seien $f\colon X \longrightarrow Y$ und $g\colon Y \longrightarrow Z$ Abbildungen.*

1. *Sind f und g stetig, so ist auch $g \circ f\colon X \longrightarrow Z$ stetig.*
2. *Ist f stetig und ist $A \subset X$, so ist auch die Einschränkung $f|_A\colon A \longrightarrow Y$ stetig (bezüglich der Teilraumtopologie auf A).*
3. *Die Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist genau dann stetig, wenn $f\colon X \longrightarrow f(X)$ bezüglich der Teilraumtopologie auf $f(X)$ stetig ist.*

Proposition A.13 (Verkleben stetiger Funktionen)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume, seien $A, B \subset X$ abgeschlossene Teilmengen mit $A \cup B = X$ und seien $f\colon A \longrightarrow Y$ und $g\colon B \longrightarrow Y$ stetige Abbildungen (bezüglich der Teilraumtopologie auf A bzw. B) mit $f|_{A\cap B} = g|_{A\cap B}$. Dann ist die (wohldefinierte) Abbildung*

$$\begin{aligned} f \cup_{A\cap B} g\colon X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in A, \\ g(x) & \text{falls } x \in B \end{cases} \end{aligned}$$

stetig.

Der Isomorphiebegriff in der Kategorie der topologischen Räume ist Homöomorphie:

Definition A.14 (Homöomorphismus)**.** Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \longrightarrow Y$ ist ein *Homöomorphismus*, wenn sie stetig ist und es eine stetige Abbildung $g\colon Y \longrightarrow X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ gibt. Falls es einen Homöomorphismus $X \longrightarrow Y$ gibt, heißen X und Y *homöomorph*.

Caveat A.15. *Nicht* jede stetige bijektive Abbildung ist ein Homöomorphismus!

Anschaulich gesprochen sind topologische Räume genau dann homöomorph, wenn man sie durch „verbiegen“ und „aufblasen/schrumpfen“ ineinander überführen kann, ohne zu „schneiden“ oder zu „kleben“.

A.3. (Weg-)Zusammenhang

Einer der zentralen Sätze über stetige Funktionen vom Typ $[0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der Zwischenwertsatz. Im allgemeineren Kontext der topologischen Räume kann man dieses Phänomen durch die Begriffe Wegzusammenhang und Zusammenhang beschreiben.

Definition A.16 (Weg, wegzusammenhängend)**.** Sei (X, T) ein topologischer Raum.
- Ein *Weg in X* ist eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ (bezüglich der Standardtopologie auf $[0, 1] \subset \mathbb{R}$). Man nennt $\gamma(0)$ den *Startpunkt* und $\gamma(1)$ den *Endpunkt von γ*. Der Weg γ heißt *geschlossen*, wenn $\gamma(0) = \gamma(1)$ ist.
- Der Raum X ist *wegzusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Für alle $x, y \in X$ gibt es einen Weg $\gamma\colon [0, 1] \longrightarrow X$ mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Bemerkung A.17.
- Das Einheitsintervall ist (bezüglich der Standardtopologie) wegzusammenhängend.
- Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist $\mathbb{R}^n$ wegzusammenhängend (bezüglich der Standardtopologie).
- Ist X eine Menge mit $|X| \geq 2$, so ist X bezüglich der diskreten Topologie *nicht* wegzusammenhängend.

Proposition A.18 (Stetigkeit und Wegzusammenhang)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X wegzusammenhängend, so ist auch $f(X)$ bezüglich der Teilraumtopologie wegzusammenhängend.*

Insbesondere gilt: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann wegzusammenhängend, wenn Y wegzusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Wegzusammenhang ist eine topologische Invariante.

Zum Beispiel kann man diese Eigenschaft (und einen kleinen Trick) verwenden, um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ nur dann zu $\mathbb{R}^n$ homöomorph ist (bezüglich der Standardtopologie), wenn $n = 1$ ist.

Eine Abschwächung des Wegzusammenhangsbegriffs ist Zusammenhang:

Definition A.19 (zusammenhängend)**.** Ein topologischer Raum (X, T_X) ist *zusammenhängend*, wenn folgendes gilt: Für alle $U, V \in T_X$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $U \cup V = X$ ist bereits $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$. (D.h. X lässt sich nur trivial in offene Mengen zerlegen).

Bemerkung A.20. Das Einheitsintervall $[0, 1]$ ist bezüglich der Standardtopologie zusammenhängend.

Proposition A.21 (Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang)**.** *Jeder wegzusammenhängende topologische Raum ist zusammenhängend.*

Caveat A.22. Es gibt topologische Räume, die zusammenhängend, aber *nicht* wegzusammenhängend sind!

In diesem allgemeinen Kontext lautet der verallgemeinerte Zwischenwertsatz nun wie folgt:

Proposition A.23 (Verallgemeinerter Zwischenwertsatz)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X zusammenhängend, so ist auch $f(X)$ zusammenhängend (bezüglich der Teilraumtopologie).*

Insbesondere: Sind X und Y homöomorph, so ist X genau dann zusammenhängend, wenn Y zusammenhängend ist. Mit anderen Worten: Zusammenhang ist eine topologische Invariante.

In der algebraischen Topologie studiert man außer Zusammenhang und Wegzusammenhang auch noch höhere Zusammenhangsbegriffe.

A.4. Hausdorffräume

Die Klumpentopologie zeigt bereits, dass es viele exotische und unintuitive Topologien gibt. Daher gibt es viele Begriffe für topologische Räume, die sicherstellen, dass Räume hinreichend gutartig sind. Ein Beispiel ist der folgende Begriff, der zu den sogenannten Trennungseigenschaften gehört:

Definition A.24 (hausdorffsch)**.** Ein topologischer Raum (X, T) ist *hausdorffsch*, wenn folgendes gilt: Für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existieren offene Mengen $U, V \subset X$ mit $x \in U$, $y \in V$ und $U \cap V = \emptyset$. (D.h. je zwei Punkte können durch offene Mengen getrennt werden.)

Proposition A.25 (metrische Räume sind hausdorffsch)**.** *Ist (X, d) ein metrischer Raum, so ist X bezüglich der von der Metrik d auf X induzierten Topologie hausdorffsch.*

Korollar A.26. *Sei X eine Menge mit $|X| \geq 2$. Dann gibt es keine Metrik auf X, die die Klumpentopologie auf X induziert.*

Bemerkung A.27. Sind (X, T_X) und (Y, T_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist X genau dann hausdorffsch, wenn Y hausdorffsch ist.

Es gibt noch weitere Trennungseignschaften topologischer Räume, sowie sogenannte Abzählbarkeitseigenschaften; die Zusammenhänge zwischen diesen Begriffen sind etwas unübersichtlich und können gut in dem Buch *Counterexamples in Topology* von L.A. Steen und J.A. Seebach Jr nachgelesen werden.

A.5. Kompaktheit

Einer der wichtigsten und nützlichsten topologischen Begriffe ist Kompaktheit; grob gesprochen ist Kompaktheit eine Art topologische Endlichkeitsbedingung. Wir beginnen mit der abstrakten Definition als Endlichkeitsbedingung von Überdeckungen und zeigen später, dass dieser Begriff den bisherigen Kompaktheitsbegriff in $\mathbb{R}$ verallgemeinert (Satz A.36).

Definition A.28 (kompakt)**.** Ein topologischer Raum (X, T) ist *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h., wenn folgendes gilt: Für alle $U \subset T$ mit $\bigcup U = X$ gibt es eine endliche Teilmenge $V \subset U$ mit $\bigcup V = X$.

Bemerkung A.29. Sei X eine Menge. Dann ist X bezüglich der Klumpentopologie kompakt. Außerdem ist X genau dann bezüglich der diskreten Topologie kompakt, wenn X endlich ist.

Wir werden später eine Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{R}^n$ geben und zunächst allgemeine Eigenschaften kompakter Mengen aus der Definition ableiten:

Proposition A.30 (Verallgemeinertes Extremalprinzip)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) topologische Räume und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist auch $f(X)$ kompakt (bezüglich der Teilraumtopologie).*

Korollar A.31 (Kompaktheit ist eine topologische Invariante)**.** *Insbesondere gilt: Sind (X, T_X) und (Y, T_Y) homöomorphe topologische Räume, so ist X genau dann kompakt, wenn Y kompakt ist.*

Proposition A.32 (Abgeschlossenheit und Kompaktheit)**.** *Sei (X, T) ein topologischer Raum und sei $Y \subset X$.*

1. *Ist X kompakt und Y in X abgeschlossen, so ist Y bezüglich der Teilraumtopologie kompakt.*
2. *Ist X hausdorffsch und Y bezüglich der Teilraumtopologie kompakt, so ist Y in X abgeschlossen.*

Korollar A.33. *Sei (X, T_X) ein kompakter topologischer Raum, sei (Y, T_Y) ein Hausdorffraum und sei $f\colon X \longrightarrow Y$ stetig und bijektiv. Dann ist f bereits ein Homöomorphismus(!).*

Zum Abschluss des Abschnitts über allgemeine Kompaktheitseigenschaften betrachten wir noch die Verträglichkeit von Kompaktheit mit Produkten:

Proposition A.34 (Produkt zweier kompakter Räume)**.** *Seien (X, T_X) und (Y, T_Y) kompakte topologische Räume. Dann ist das Produkt $X \times Y$ bezüglich der Produkttopologie kompakt.*

Bemerkung A.35 (Satz von Tychonoff)**.** Der *Satz von Tychonoff*

> Beliebige (auch unendliche!) Produkte kompakter topologischer Räume sind kompakt.

ist äquivalent zum Auswahlaxiom (!), und damit auch äquivalent zum Zornschen Lemma bzw. dem Wohlordnungssatz.

In euklidischen Räumen gibt es eine einfache Charakterisierung kompakter Mengen:

Satz A.36 (Satz von Heine-Borel)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \subset \mathbb{R}^n$. Wir betrachten auf A die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$ induzierte Teilraumtopologie. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *Die Menge A ist kompakt.*
2. *Die Menge A ist in $\mathbb{R}^n$ bezüglich der euklidischen Metrik beschränkt und abgeschlossen.*
3. *Die Menge A ist bezüglich der euklidischen Metrik* folgenkompakt*, d.h. jede Folge in A besitzt eine bezüglich der euklidischen Metrik konvergente Teilfolge, deren Grenzwert auch in A liegt.*

Etwas allgemeiner gilt auch:

Proposition A.37. *Kompakte Mengen in metrischen Räumen sind beschränkt und abgeschlossen.*

Caveat A.38. Die Umkehrung der obigen Proposition gilt im allgemeinen *nicht*! D.h. es gibt beschränkte und abgeschlossene Mengen in gewissen (sogar vollständigen) metrischen Räumen, die *nicht* kompakt sind (zum Beispiel sind unendliche Mengen bezüglich der diskreten Metrik in sich selbst beschränkt und abgeschlossen, aber nicht kompakt).

B. Homologische Algebra

Dieses Kapitel enthält die für die algebraische Topologie nötigen Grundlagen aus der homologischen Algebra. Homologische Algebra ist die Algebra von exakten bzw. nicht-exakten Sequenzen und Funktoren, die Exaktheit erhalten bzw. nicht erhalten.

Wir betrachten der Einfachheit halber nur homologische Algebra in Modulkategorien statt in allgemeinen sogenannten abelschen Kategorien; nach dem Einbettungssatz von Freyd-Mitchell ist dies jedoch keine wesentliche Einschränkung.

B.1. Exakte Sequenzen

Wir geben eine kurze Einführung in exakte Sequenzen; wir formulieren alles für Linksmoduln – analog geht dies natürlich auch für Rechtsmoduln.

Setup B.1. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition B.2 ((kurze) exakte Sequenz)**.**

- Eine Sequenz $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von Morphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist *exakt an der Stelle* B, wenn $\operatorname{im} f = \ker g$ ist.
- Wir nennen eine Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

  in ${}_R\mathsf{Mod}$ eine *kurze exakte Sequenz in* ${}_R\mathsf{Mod}$, wenn die Sequenz an allen Stellen exakt ist (d.h. f ist injektiv, g ist surjektiv, und $\operatorname{im} f = \ker g$).
- Eine $\mathbb{N}$- oder $\mathbb{Z}$-indizierte Sequenz

$$\ldots \longrightarrow A_k \xrightarrow{f_k} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} A_{k-2} \longrightarrow \ldots$$

  in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist *exakt*, wenn sie an allen Stellen exakt ist.

Beispiel B.3. Die Sequenzen

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & (x,0) & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & (x,y) & \longmapsto & y & & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & 2 \cdot x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \longmapsto & [x] & & \end{array}$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} = \mathsf{Ab}$ sind exakt; man beachte dabei, dass die mittleren Moduln *nicht* isomorph sind, obwohl die äußeren isomorph sind. Die Sequenz

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & x & \longmapsto & x & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & x & \longmapsto & x & & \end{array}$$

ist *nicht* exakt.

Caveat B.4. Ist S ein Ring mit Eins, so bilden Funktoren ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ im allgemeinen exakte Sequenzen *nicht* auf exakte Sequenzen ab.

Besonders einfache exakte Sequenzen sind die sogenannten spaltenden exakten Sequenzen (die sich außerdem auch unter Funktoren besser verhalten als allgemeine exakte Sequenzen):

Proposition B.5 (spaltende exakte Sequenzen)**.** *Sei*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } C \longrightarrow 0$$

eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Es gibt einen R-Modulhomomorphismus $r\colon C \longrightarrow B$ mit $p \circ r = \mathrm{id}_C$.*
2. *Es gibt einen R-Modulhomomorphismus $s\colon B \longrightarrow A$ mit $s \circ i = \mathrm{id}_A$.*

Falls diese Aussagen zutreffen, nennt man die obige Sequenz eine spaltende kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$ *und in diesem Fall sind*

$$\begin{array}{ccccc} A \oplus C & & \longrightarrow & & B & & \longrightarrow & & A \oplus C \\ (a,c) & & \longmapsto & & (i(a), r(c)) & & & & \\ & & & & b & & \longmapsto & & (s(b), p(b)) \end{array}$$

Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$*.*

Beweisskizze. Wir zeigen die Implikation $2 \Longrightarrow 1$: Sei also $s\colon B \longrightarrow A$ ein Homomorphismus mit $s \circ i = \mathrm{id}_A$. Wir betrachten den Homomorphismus

$$\begin{aligned} \widetilde{r}\colon B &\longrightarrow B \\ b &\longmapsto b - i \circ s(b). \end{aligned}$$

Dann ist $\ker p \subset \ker \widetilde{r}$, denn: Sei $b \in \ker p$. Wegen der Exaktheit existiert also ein $a \in A$ mit $i(a) = b$ und es folgt

$$\widetilde{r}(b) = i(a) - i \circ s(i(a)) = i(a) - i(\mathrm{id}_A(a)) = 0.$$

Nach der universellen Eigenschaft des Quotienten induziert $\widetilde{r}$ somit einen Homomorphismus $r\colon C \cong B/\ker p \longrightarrow B$ und dieser erfüllt nach Konstruktion $p \circ r = \mathrm{id}_C$.

Ähnlich zeigt man die Implikation $1 \Longrightarrow 2$.

Falls die Aussagen 1 und 2 erfüllt sind, rechnet man leicht nach, dass die angegebenen Homomorphismen zwischen B und $A \oplus C$ bijektiv (und somit Isomorphismen in ${}_R\mathsf{Mod}$) sind. □

Beim Vergleich von exakten Sequenzen ist oft das Fünfer-Lemma nützlich:

Proposition B.6 (Fünfer-Lemma)**.** *Sei*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{a} & B & \xrightarrow{b} & C & \xrightarrow{c} & D & \xrightarrow{d} & E \\ \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \downarrow{\scriptstyle f_D} & & \downarrow{\scriptstyle f_E} \\ A' & \xrightarrow[a']{} & B' & \xrightarrow[b']{} & C' & \xrightarrow[c']{} & D' & \xrightarrow[d']{} & E' \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Dann gilt:

1. *Sind f_B, f_D injektiv und ist f_A surjektiv, so ist f_C injektiv.*
2. *Sind f_B, f_D surjektiv und ist f_E injektiv, so ist f_C surjektiv.*
3. *Insbesondere gilt: Sind f_A, f_B, f_D, f_E Isomorphismen, so ist f_C ein Isomorphismus.*

Beweisskizze. Wir beweisen den ersten Teil mithilfe einer sogenannten Diagrammjagd (viele Aussagen in der homologischen Algebra werden auf diese Weise bewiesen). Der Beweis des zweiten Teils geht analog; der dritte Teil ist eine direkte Folgerung aus den ersten beiden Teilen.

Es seien also f_B und f_D injektiv und f_A sei surjektiv. Sei $x \in C$ mit $f_C(x) = 0$. Dann ist $x = 0$, denn (Abbildung (B.7)):

- Wegen $f_D \circ c(x) = c' \circ f_C(x) = c'(0) = 0$ und der Injektivität von f_D folgt $c(x) = 0$.
- Wegen $\operatorname{im} b = \ker c$ existiert ein $y \in B$ mit $b(y) = x$.
- Wegen $b' \circ f_B(y) = f_C \circ b(y) = f_C(x) = 0$ und $\operatorname{im} a' = \ker b'$ folgt: Es gibt ein $z' \in A'$ mit $a'(z') = f_B(y)$.
- Da f_A surjektiv ist, existiert ein $z \in A$ mit $f_A(z) = z'$.
- Dabei ist $a(z) = y$, denn: Es gilt

  $$f_B\big(a(z)\big) = a' \circ f_A(z) = a'(z') = f_B(y)$$

  und f_B ist injektiv.
- Also ist (wegen $\operatorname{im} a \subset \ker b$)

  $$x = b(y) = b \circ a(z) = 0,$$

  wie gewünscht. □

Für den Beweis der Mayer-Vietoris-Sequenz (Satz II.2.27) verwenden wir die folgende Konstruktion langer exakter Sequenzen:

Proposition B.8 (algebraische Mayer-Vietoris-Sequenz)**.** *Sei R ein Ring mit Eins und sei*

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{c_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{a_k} & B_k & \xrightarrow{b_k} & C_k & \xrightarrow{c_k} & A_{k-1} & \xrightarrow{a_{k-1}} & \dots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_{A,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{B,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{C,k}} & & \downarrow{\scriptstyle f_{A,k-1}} & & \\ \dots & \xrightarrow[c'_{k+1}]{} & A'_k & \xrightarrow[a'_k]{} & B'_k & \xrightarrow[b'_k]{} & C'_k & \xrightarrow[c'_k]{} & A'_{k-1} & \xrightarrow[a'_{k-1}]{} & \dots \end{array}$$

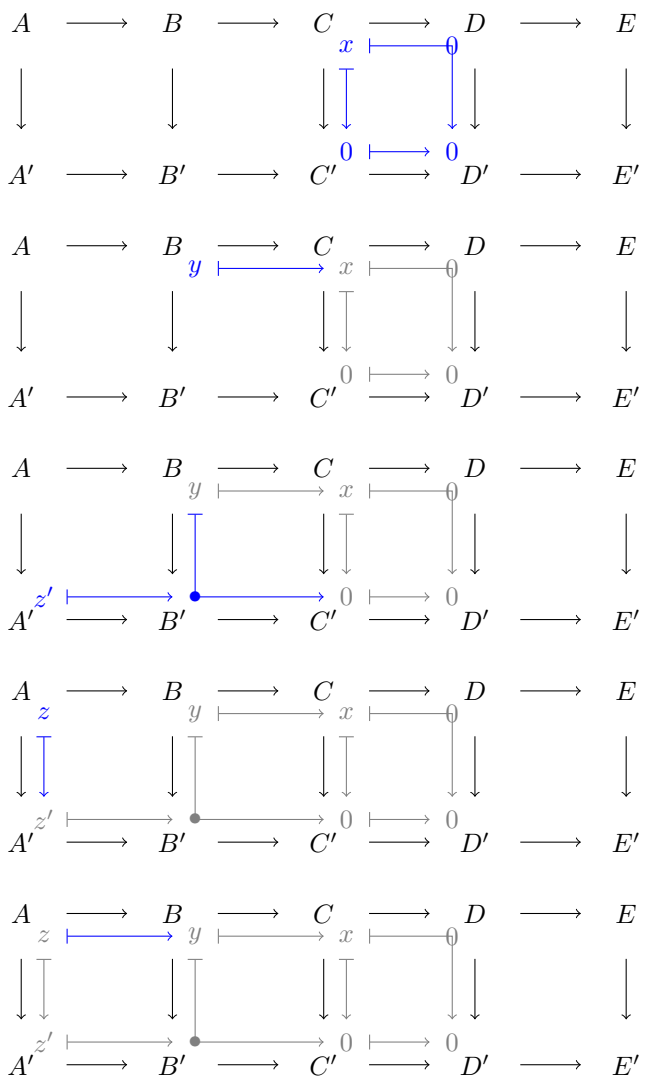


Abbildung (B.7): Die Diagrammjagd aus dem Fünfer-Lemma

ein ($\mathbb{Z}$-indiziertes) kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen. Außerdem sei $f_{C,k}\colon C_k \longrightarrow C'_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$\Delta_k := c_k \circ f_{C,k}^{-1} \circ b'_k \colon B'_k \longrightarrow A_{k-1}.$$

Dann ist die Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\Delta_{k+1}} A_k \xrightarrow{(f_{A,k},-a_k)} A'_k \oplus B_k \xrightarrow{a'_k \oplus f_{B,k}} B'_k \xrightarrow{\Delta_k} A_{k-1} \longrightarrow \ldots$$

exakt.

Beweisskizze. Dies folgt aus einer Diagrammjagd. □

B.2. Kettenkomplexe und Homologie

Wir führen nun allgemeine algebraische Begrifflichkeiten zur Konstruktion von Homologie ein; diese beruhen historisch auf den ersten geometrischen Homologietheorien.

Setup B.9. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition B.10 (Kettenkomplex, Zykel, Rand)**.** Ein *Links-R-Modul-Kettenkomplex* ist eine Paar $C = (C_*, \partial_*)$, wobei $C_* = (C_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Links-R-Moduln (den sogenannten *Kettenmoduln*) und $\partial_* = (\partial_k \colon C_k \longrightarrow C_{k-1})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von R-Modulhomomorphismen (den sogenannten *Randoperatoren* oder *Differentialen*) mit

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad \partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$.

- Die Elemente von C_k heißen *k-Ketten*.
- Die Elemente von $Z_k C := \ker \partial_k$ heißen *k-Zykel*.
- Die Elemente von $B_k C := \operatorname{im} \partial_{k+1}$ heißen *k-Ränder*.

Analog kann man z.B. auch $\mathbb{N}$-indizierte Kettenkomplexe definieren.

Beispiel B.11 (Kettenkomplexe)**.**

- Lange exakte Sequenzen liefern Kettenkomplexe, aber nicht alle Kettenkomplexe sind exakt.
- Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex und ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so ist
$$Z \otimes_R C := \big((Z \otimes_R C_k)_{k\in\mathbb{Z}}, (\mathrm{id}_Z \otimes_R \partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$
ein Kettenkomplex abelscher Gruppen.

Caveat B.12. Ist ein Kettenkomplex C exakt und ist $Z \in \mathsf{Mod}_R$, so ist $Z \otimes_R C$ im allgemeinen *nicht* exakt!

Beispiel B.13 (Kettenkomplexe simplizialer Moduln)**.** Sei $S\colon \Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ein Funktor (ein sogenannter *simplizialer Links-R-Modul*); dabei bezeichnet Δ^{op} die duale

Kategorie der Simplexkategorie (die man durch „Umdrehen“ der Morphismen erhält). Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei

$$C_k(S) := \begin{cases} S\big(\Delta(k)\big) & \text{falls } k \geq 0 \\ 0 & \text{falls } k < 0, \end{cases}$$

$$\partial_k := \begin{cases} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \cdot S(d_j^k) & \text{falls } k > 0 \\ 0 & \text{falls } k \leq 0; \end{cases}$$

dabei ist $d_j^k \in \mathrm{Mor}_\Delta(\Delta(k-1), \Delta(k))$ der Morphismus, dessen Bild $\{0, \ldots, k\} \setminus \{j\}$ ist. Wir schreiben

$$C(S) := \big((C_k(S))_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_k)_{k\in\mathbb{Z}}\big).$$

Dann ist $C(S)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex. Dies ist eine der zentralen Konstruktionen von Kettenkomplexen, die hinter vielen Homologietheorien steckt.

Die passenden strukturerhaltenden Abbildungen zwischen Kettenkomplexen sind Kettenabbildungen:

Definition B.14 (Kettenabbildung)**.** Seien $C = (C_*, \partial_*^C)$ und $D = (D_*, \partial_*^D)$ Links-R-Modul-Kettenkomplexe. Eine *Kettenabbildung* $f\colon C \longrightarrow D$ ist eine Folge $(f_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_k))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit

$$\partial_k^D \circ f_k = f_{k-1} \circ \partial_k^C$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \longrightarrow & C_k & \xrightarrow{\partial_k^C} & C_{k-1} & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_k} & & \downarrow{\scriptstyle f_{k-1}} & & \\ \ldots & \longrightarrow & D_k & \xrightarrow[\partial_k^D]{} & D_{k-1} & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

Beispiel B.15 (Kettenabbildungen)**.**

- Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Kettenkomplex, so ist $\mathrm{id}_C := (\mathrm{id}_{C_k})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenabbildung $C \longrightarrow C$.
- Die gradweise Komposition von Kettenabbildungen ist eine Kettenabbildung.
- Zum Beispiel ist

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \xrightarrow{0} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_\mathbb{Z}} & & \downarrow{\scriptstyle x\mapsto(x,x)} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\ \ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

  keine Kettenabbildung.

Somit erhalten wir eine Kategorie von Kettenkomplexen:

Definition B.16 (Kategorie der Kettenkomplexe)**.** Die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Links-R-Kettenkomplexe besteht aus:

– Objekte: die Klasse aller Links-R-Kettenkomplexe,
– Morphismen: Kettenabbildungen von Links-R-Kettenkomplexen,
– Verknüpfungen: gradweise Komposition von Kettenabbildungen.

Beispiel B.17 (Kettenkomplexe von simplizialen Moduln, funktoriell)**.** Zum Beispiel lässt sich die Konstruktion aus Beispiel B.13 zu einem Funktor

$$\Delta({}_R\mathsf{Mod}) \longrightarrow {}_R\mathsf{Ch}$$

erweitern. Dabei ist $\Delta({}_R\mathsf{Mod})$ die Kategorie, deren Objekte Funktoren $\Delta^{\mathrm{op}} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ und deren Morphismen natürliche Transformationen zwischen solchen Funktoren sind.

Wir können nun Homologie für Kettenkomplexe definieren:

Definition B.18 (Homologie)**.** Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Die *Homologie von* C ist die Folge $H_*(C) := (H_k(C))_{k\in\mathbb{Z}}$, wobei wir für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(C) := \ker \partial_k \,/\, \operatorname{im} \partial_{k+1} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$$

definieren.

Homologie misst also die Abweichung von Exaktheit:

Bemerkung B.19 (Homologie vs. Exaktheit)**.** Sei $C = (C_*, \partial_*) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann sind äquivalent:

1. Die Sequenz

$$\ldots \longrightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \longrightarrow \ldots$$

   ist exakt.
2. Für alle $k \in \mathbb{Z}$ ist $H_k(C) \cong 0$.

Beispiel B.20. Sei C der Kettenkomplex

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{2} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$

abelscher Gruppen (wobei sich die nicht-trivialen Moduln im Grad 0, 1, 2 befinden). Dann gilt für alle $k \in \mathbb{Z}$, dass

$$H_k(C) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } k = 0 \\ \mathbb{Z}/2 & \text{falls } k = 1 \\ 0 & \text{falls } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}. \end{cases}$$

Caveat B.21. Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so gilt im allgemeinen für $k \in \mathbb{Z}$

$$H_k(Z \otimes_R C) \ncong Z \otimes_R H_k(C).$$

Proposition B.22 (Homologie als Funktor)**.**

1. *Sei $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kettenabbildung in ${}_R\mathsf{Ch}$. Zu $k \in \mathbb{Z}$ sei*
$$\begin{aligned} H_k(f)\colon H_k(C) &\longrightarrow H_k(D) \\ [c] &\longmapsto \big[f_k(c)\big]. \end{aligned}$$
Dann ist $H_k(f)$ ein wohldefinierter Links-R-Modul-Homomorphismus.
2. *Dies macht Homologie zu einem Funktor*
$$H_*\colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}\,.$$
Dabei ist ${}_R\mathsf{Grad}$ die Kategorie der $\mathbb{Z}$-graduierten Links-R-Moduln (d.h. $\mathbb{Z}$-Folgen von Links-R-Moduln mit Folgen von Homomorphismen und komponentenweiser Komposition).

Beweisskizze. Zum ersten Teil: Aus der Definition von Kettenabbildungen folgt:
- Ist $c \in C_k$ ein Zykel, so ist auch $f_k(c)$ ein Zykel.
- Sind $c, c' \in C_k$ Zykel, die dieselbe Homologieklasse repräsentieren (d.h. sich um einen Rand in C unterscheiden), so unterscheiden sich auch $f_k(c)$ und $f_k(c')$ um einen Rand in D und liefern somit dieselbe Homologieklasse.

Also ist $H_k(f)$ wohldefiniert. Offenbar ist $H_k(f)$ mit der Modulstruktur verträglich.
Der zweite Teil folgt aus der Konstruktion im ersten Teil. □

Zum Abschluss dieser Einführung in die Grundbegriffe von Kettenkomplexen und Homologie leiten wir die wichtigste Quelle für lange exakte Homologieseuqenzen her:

Satz B.23 (algebraische lange exakte Homologiesequenz)**.** *Sei*
$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } B \xrightarrow{\ p\ } C \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Ch}$ (d.h. die entsprechenden Sequenzen in jedem Grad sind exakt in ${}_R\mathsf{Mod}$). Dann gibt es eine lange exakte Sequenz
$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} H_k(A) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(B) \xrightarrow{H_k(p)} H_k(C) \xrightarrow{\partial_k} H_{k-1}(A) \longrightarrow \ldots$$
Diese ist im folgenden Sinne natürlich: Ist
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\ i\ } & B & \xrightarrow{\ p\ } & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} & & \downarrow{\scriptstyle f_C} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow[i']{} & B' & \xrightarrow[p']{} & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$
ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit exakten Zeilen, so ist das zugehörige Leiterdiagramm
$$\begin{array}{ccccccccccc} \ldots & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & H_k(A) & \xrightarrow{H_k(i)} & H_k(B) & \xrightarrow{H_k(p)} & H_k(C) & \xrightarrow{\partial_k} & H_{k-1}(A) & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_A)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_B)} & & \downarrow{\scriptstyle H_k(f_C)} & & \downarrow{\scriptstyle H_{k-1}(f_A)} & & \\ \ldots & \xrightarrow[\partial_{k+1}]{} & H_k(A') & \xrightarrow[H_k(i')]{} & H_k(B') & \xrightarrow[H_k(p')]{} & H_k(C') & \xrightarrow[\partial_k]{} & H_{k-1}(A') & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$

kommutativ (mit exakten Zeilen).

Beweisskizze. Sei $k \in \mathbb{Z}$. Wir konstruieren den Verbindungshomomorphismus

$$\partial_k \colon H_k(C) \longrightarrow H_{k-1}(A)$$

wie folgt: Sei $\gamma \in H_k(C)$; sei $c \in C_k$ ein Zykel, der γ repräsentiert. Da $p_k \colon B_k \longrightarrow C_k$ surjektiv ist, existiert ein $b \in B_k$ mit

$$p_k(b) = c.$$

Da p eine Kettenabbildung ist, ist $p_{k-1} \circ \partial_k^B(b) = \partial_k^C \circ p_k(b) = \partial_k^C(c) = 0$; aufgrund der Exaktheit im Grad k existiert somit ein $a \in A_{k-1}$ mit

$$i_{k-1}(a) = \partial_k^B(b).$$

Wir nennen in dieser Situation (a, b, c) ein *kompatibles Tripel für* γ und definieren

$$\partial_k(\gamma) := [a] \in H_{k-1}(A).$$

Mit einfachen Diagrammjagden zeigt man nun:

- Ist (a, b, c) ein kompatibles Tripel für γ, so ist $a \in A_{k-1}$ ein Zykel und repräsentiert somit tatsächlich eine Klasse in $H_{k-1}(A)$.
- Sind (a, b, c) und (a', b', c') kompatible Tripel für γ, so ist $[a] = [a']$ in $H_{k-1}(A)$.

Daran lässt sich leicht ablesen, dass ∂_k ein Homomorphismus ist und dass ∂_k natürlich ist.

Weitere Diagrammjagden liefern, dass die entstehende lange Sequenz exakt ist. □

B.3. Kettenhomotopie

Im folgenden studieren wir einen algebraischen Homotopiebegriff für Kettenabbildungen.

Setup B.24. In diesem Abschnitt sei R ein Ring mit Eins.

Wir erinnern uns zunächst an den Homotopiebegriff in Top: Stetige Abbildungen $f, g \colon X \longrightarrow Y$ zwischen topologischen Räumen sind homotop, wenn es eine stetige Abbildung $h \colon X \times [0,1] \longrightarrow Y$ mit

$$h \circ i_0 = f \quad \text{und} \quad h \circ i_1 = g$$

gibt; dabei bezeichnen $i_0 \colon X \hookrightarrow X \times \{0\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ und $i_1 \colon X \hookrightarrow X \times \{1\} \hookrightarrow X \times [0,1]$ die kanonische Inklusion als Boden bzw. Deckel des Zylinders über X.

Wir übersetzen dies nun in die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}$ der Kettenkomplexe: Als ersten Schritt modellieren wir das Intervall $[0,1]$ durch einen geeigneten Kettenkomplex (Abbildung (B.26), vgl. Beispiel II.4.19):

$$\begin{array}{cc} \text{Grad } 1 & \text{Grad } 0 \\ \mathbb{Z} & \longrightarrow \quad \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto \quad (-x, x) \end{array}$$

Abbildung (B.26): ein algebraisches Modell für $[0,1]$

Definition B.25 (algebraisches Modell für $[0,1]$)**.** Sei $I \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ der Kettenkomplex

$$\begin{array}{lccccccccccc} \text{Grad} & & & 2 & & 1 & & 0 & & -1 & & \\ \ldots & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & 0 & \xrightarrow[0]{} & \ldots \\ & & & & & & x & \longmapsto & (-x, x) & & & & & & \end{array}$$

Das Produkt topologischer Räume ersetzen wir durch das Tensorprodukt von Kettenkomplexen; die Definition leitet sich dabei von dem Gedanken ab, dass die Kettenmoduln in Grad k Information über k-dimensionale Phänomene enthalten und sich daher die Grade der Tensorfaktoren jeweils auch zum entsprechenden Grad summieren sollten:

Definition B.27 (Tensorprodukt von Kettenkomplexen)**.** Sei $C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$ und $D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann definieren wir $C \otimes_R D \in \mathrm{Ob}({}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch})$ durch

$$(C \otimes_R D)_k := \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} C_j \otimes_R D_{k-j}$$

und die Randoperatoren

$$\begin{array}{c} (C \otimes_R D)_k \longrightarrow (C \otimes_R D)_{k-1} \\ C_j \otimes_R D_{k-j} \ni c \otimes d \longmapsto \partial^C_j c \otimes d + (-1)^j \cdot c \otimes \partial^D_{k-j} d \end{array}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Dies ist tatsächlich ein Kettenkomplex!) Man beachte dabei: Trägt C auch noch eine Linksstruktur bezüglich einem Ring S, so vererbt sich diese Struktur auf das Tensorprodukt $C \otimes_R D$.

Bemerkung B.28 (Wahl von Vorzeichen)**.** Wir halten uns bei der Wahl von Vorzeichen an die folgende Konvention: Wird ein Randoperator an einem Element „vorbeigezogen“, so führen wir das Vorzeichen

$$(-1)^{\text{Grad dieses Elements}}$$

ein. Man beachte jedoch, dass in der Literatur manchmal auch andere Vorzeichenkonventionen getroffen werden. Bei der Übernahme von Formeln ist also Vorsicht geboten.

Bemerkung B.29 (Funktorialität des Tensorprodukts)**.** Seien $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$, seien $D, D' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ch}_R}(C, C')$ und $g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, D')$. Dann ist

$$\begin{aligned} f \otimes_R G \colon C \otimes_R D &\longrightarrow C' \otimes_R D' \\ c \otimes d &\longmapsto f(c) \otimes g(d) \end{aligned}$$

eine wohldefinierte Kettenabbildung in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$.

Als nächsten Schritt modellieren wir die Inklusionen von Boden und Deckel von Zylindern:

Definition B.30 (algebraisches Modell der Inklusionen von Boden und Deckel in Zylindern)**.** Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so definieren wir die Kettenabbildungen

$$\begin{aligned} i_0 \colon C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I \\ C_k \ni c &\longmapsto (c, 0, 0) \in C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \cong (C \otimes_{\mathbb{Z}} I)_k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} i_1 \colon C &\longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I \\ C_k \ni c &\longmapsto (0, 0, c) \in C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \cong (C \otimes_{\mathbb{Z}} I)_k. \end{aligned}$$

Bemerkung B.31. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Eine Kettenabbildung $h \colon C \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow D$ in ${}_R\mathsf{Ch}$ mit $h \circ i_0 = f$ und $h \circ i_1 = g$ entspricht einer Familie $(\widetilde{h}_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_{k+1}))_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

$$\partial^D_{k+1} \circ \widetilde{h}_k = \widetilde{h}_{k-1} \circ \partial^C_k + (-1)^k \cdot g_k - (-1)^k \cdot f_k$$

(Abbildung (B.32)) bzw.

$$\partial^D_{k+1} \circ (-1)^k \cdot \widetilde{h}_k + (-1)^{k-1} \cdot \widetilde{h}_{k-1} \circ \partial^C_k = g_k - f_k$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Man definiert daher:

Definition B.33 (kettenhomotop, nullhomotop, kontraktibel)**.** Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.

- Kettenabbildungen $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ heißen *kettenhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, wenn es eine Folge $h = (h_k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C_k, D_{k+1}))_{k \in \mathbb{Z}}$ mit

  $$\partial^D_{k+1} \circ h_k + h_{k-1} \circ \partial^C_k = g_k - f_k$$

  für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt. Man nennt dann h eine *Kettenhomotopie von f nach g (in ${}_R\mathsf{Ch}$)* und schreibt $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g$.
- Wir nennen $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ eine *Kettenhomotopieäquivalenz (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, falls es ein $g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, C)$ mit

  $$f \circ g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_D \quad \text{und} \quad g \circ d \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_C$$

  gibt. In diesem Fall schreiben wir auch $C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} D$.

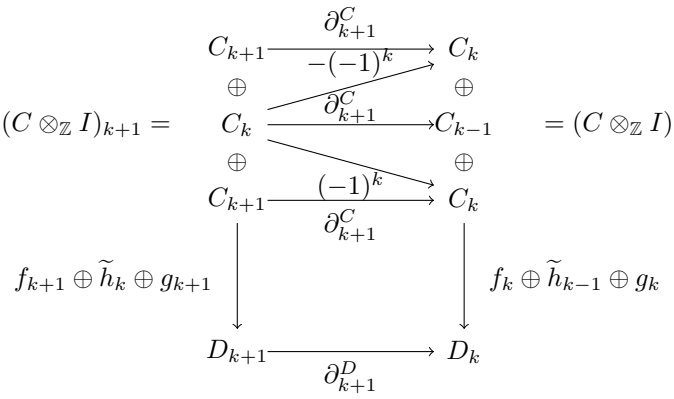


Abbildung (B.32): Herleitung des Begriffs der Kettenhomotopie

- Kettenabbildungen, die (in ${}_R\mathsf{Ch}$) zur Nullabbildung kettenhomotop sind, heißen *nullhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*.
- Der Kettenkomplex C ist *kontraktibel (in ${}_R\mathsf{Ch}$)*, falls id_C nullhomotop (in ${}_R\mathsf{Ch}$) ist (bzw. äquivalent, falls C zum Nullkomplex kettenhomotopieäquivalent ist). Homotopien (in ${}_R\mathsf{Ch}$) von id_C zur Nullabbildungen werden auch *Kettenkontraktionen (in ${}_R\mathsf{Ch}$) von C* genannt.

Beispiel B.34. Sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$. Dann ist $i_0 \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} i_1 \colon C \longrightarrow C \otimes_{\mathbb{Z}} I$.
Wir betrachten außerdem die Kettenabbildung

$$p \colon C \otimes_{\mathbb{Z}} I \longrightarrow C$$
$$C_k \oplus C_{k-1} \oplus C_k \ni (c_0, c, c_1) \longrightarrow c_0 + c_1 \in C_k$$

in ${}_R\mathsf{Ch}$. Dann gilt $p \circ i_0 = \mathrm{id}_C$ und $i_0 \circ p \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} \mathrm{id}_{C \otimes_{\mathbb{R}} I}$. Also ist

$$C \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} C \otimes_{\mathbb{Z}} I.$$

Analog zur topologischen Situation gilt:

Proposition B.35 (grundlegende Eigenschaften von Kettenhomotopie)**.**

1. *Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, f', g, g' \in \mathrm{Mor}({}_R\mathsf{Ch})$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$ und $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann gilt*
$$a \cdot f + b \cdot g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} a \cdot f' + b \cdot g'$$
für alle $a, b \in R$.
2. *Sind $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so ist „$\simeq_{{}_R\mathsf{Ch}}$“ eine Äquivalenzrelation auf $\mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$.*
3. *Seien $C, D, E \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, seien $f, f' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ und $g, g' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, E)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} f'$ bzw. $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. Dann folgt*
$$g \circ f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g' \circ f'.$$

4. *Seien* $C, C' \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Ch}_R)$, $D, D' \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ *und seien* $f, f' \in \mathrm{Mor}_{\mathsf{Ch}_R}(C, C')$, $g, g' \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(D, D')$ *mit* $f \simeq_{\mathsf{Ch}_R} f'$ *bzw.* $g \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g'$. *Dann folgt*

$$f \otimes_R g \simeq_{{}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}} f' \otimes_R g'.$$

Beweisskizze. All diese Eigenschaften lassen sich direkt anhand der Definitionen nachrechnen. □

Insbesondere ist die folgende Kategorie wohldefiniert:

Definition B.36 (Homotopiekategorie der Kettenkomplexe)**.** Die *Homotopiekategorie der Kettenkomplexe* ${}_R\mathsf{Ch}$ ist die Kategorie ${}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}$, die durch die folgenden Daten gegeben ist:

- Objekte: Sei $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}) := \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$.
- Morphismen: Zu $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ sei

$$[C, D] := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}_\mathsf{h}}(C, D) := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D) \,/{\simeq_{{}_R\mathsf{Ch}}}\,.$$

- Verknüpfungen: repräsentantenweise Verknüpfung von Kettenabbildungen.

Die zentrale Eigenschaft des Begriffs der Kettenhomotopie ist, dass Homologie in diesem algebraischen Sinne homotopieinvariant ist:

Proposition B.37 (Homologie von Kettenkomplexen ist homotopieinvariant)**.** *Der Funktor* $H_*\colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$ *faktorisiert über* ${}_R\mathsf{Ch}_h$.

Beweisskizze. Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und seien $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$ mit $f \simeq_{{}_R\mathsf{Ch}} g$; sei etwa h eine solche Kettenhomotopie. Dann ist $H_k(f) = H_k(g)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, denn: Ist $c \in C_k$ ein Zykel, so gilt nach Definition (in $H_k(D)$)

$$\begin{aligned} H_k(f)[c] &= \big[f_k(c)\big] \\ &= \big[g_k(c) - \partial^D_{k+1} \circ h_k(c) - h_{k-1} \circ \partial^C_k(c)\big] \\ &= \big[g_k(c) - \partial^D_{k+1} \circ h_k(c) - 0\big] \\ &= \big[g_k(c)\big] \\ &= H_k(g)[c], \end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Analog zum topologischen Fall gibt es auch im Kontext von Kettenkomplexen Abbildungskegel:

Definition B.38 (Abbildungskegel von Kettenabbildungen)**.** Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$. Der *Abbildungskegel von* f ist der Kettenkomplex $\mathrm{Cone}(f) \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ mit

$$\big(\mathrm{Cone}(f)\big)_k := C_{k-1} \oplus D_k$$

und den Randoperatoren

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{Cone}(f)\big)_k &\longmapsto \big(\mathrm{Cone}(f)\big)_{k-1} \\ C_{k-1} \oplus D_k \ni (c, d) &\longmapsto \big(\partial^C_{k-1} c, \partial^D_k d + (-1)^k \cdot f_{k-1}(c)\big) \end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$. (Dies ist tatsächlich ein Kettenkomplex.)

Im algebraischen Kontext spiegeln Abbildungskegel die Eigenschaften von Kettenabbildungen sogar noch etwas besser wider als im topologischen Fall:

Proposition B.39 (Abbildungskegel und Isomorphismen)**.** *Seien* $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ *und sei* $f \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Ch}}(C, D)$*.*

1. *Dann ist* $f\colon C \longrightarrow D$ *genau dann eine Kettenhomotopieäquivalenz in* ${}_R\mathsf{Ch}$*, wenn* $\mathrm{Cone}(f)$ *in* ${}_R\mathsf{Ch}$ *kontraktibel ist.*
2. *Es ist* $H_*(f)\colon H_*(C) \longrightarrow H_*(D)$ *genau dann ein Isomorphismus in* ${}_R\mathsf{Grad}$*, wenn* $H_*(\mathrm{Cone}(f)) \cong 0$ *ist.*

Caveat B.40. Kettenabbildungen, die Homologieisomorphismen induzieren, sind im allgemeinen *keine* Kettenhomotopieäquivalenzen!

Zum Beispiel liefert die Kettenabbildung

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{2} & \mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{mod}\ 2} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}/2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ Isomorphismen in Homologie; da die einzige Kettenabbildung in die andere Richtung die Nullabbildung ist und die Kettenkomplexe aber nicht kontraktibel sind (die Homologie ist nicht trivial), kann es sich dabei aber *nicht* um eine Kettenhomotopieäquivalenz handeln.

B.4. Kokettenkomplexe und Kohomologie

Wir dualisieren nun die Begriffe Kettenkomplex/Homologie etc. durch „Umdrehen der Pfeile.“ Dies führt zu Kokettenkomplexen/Kohomologie etc..

Setup B.41. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Definition B.42 (Kokettenkomplex, Kozykel, Korand)**.** Ein *Links-R-Modul-Kokettenkomplex* ist eine Paar $C = (C^*, \delta^*)$, wobei $C^* = (C^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von Links-R-Moduln (den sogenannten *Kokettenmoduln*) und $\delta^* = (\delta^k\colon C^k \longrightarrow C^{k+1})_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von R-Modulhomomorphismen (den sogenannten *Korandoperatoren*) mit

$$\forall_{k\in\mathbb{Z}} \quad \delta^k \circ \delta^{k-1} = 0$$

ist. Sei $k \in \mathbb{Z}$.

- Die Elemente von C^k heißen *k-Koketten.*
- Die Elemente von $Z^kC := \ker \delta^k$ heißen *k-Kozykel.*
- Die Elemente von $B^kC := \mathrm{im}\, \delta^{k+1}$ heißen *k-Koränder.*

Analog kann man z.B. auch $\mathbb{N}$-indizierte Kokettenkomplexe definieren.

Der Begriff des Kozykels tritt in der Mathematik an vielen Stellen auf – im Normalfall gibt es dann auch tatsächlich einen sinnvollen zugehörigen Kokettenkomplex (auch wenn dieser nicht immer explizit erwähnt wird).

Beispiel B.43 (Kettenkomplexe als Kokettenkomplexe)**.** Ist $C = (C_*, \partial_*)$ ein Links-R-Modul-Kettenkomplex, so ist

$$C_- := \big((C_{-k})_{k\in\mathbb{Z}}, (\partial_{-k})_{k\in\mathbb{Z}}\big)$$

ein Links-R-Modul-Kokettenkomplex. Analog erhält man zu einem Links-R-Modul-Kokettenkomplex durch Umindizierung einen Links-R-Modul-Kettenkomplex C^-.

Mithilfe dieser Konstruktion können wir nun alle Begriffe/Ergebnisse für Kettenkomplexe in entsprechende Begriffe/Ergebnisse für Kokettenkomplexe übersetzen. Wir geben hier nur die wichtigsten Beispiele an:

Definition B.44 (Kohomologie)**.** Sei $C = (C^*, \delta^*)$ ein Links-R-Modul-Kokettenkomplex. Die *Kohomologie von* C ist der graduierte Modul

$$H^*(C) := \big(H^k(C)\big)_{k\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Grad}),$$

wobei wir für alle $k \in \mathbb{Z}$

$$H^k(C) := \ker \delta^k \,/\, \mathrm{im}\, \delta^{k-1} \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$$

definieren.

Definition B.45 (Kokettenabbildung, Kokettenhomotopie)**.** Seien $C = (C^*, \delta_C^*)$ und $D = (D^*, \delta_D^*)$ Links-R-Modul-Kokettenkomplexe.

- Eine *Kokettenabbildung* $f\colon C \longrightarrow D$ ist eine Folge $(f^k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C^k, D^k))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit
$$\delta_D^k \circ f^k = f^{k+1} \circ \delta_C^k$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$.
$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & \longrightarrow & C^k & \xrightarrow{\delta_C^k} & C^{k+1} & \longrightarrow & \ldots \\ & & \downarrow{\scriptstyle f^k} & & \downarrow{\scriptstyle f^{k+1}} & & \\ \ldots & \longrightarrow & D^k & \xrightarrow[\delta_D^k]{} & D^{k+1} & \longrightarrow & \ldots \end{array}$$
- Kokettenabbildungen $f, g \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{CoCh}}(C, D)$ heißen *kokettenhomotop (in* ${}_R\mathsf{CoCh}$*)*, wenn es eine Folge $h = (h^k \in \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C^k, D^{k-1}))_{k\in\mathbb{Z}}$ mit
$$h^{k+1} \circ \delta_C^k + \delta_D^{k-1} \circ h^k = g^k - f^k$$
für alle $k \in \mathbb{Z}$ gibt. Man nennt dann h eine *Kokettenhomotopie von* f *nach* g *(in* ${}_R\mathsf{CoCh}$*)* und schreibt $f \simeq_{{}_R\mathsf{CoCh}} g$.

Die Eigenschaften aus Proposition B.35 übertragen sich entsprechend auf Kokettenhomotopien. Somit erhalten wir eine (Homotopie-)Kategorie von Kokettenkomplexen:

Definition B.46 ((Homotopie-)Kategorie der Kokettenkomplexe)**.**

- Die *Kategorie* ${}_R\mathsf{CoCh}$ *der Links-*R*-Kokettenkomplexe* besteht aus:

  - Objekte: die Klasse aller Links-R-Kokettenkomplexe,
  - Morphismen: Kokettenabbildungen von Links-R-Kokettenkomplexen,
  - Verknüpfungen: gradweise Komposition von Kokettenabbildungen.
- Die *Homotopiekategorie der Kokettenkomplexe* ist die Kategorie ${}_R\mathsf{CoCh}_\mathsf{h}$, die durch die folgenden Daten gegeben ist:
  - Objekte: Sei $\mathrm{Ob}({}_R\mathsf{CoCh}_\mathsf{h}) := \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{CoCh})$.
  - Morphismen: Zu $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{CoCh})$ sei

$$[C, D] := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{CoCh}_\mathsf{h}}(C, D) := \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{CoCh}}(C, D) \,/{\simeq_{{}_R\mathsf{CoCh}}} .$$

  - Verknüpfungen: repräsentantenweise Verknüpfung von Kokettenabbildungen.

Analog zum Fall der Kettenkomplexe erweitern wir die Definition von Kohomologie zu einem (kovarianten!) Funktor

$$H^* \colon {}_R\mathsf{CoCh} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad},$$

indem wir für $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{CoCh})$ und $k \in \mathbb{Z}$ folgendes definieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{CoCh}}(C, D) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_R\mathsf{Mod}}\big(H^k(C), H^(D)\big) \\ f &\longmapsto \big([c] \mapsto [f^k(c)]\big) \end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung wie im Fall von Homologie zeigt:

Proposition B.47 (Kohomologie ist homotopieinvariant)**.** *Der Kohomologiefunktor* $H^* \colon {}_R\mathsf{CoCh} \longrightarrow {}_R\mathsf{Grad}$ *faktorisiert über den Homotopieklassenfunktor* ${}_R\mathsf{CoCh} \longrightarrow {}_R\mathsf{CoCh}_h$.

Außerdem erhalten wir:
- die natürliche lange exakte Kohomologiesequenz für gradweise kurze exakte Sequenzen von Kokettenkomplexen (analog zu Satz B.23),
- Abbildungskegel für Kokettenabbildungen und den Zusammenhang zwischen „Isomorphismen“ und Abbildungskegeln (analog zu Definition B.38 und Proposition B.39).

Wir geben nun das für uns zentrale Beispiel von Kokettenkomplexen an:

Definition B.48 (dualer Kokettenkomplex)**.** Sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Der kontravariante Funktor

$$\mathrm{Hom}_R(\,\cdot\,, Z) \colon {}_R\mathsf{Ch} \longrightarrow {}_\mathbb{Z}\mathsf{CoCh}$$

ist wie folgt definiert:
- Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, so definieren wir $\mathrm{Hom}_R(C, Z)$ als den Kokettenkomplex

$$\left(\big(\mathrm{Hom}_R(C_k, Z)\big)_{k\in\mathbb{Z}}, \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_R(C_k, Z) & \to & \mathrm{Hom}_R(D_k, Z) \\ f & \mapsto & \big(c \mapsto (-1)^{k+1} \cdot f(\partial_{k+1}(c))\big) \end{pmatrix}_{k\in\mathbb{Z}}\right)$$

  abelscher Gruppen.

– Ist $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kokettenabbildung in ${}_R\mathsf{CoCh}$, so ist

$$\mathrm{Hom}_R(f,Z)\colon \mathrm{Hom}_R(D,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,Z)$$

die durch

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(D_k,Z) &\longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C_k,Z)\\ g &\longmapsto \big(c \mapsto g(f(c))\big)\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ gegebene Kokettenabbildung.

Woher kommt die Wahl des Vorzeichens in der Definition des dualen Korandoperators?

Proposition B.49 (Auswertungsabbildung)**.** *Sei $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $Z \in {}_R\mathsf{Mod}$. Dann ist*

$$\mathrm{Hom}_R(C,Z)^- \otimes_{\mathbb{Z}} C \longrightarrow Z$$

$$\mathrm{Hom}_R(C_{-k},Z) \otimes_{\mathbb{Z}} C_m \ni f \otimes c \longmapsto \begin{cases} f(c) & \text{falls } -k = m\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

eine wohldefinierte Kettenabbildung. Dabei fassen wir Z als im Grad 0 konzentrierten Kettenkomplex auf.

Beweisskizze. Dies folgt aus einer einfachen Rechnung aus der Definition des dualen Kokettenkomplexes und der Definition des Tensorproduktes von Kettenkomplexen (Definition B.27). □

Caveat B.50. Ist $C \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und ist $Z \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, so gilt im allgemeinen für $k \in \mathbb{Z}$

$$H^k\big(\mathrm{Hom}_R(C,Z)\big) \ncong \mathrm{Hom}_R\big(H_k(C),Z\big).$$

Proposition B.51 (Dualisieren von Kettenhomotopien)**.** *Seien $C, D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$ und sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Ist $(h_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Kettenhomotopie zwischen $f, g\colon \mathrm{Mor}_{{}_R\mathsf{Mod}}(C,D)$ in ${}_R\mathsf{Ch}$, so ist*

$$\big((-1)^k \cdot \mathrm{Hom}_R(h_{k-1},Z)\colon \mathrm{Hom}_R(D,Z)^k \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,Z)^{k-1}\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

eine Kokettenhomotopie zwischen $\mathrm{Hom}_R(f,Z)$ und $\mathrm{Hom}_R(g,Z)$.

Beweisskizze. Dies folgt durch einfaches Nachrechnen. □

Aus der Homotopieinvarianz von Kohomologie und der Funktorialität von Kohomologie folgt somit:

Korollar B.52 (Dualisieren von Kettenhomotopieäquivalenzen)**.** *Seien C und $D \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Ch})$, sei $Z \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, und sei $f\colon C \longrightarrow D$ eine Kettenhomotopieäquivalenz in ${}_R\mathsf{Ch}$. Dann ist $\mathrm{Hom}_R(f,Z)\colon \mathrm{Hom}_R(D,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(C,Z)$ eine Kokettenhomotopieäquivalenz in ${}_R\mathsf{CoCh}$. Insbesondere ist*

$$H^k\big(\mathrm{Hom}_R(f,Z)\big)\colon H^k\big(\mathrm{Hom}_R(D,Z)\big) \longrightarrow H^k\big(\mathrm{Hom}_R(C,Z)\big)$$

für alle $k \in \mathbb{Z}$ ein Isomorphismus.

B.5. Azyklische Modelle

Die Methode der azyklischen Modelle liefert eine Möglichkeit, systematisch natürliche Kettenabbildungen bzw. Kettenhomotopien zu konstruieren, und beruht auf einer funktoriellen Variante des Fundamentalsatzes der homologischen Algebra (Satz B.83). Genauer, erlaubt es der Satz über azyklische Modelle (Satz B.60) natürliche Kettenabbildungen/-homotopien von freien in azyklische Funktoren zu konstruieren:

Definition B.53 (freier Funktor, Modelle für freie Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie. Ein Funktor $F\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ heißt *frei*, wenn es eine Menge I und eine Familie $(B_i, b_i)_{i\in I}$ von Objekten $B_i \in \mathrm{Ob}(C)$ und Elementen $b_i \in F(B_i)$ mit folgender Eigenschaft gibt: Für alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$ ist $F(X)$ ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis

$$\big(F(f)(b_i)\big)_{i\in I, f\in \mathrm{Mor}_C(B_i,X)}.$$

Man nennt $(B_i, b_i)_{i\in I}$ dann auch *Modelle für* F.

Wir erweitern diesen Begriff nun auf Kettenkomplexe: Ist C eine Kategorie, so entspricht ein Funktor $F\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$ einer Folge $(F_n\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod})_{n\in\mathbb{Z}}$ von Funktoren zusammen mit einer Folge $(d_n^F\colon F_n \Longrightarrow F_{n-1})_{n\in\mathbb{Z}}$ von natürlichen Transformationen mit $d_n^F \circ d_{n+1}^F = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Unsere Argumente im folgenden werden auf induktiven Konstruktionen beruhen; daher betrachten wir sogenannte beschränkte Kettenkomplexe:

Definition B.54 (beschränkte Kettenkomplexe)**.** Die Kategorie ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ der beschränkten Kettenkomplexe von $\mathbb{Z}$-Moduln ist die Unterkategorie von ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}$, deren Objekte Kettenkomplexe C mit $C_n \cong_{\mathbb{Z}} 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sind.

Definition B.55 (freier Funktor in beschränkte Kettenkomplexe)**.** Sei C eine Kategorie. Ein Funktor $F\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ heißt *frei*, wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ (bzw., äquivalent, für alle $n \in \mathbb{N}$) der von F induzierte Funktor $F_n\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ frei ist.

Beispiel B.56. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist $C_n(\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ein freier Funktor: Ist $n < 0$, so liefert die leere Familie Modelle. Ist $n \geq 0$, so ist $(\Delta^n, \mathrm{id}_{\Delta^n})$ ein Modell.

Also ist $C(\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ein freier Funktor.

Für freie Funktoren gilt die folgende Variante des Yoneda-Lemmas (Bemerkung 1.34), wie man leicht nachrechnen kann:

Bemerkung B.57 (Yoneda-Lemma für freie Funktoren)**.** Sei C eine Kategorie, sei $F\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ein freier Funktor mit Modellen $(B_i, b_i)_{i\in I}$ und sei $G\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$

ein Funktor. Dann sind

$$\begin{array}{ccc} \text{„Menge“ der} & & \\ \text{natürlichen Transformationen} & \rightleftarrows & \prod_{i\in I} G(B_i) \\ F \Longrightarrow G & & \end{array}$$

$$T \longmapsto \big(T_{B_i}(b_i)\big)_{i\in I}$$

$$\begin{pmatrix} F(X) & & \to & G(X) \\ \forall_{f\in \mathrm{Mor}_C(B_i,X)} & \forall_{i\in I} & & \\ F(f)(b_i) & & \mapsto & G(f)(c_i) \end{pmatrix}_{X\in \mathrm{Ob}(C)} \qquad \longleftarrow\!\shortmid (c_i)_{i\in I}$$

zueinander inverse Bijektionen.[21]

Definition B.58 (azyklischer Funktor)**.** Sei C eine Kategorie und sei $F\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ein freier Funktor mit (gradweise) Modellen $(B_i^n, b_i^n)_{n\in\mathbb{N}, i\in I_n}$. Ein Funktor $G\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ist *azyklisch bezüglich F und diesen Modellen*, wenn

$$H_n\big(G(B_i^m)\big) \cong_{\mathbb{Z}} 0$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, alle $i \in I_m$ und alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt.

Beispiel B.59. Der singuläre Kettenkomplexfunktor $C(\,\cdot\,)\colon \mathsf{Top} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ist frei mit Modellen $(\Delta^n, \mathrm{id}_{\Delta^n})_{n\in\mathbb{N}}$ (Beispiel B.56) und azyklisch bezüglich sich selbst und diesen Modellen, denn für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle $n \in \mathbb{N}_{>0}$ folgt aus der Homotopieinvarianz singulärer Homologie, dass

$$H_n\big((C(\Delta^m)\big) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(\Delta^m) \cong_{\mathbb{Z}} H_n(\bullet) \cong_{\mathbb{Z}} 0.$$

Satz B.60 (der Satz über azyklische Modelle)**.** *Sei C eine Kategorie, sei $F\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ frei mit Modellen $(B_i^n, b_i^n)_{n\in\mathbb{N}, i\in I_n}$ und sei $G\colon C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ ayzklisch bezüglich F und diesen Modellen. Außerdem sei eine natürliche Transformation $\varphi\colon H_0 \circ F \Longrightarrow H_0 \circ G$ gegeben.*

1. *Dann existiert eine natürliche Transformation $T\colon F \Longrightarrow G$*

$$\begin{array}{ccc} F_{n-1} & \xleftarrow{\partial_n^F} & F_n \\ {\scriptstyle T_{n-1}}\Big\Downarrow & & \Big\Downarrow{\scriptstyle T_n} \\ G_{n-1} & \xleftarrow[\partial_n^G]{} & G_n \end{array}$$

von Funktoren $C \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ mit

$$H_0 \circ T = \varphi.$$

[21] Strenggenommen bildet die linke Seite keine Menge; es ist jedoch klar, wie die Aussage zu interpretieren ist.

2. *Sind $S, T\colon F \Longrightarrow G$ natürliche Transformationen mit $H_0 \circ T = \varphi = H_0 \circ S$, so gibt es eine natürliche Kettenhomotopie zwischen S und T, d.h. es gibt eine Folge $(K_n\colon F_n \Longrightarrow G_{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ natürlicher Transformationen mit*

$$\partial^G_{n+1,X} \circ K_{n,X} + K_{n-1,X} \circ \partial^F_{n,X} = T_{n,X} - S_{n,X}$$

für alle $n \in \mathbb{Z}$ und alle $X \in \mathrm{Ob}(C)$.

Beweisskizze. Wir beginnen mit dem ersten Teil: Wir konstruieren induktiv eine natürliche Transformation $T\colon F \Longrightarrow G$ mit $H_0 \circ T = \varphi$:

- *Induktionsanfang.* Für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $T_n := 0$.
  Wir definieren $T_0\colon F_0 \Longrightarrow G_0$ durch das Yoneda-Lemma für freie Funktoren (Bemerkung B.57): Sei $i \in I_0$. Da die betrachteten Kettenkomplexe in ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Ch}^+$ liegen, ist $F_0(b_i^0) \in F_0(B_i^0)$ ein Zykel. Wir wählen dann einen Zykel $c_i \in G_0(B_i^0)$, der
  $$[c_i] = \varphi_{B_i^0}\big([F(b_i^0)]\big)$$
  in $H_0(G(B_i^0))$ erfüllt. Mit dem Yoneda-Lemma für freie Funktoren liefert die Familie $(c_i)_{i\in I}$ eine natürliche Transformation $T_0\colon F_0 \Longrightarrow G_0$ und nach Konstruktion gilt „$H_0 \circ T_0$“ $= \varphi$.
- *Induktionsschritt.* Sei $n \in \mathbb{N}$ und es seien bereits $(T_j\colon F_j \Longrightarrow G_j)_{j\in\mathbb{Z}_{\le n}}$ mit „$H_0 \circ T_0$“ $= \varphi$ und
  $$\forall_{j\in\mathbb{Z}_{\le n}} \quad \partial^G_j \circ T_j = T_{j-1} \circ \partial^F_j$$
  konstruiert. Wir konstruieren nun mit dem Yoneda-Lemma für freie Funktoren eine natürliche Transformation $T_{n+1}\colon F_{n+1} \Longrightarrow G_{n+1}$ mit
  $$T_n \circ \partial^F_{n+1} = \partial^G_{n+1} \circ T_{n+1}.$$
  Sei also $i \in I_{n+1}$. Dann ist
  $$T_{n,B_i^{n+1}} \circ \partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1}) \in \operatorname{im} \partial^G_{n+1,B_i^{n+1}}$$
  denn (Abbildung (B.61)): Wir unterscheiden dabei die folgenden Fälle:
  - Sei $n = 0$. Dann ist $\partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1})$ ein Zykel bzw. sogar auch ein Rand in $F_0(B_i^{n+1})$ und nach Induktionsvoraussetzung ist daher
    $$\big[T_n \circ \partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1})\big] = \big[T_0 \circ \partial^F_{1,B_i^1}(b_i^1)\big] = \varphi\big[\partial^F_{1,B_i^1}(b_i^1)\big] = \varphi(0) = 0$$
    in $H_0(G(B_i^1))$, wie gewünscht.
  - Sei $n > 0$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung
    $$\begin{aligned}\partial^G_{n,B_i^{n+1}} \circ T_{n,B_i^{n+1}} \circ \partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1}) &= T_{n-1,B_i^{n+1}} \circ \partial_{n,B_i^{n+1}} \circ \partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1}) \\ &= 0.\end{aligned}$$
    Da G azyklisch ist, ist $H_n(G(B_i^{n+1})) \cong_{\mathbb{Z}} 0$ bzw. $\ker \partial^G_{n,B_i^{n+1}} = \operatorname{im} \partial^G_{n+1,B_i^{n+1}}$. Also ist auch in diesem Fall $T_{n,B_i^{n+1}} \circ \partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1}) \in \operatorname{im} \partial^G_{n+1,B_i^{n+1}}$, wie behauptet.

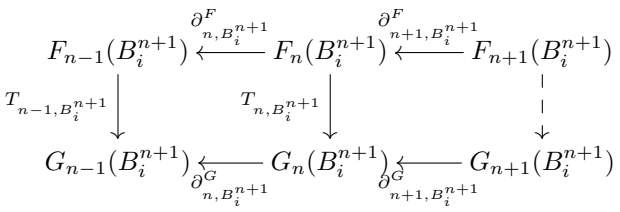


Abbildung (B.61): Induktionsschritt im Beweis des Satzes über azyklische Modelle

Insbesondere existiert ein $c_i \in G_{n+1}(B_i^{n+1})$ mit

$$T_{n,B_i^{n+1}} \circ \partial^F_{n+1,B_i^{n+1}}(b_i^{n+1}) = \partial^G_{n+1,B_i^{n+1}}(c_i).$$

Wenden wir das Yoneda-Lemma für freie Funktoren auf $(c_i)_{i\in I_{n+1}}$ an, so erhalten wir eine natürliche Transformation $T_{n+1}\colon F_{n+1} \Longrightarrow G_{n+1}$; diese besitzt die gewünschten Eigenschaften, da sie sie nach Konstruktion auf den Modellen $(B_i^{n+1}, b_i^{n+1})_{i\in I_{n+1}}$ erfüllt.

Die so konstruierten natürlichen Transformationen $(T_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ergeben somit zusammen eine natürliche Transformation $T\colon F \Longrightarrow G$ mit $H_0 \circ T = \varphi$.

Analog kann man den zweiten Teil über eine induktive Konstruktion beweisen; alternativ kann man eine relative Variante des ersten Teils auf $F \otimes_{\mathbb{Z}} I$ und G anwenden. □

B.6. Abgeleitete Funktoren, axiomatisch

Abgeleitete Funktoren ermöglichen es, systematisch mit den Exaktheitsdefiziten halbexakter Funktoren zu arbeiten. Genauer gesagt sind abgeleitete Funktoren von halbexakten Funktoren „universelle exakte Fortsetzungen“ der betrachteten Funktoren. Wir wiederholen zunächst einige Grundbegriffe und geben dann die Axiome für abgeleitete Funktoren. Die Konstruktion erfolgt dann in Abschnitt B.7 und B.8.

Wir betrachten weiterhin, der Einfachheit halber, nur den Fall von Funktoren zwischen Modulkategorien; die Terminologie mit links-, rechts-, ko- und kontra- wird allerdings transparenter, wenn man die allgemeinere Situation in abelschen Kategorien betrachtet [11].

Setup B.62. Seien im folgenden R und S Ringe mit Eins.

Definition B.63 (rechts-/links-exakter Funktor)**.**

- Ein [kontravarianter] Funktor ${}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ ist *additiv*, wenn er zwischen den Homomorphismenmengen Gruppenhomomorphismen induziert (wobei die Homomorphismenmengen bezüglich punktweiser Addition von Homomorphismen als abelsche Gruppen betrachtet werden).
- Ein kovarianter additiver Funktor $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ ist *rechts-exakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$ die entsprechende Sequenz

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B) \xrightarrow{F(g)} F(C) \longrightarrow 0$$

in ${}_S\mathsf{Mod}$ exakt ist. Analog definiert man kovariante *links-exakte* Funktoren.

– Ein kontravarianter additiver Funktor $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ ist *links-exakt*, wenn für jede kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$ die entsprechende Sequenz

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(g)} F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$$

in ${}_S\mathsf{Mod}$ exakt ist. Analog definiert man kontravariante *rechts-exakte* Funktoren.

– Ein [kontravarianter] additiver Funktor ist *exakt*, wenn er sowohl links- als auch rechts-exakt ist.

Analog werden die entsprechenden Begriffe definiert, wenn Rechtsmoduln involviert sind.

Bemerkung B.64 (Exaktheit und lange exakte Sequenzen)**.** Additive Funktoren sind genau dann exakt, wenn sie lange exakte Sequenzen in lange exakte Sequenzen übersetzen (dies kann man z.B. per „Splicing“ zeigen).

Beispiel B.65. Sei $A \in {}_R\mathsf{Mod}$. Elementare algebraische Argumente zeigen:

– Der Funktor $A \otimes_Z \cdot : {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ist rechts-exakt.
– Der Funktor $\cdot \otimes_R A\colon \mathsf{Mod}_R \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ist rechts-exakt.
– Der (kovariante) Funktor $\mathrm{Hom}_R(A, \cdot)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ist links-exakt.
– Der (kontravariante) Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(\cdot, A)\colon {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ ist links-exakt.

Homologische ∂-Funktoren sind Folgen von Funktoren, die sich zu natürlichen langen exakten „Homologie“-Sequenzen zusammenfügen:

Definition B.66 (homologischer ∂-Funktor, kohomologischer δ-Funktor)**.**

– Ein *homologischer ∂-Funktor auf ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Werten in ${}_S\mathsf{Mod}$* ist ein Paar

$$\Big((T_n\colon {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod})_{n\in\mathbb{Z}}, \big(\partial_n\colon T_n(A'') \to T_{n-1}(A')\big)_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ 0\to A'\to A\to A''\to 0 \text{ kurz exakt}}} \Big)$$

mit folgender Eigenschaft: Für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen ist das entsprechende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & T_n(A') & \longrightarrow & T_n(A) & \longrightarrow & T_n(A'') & \xrightarrow{\partial_n} & T_{n-1}(A') & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & T_n(B') & \longrightarrow & T_n(B) & \longrightarrow & T_n(B'') & \xrightarrow[\partial_n]{} & T_{n-1}(B') & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

in ${}_S\mathsf{Mod}$ kommutativ und hat exakte Zeilen.

– Ein *kontravarianter kohomologischer δ-Funktor auf ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Werten in ${}_S\mathsf{Mod}$* ist ein Paar

$$\Big((T^n \colon {}_R\mathsf{Mod} \to {}_S\mathsf{Mod})_{n\in\mathbb{Z}}, \big(\delta^n \colon T^n(A') \to T^{n+1}(A'')\big)_{\substack{n\in\mathbb{Z},\\ 0\to A'\to A\to A''\to 0 \text{ kurz exakt}}} \Big),$$

wobei die $(T^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ kontravariant sind, mit folgender Eigenschaft: Für jedes kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$ mit exakten Zeilen ist das entsprechende Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots & \longrightarrow & T^n(A'') & \longrightarrow & T^n(A) & \longrightarrow & T^n(A') & \xrightarrow{\delta^n} & T^{n+1}(A'') & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\ldots & \longrightarrow & T^n(B'') & \longrightarrow & T^n(B) & \longrightarrow & T^n(B') & \xrightarrow[\delta^n]{} & T^{n+1}(B'') & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

in ${}_S\mathsf{Mod}$ kommutativ und hat exakte Zeilen.

Definition B.67 (links-/rechts-abgeleiteter Funktor)**.**

– Sei $F \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ ein rechts-exakter Funktor. Ein *links-abgeleiteter Funktor von F* ist ein homologischer ∂-Funktor L^F mit folgenden Eigenschaften:
  – *Fortsetzung.* Es gilt $L^F_0 \cong F$ und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ ist $L^F_n \cong 0$.
  – *Universalität.* Ist T ein homologischer ∂-Funktor und ist $\tau_0 \colon T_0 \Longrightarrow L^F_0$ eine natürliche Transformation, so gibt es genau eine natürliche Transformation[22] von T nach L^F, die τ_0 fortsetzt.

– Sei $F \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ ein kontravarianter links-exakter Funktor. Ein *rechts-abgeleiteter Funktor von F* ist ein kontravarianter kohomologischer δ-Funktor R_F mit folgenden Eigenschaften:
  – *Fortsetzung.* Es gilt $R^0_F \cong F$ und für alle $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ ist $R^n_F \cong 0$.

[22] D.h. eine Folge $(T_n \Longrightarrow L^F_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ natürlicher Transformationen, die mit den „Verbindungshomomorphismen von T und L^F vertrağlich ist.

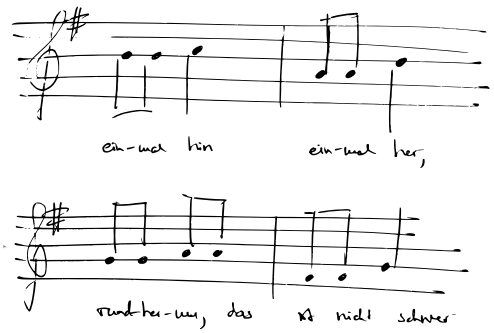


Abbildung (B.69): Eindeutigkeit universeller Objekte; gereimt und vertont („Brüderchen, komm tanz mit mir“)

– *Universalität.* Ist T ein kontravarianter kohomologischer δ-Funktor und ist $\tau^0 \colon R^0_F \Longrightarrow T^0$ eine natürliche Transformation, so gibt es genau eine natürliche Transformation von R_F nach T, die τ^0 fortsetzt.

Bemerkung B.68 (Eindeutigkeit abgeleiteter Funktoren)**.** Je zwei abgeleitete Funktoren eines gegebenen halb-exakten Funktors sind natürlich isomorph; dies folgt aus dem Standardargument für die Eindeutigkeit universeller Objekte (Abbildung (B.69)).

Beispiel B.70. Ist $F \colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ ein exakter Funktor, so ist (L_*, ∂_*) mit

$$L_n := \begin{cases} 0 & \text{falls } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \\ F & \text{falls } n = 0 \end{cases}$$

und $\partial_n := 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ ein links-abgeleiteter Funktor von F.

Warum existieren abgeleitete Funktoren immer? Die Konstruktion besteht aus den folgenden Schritten:

– Wir ersetzen Objekte durch Zerlegungen in einfachere Objekte, sogenannte projektive bzw. injektive Auflösungen (Abschnitt B.7).
– Wir wenden den betrachteten halb-exakten Funktor auf diese Zerlegungen an und messen dann die Abweichung von Exaktheit mithilfe von (Ko)Homologie (Abschnitt B.8).

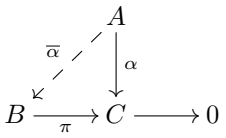
B.7. Projektive/injektive Auflösungen und der Fundamentalsatz der homologischen Algebra

Wir führen nun die geeigneten Zerlegungen von Objekten für die Konstruktion abgeleiteter Funktoren ein: projektive bzw. injektive Auflösungen. Insbesondere beweisen wir dabei auch den Fundamentalsatz der homologischen Algebra (Satz B.83).

Setup B.71. Im folgenden sei R ein Ring mit Eins.

Wir erinnern kurz (ohne Beweise) an die grundlegenden Definitionen, Beispiele und Eigenschaften von projektiven bzw. injektiven Moduln:

Definition B.72 (projektiver Modul)**.** Ein Modul $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ ist *projektiv*, wenn er die folgende Liftungseigenschaft besitzt: Für jeden Epimorphismus $\pi\colon B \longrightarrow C$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ und jeden R-Homomorphismus $\alpha\colon A \longrightarrow C$ gibt es einen R-Homomorphismus $\overline{\alpha}\colon A \longrightarrow B$ mit $\pi \circ \overline{\alpha} = \alpha$.



Proposition B.73 (Charakterisierung projektiver Moduln)**.** *Sei $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul A ist projektiv.*
2. *Der R-Modul A ist ein direkter Summand in einem freien R-Modul.*
3. *Der Funktor $\mathrm{Hom}_R(A, \cdot)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ ist exakt.*
4. *Jede kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow B' \longrightarrow B \longrightarrow A \longrightarrow 0$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ besitzt einen Spalt.*

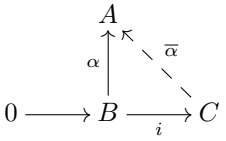
Bemerkung B.74.

- Jeder freie Modul ist projektiv. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*. Dieser Unterschied wird für endlich erzeugte Moduln durch algebraische K-Theorie im Grad 0 gemessen.
- Jeder projektive Modul ist flach. Die Umkehrung gilt im allgemeinen *nicht*.

Bemerkung B.75 (es gibt genug projektive Moduln)**.** Die Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ enthält genug projektive Moduln, d.h. zu jedem $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ gibt es einen projektiven R-Modul P und einen Epimorphismus $P \longrightarrow A$.

Dual dazu ergibt sich das Bild injektiver Moduln:

Definition B.76 (injektiver Modul)**.** Ein Modul $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ ist *injektiv*, wenn er die folgende Erweiterungseigenschaft besitzt: Für jeden Monomorphismus $i\colon B \longrightarrow C$ in ${}_R\mathsf{Mod}$ und jeden R-Homomorphismus $\alpha\colon B \longrightarrow A$ gibt es einen R-Homomorphismus $\overline{\alpha}\colon C \longrightarrow A$ mit $\overline{\alpha} \circ i = \alpha$.



Proposition B.77 (Charakterisierung injektiver Moduln)**.** *Sei $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann sind äquivalent:*

1. *Der R-Modul A ist injektiv.*
2. *Der Funktor* $\mathrm{Hom}_R(\,\cdot\,, A)\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$ *ist exakt.*

Beispiel B.78.
- Alle divisiblen abelschen Gruppen sind injektive $\mathbb{Z}$-Moduln, z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \ldots$
- Der Links-R-Modul
$$R' := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(R, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$
(wobei R als Rechts-R-Modul aufgefasst wird) ist injektiv.
- Produkte injektiver Moduln sind injektiv.

Bemerkung B.79 (es gibt genug injektive Moduln)**.** Die Kategorie ${}_R\mathsf{Mod}$ enthält genug injektive Moduln, d.h. zu jedem $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ gibt es einen injektiven R-Modul I und einen Monomorphismus $A \longrightarrow I$, z.B.
$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \prod_{\mathrm{Hom}_R(A,R')} R' \\ a &\longmapsto \big(f(a)\big)_{f\in\mathrm{Hom}_R(A,R')} \end{aligned}$$

Als nächsten Schritt führen wir die geeigneten Zerlegungen ein:

Definition B.80 (projektive/injektive Auflösung)**.** Sei $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$.
- Eine *projektive Auflösung von A* in ${}_R\mathsf{Mod}$ ist ein $\mathbb{N}$-indizierter R-Kettenkomplex P projektiver R-Moduln zusammen mit einem R-Homomorphismus $\varepsilon\colon P_0 \longrightarrow A$, so dass der durch
$$\ldots \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0 \longrightarrow \ldots$$
definierte zusammengesetzte Kettenkomplex $P \,\square\, \varepsilon$ exakt ist.
- Eine *injektive Auflösung von A in ${}_R\mathsf{Mod}$* ist ein $\mathbb{N}$-indizierter R-Kokettenkomplex I injektiver R-Moduln zusammen mit einem R-Homomorphismus $\eta\colon A \longrightarrow I^0$, so dass der durch
$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\eta} I^0 \xrightarrow{\delta^0} I^1 \xrightarrow{\delta^1} \ldots$$
definierte zusammengesetzte Kokettenkomplex $\eta \,\square\, I$ exakt ist.

Bemerkung B.81 (Existenz projektiver/injektiver Auflösungen)**.** Aus der Existenz von genug projektiven bzw. injektiven Moduln (Bemerkung B.75 bzw. B.79) kann man induktiv zu jedem R-Modul eine projektive bzw. injektive Auflösung konstruieren.

Beispiel B.82. Sei $n \in \mathbb{Z}$. Dann ist
$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{n\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}/n$$
eine projektive Auflösung von $\mathbb{Z}/n$ als $\mathbb{Z}$-Modul, wobei $\varepsilon\colon \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ die kanonische Projektion ist. Man beachte dabei, dass $\mathbb{Z}/n$ außer in den trivialen Fällen *nicht* projektiv ist.

Die Frage, in welchem Sinne projektive bzw. injektive Auflösungen eindeutig sind, wird durch den Fundamentalsatz der homologischen Algebra beantwortet:

Satz B.83 (Fundamentalsatz der homologischen Algebra)**.** *Seien $A, B \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ und sei $f \in \mathrm{Hom}_R(A, B)$.*

1. *Sei $P \,\square\, (\varepsilon\colon P_0 \to A)$ eine projektive R-Auflösung von A und sei $C \,\square\, (\gamma\colon C_0 \to B)$ eine exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$. Dann kann $f\colon A \longrightarrow B$ zu einer Kettenabbildung $\widetilde{f} \,\square\, f\colon P \,\square\, \varepsilon \longrightarrow C \,\square\, \gamma$ fortgesetzt werden und die Kettenabbildung $\widetilde{f}\colon P \longrightarrow C$ ist bis auf R-Kettenhomotopie eindeutig bestimmt.*
2. *Sei $(\eta\colon B \to I^0) \square I$ eine injektive R-Auflösung von B und sei $(\gamma\colon A \to C^0) \square C$ eine exakte Sequenz in ${}_R\mathsf{Mod}$. Dann kann $f\colon A \longrightarrow B$ zu einer R-Kokettenabbildung $f \,\square\, \widetilde{f}\colon \gamma \,\square\, C \longrightarrow \eta \,\square\, I$ fortgesetzt werden und die Kokettenabbildung $\widetilde{f}\colon C \longrightarrow I$ ist bis auf R-Kokettenhomotopie eindeutig bestimmt.*

Beweisskizze. Wir beweisen nur die Existenzaussage im projektiven Fall; die anderen Aussagen folgen mit analogen induktiven Konstruktionen. Wir konstruieren induktiv eine R-Kettenabbildung $\widetilde{f} \,\square\, f\colon P \,\square\, \varepsilon \longrightarrow C \,\square\, \gamma$:

– *Induktionsanfang.* Da $\gamma\colon C_0 \longrightarrow B$ surjektiv ist und P_0 projektiv ist, erhalten wir einen R-Homomorphismus $\widetilde{f}_0\colon P_0 \longrightarrow C_0$ mit $\gamma \circ \widetilde{f}_0 = f \circ \varepsilon$:

$$\begin{array}{ccccc} P_0 & \xrightarrow{\varepsilon} & A & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle \widetilde{f}_0}\,\vdots & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ C_0 & \xrightarrow[\gamma]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

– *Induktionsschritt.* Sei $n \in \mathbb{N}$ und eine Fortsetzung $\widetilde{f}\colon P \longrightarrow C$ sei bereits bis Grad n als R-Kettenabbildung konstruiert. Wir konstruieren nun einen R-Homomorphismus $\widetilde{f}_{n+1}\colon P_{n+1} \longrightarrow C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1} \circ \widetilde{f}_{n+1} = \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1}$: Da $C \,\square\, \gamma$ exakt ist und nach Induktionsvoraussetzung

$$\partial \circ \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1} = \widetilde{f}_{n-1} \circ \partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$$

gilt, folgt $\operatorname{im} \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1} \subset \ker \partial_n = \operatorname{im} \partial_{n+1}$. Da P_{n+1} projektiv ist, gibt es also einen R-Homomorphismus $\widetilde{f}_{n+1}\colon P_{n+1} \longrightarrow C_{n+1}$ mit $\partial_{n+1} \circ \widetilde{f}_{n+1} = \widetilde{f}_n \circ \partial_{n+1}$:

$$\begin{array}{ccccc} P_{n+1} & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & \operatorname{im} \partial_{n+1} & & \\ {\scriptstyle \widetilde{f}_{n+1}}\,\vdots & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_n|_{\operatorname{im}\partial_{n+1}}} & & \\ C_{n+1} & \xrightarrow[\partial_{n+1}]{} & \operatorname{im} \partial_{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Damit ist die Existenz im projektiven Fall gezeigt. □

Korollar B.84 (Eindeutigkeit projektiver/injektiver Auflösungen)**.** *Sei $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$.*

1. *Bis auf R-Kettenhomotopieäquivalenz (mit kanonischer R-Kettenhomotopieklasse) gibt es genau eine projektive R-Auflösung von A.*

2. *Bis auf R-Kokettenhomotopieäquivalenz (mit kanonischer R-Kokettenhomotopieklasse) gibt es genau eine injektive R-Auflösung von A.*

Beweisskizze. Die Existenz folgt aus Bemerkung B.81. Eindeutigkeit folgt aus dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra (Satz B.83) – angewendet auf $\mathrm{id}_A \colon A \longrightarrow A$ mit dem klassischen Eindeutigkeitsargument bei universellen Eigenschaften. □

Außerdem ist es möglich, für kurze exakte Sequenzen von R-Moduln kompatible projektive Auflösungen zu konstruieren:

Proposition B.85 (Hufeisenlemma)**.**

1. *Sei* $0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{f''} A'' \longrightarrow 0$ *eine kurze exakte Sequenz in* ${}_R\mathsf{Mod}$ *und seien* $P' \boxdot \varepsilon'$ *bzw.* $P'' \boxdot \varepsilon''$ *projektive R-Auflösungen von* A' *bzw.* A''*:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & P'_0 & & ? & & P''_0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon'} & & & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon''} & & \\
0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{f'} & A & \xrightarrow{f''} & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

   Dann gibt es eine projektive R-Auflösung $P \boxdot \varepsilon$ *von A und R-Kettenabbildungen* $\widetilde{f'} \boxdot f' \colon P' \boxdot \varepsilon' \longrightarrow P \boxdot \varepsilon$ *bzw.* $\widetilde{f''} \boxdot f'' \colon P \boxdot \varepsilon \longrightarrow P'' \boxdot \varepsilon''$*, so dass*

$$0 \longrightarrow P'_n \xrightarrow{\widetilde{f'_n}} P_n \xrightarrow{\widetilde{f''_n}} P''_n \longrightarrow 0$$

   für alle $n \in \mathbb{N}$ *exakt ist.*
2. *Ist*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B'' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

   ein kommutatives Diagramm in ${}_R\mathsf{Mod}$ *mit exakten Zeilen, so gibt es projektive R-Auflösungen dieser sechs Moduln und R-Kettenabbildungen dazwischen, die dieses Diagramm fortsetzen, und die Eigenschaft besitzten, dass die entsprechenden Leiterdiagramme in jedem Grad kommutativ sind und exakte Zeilen besitzen.*

Beweisskizze. Für den ersten Teil definiert man $P \boxdot \varepsilon$ auf Modulebene als direkte Summe der äußeren Auflösungen und wählt für $\widetilde{f'}$ bzw. $\widetilde{f''}$ die entsprechende Inklusion

bzw. Projektion. Mithilfe der Projektivität der P_n konstruiert man dann induktiv geeignete Randoperatoren $P_{n+1} \longrightarrow P_n$.

Für den zweiten Teil beginnt man mit den äußeren Moduln, löst diese projektiv auf und setzt die äußeren vertikalen Homomorphismen mit Hilfe des Fundamentalsatzes zu Kettenabbildungen fort. Der erste Teil liefert nun entsprechende Auflösungen der mittleren Moduln. Nun konstruiert man induktiv eine Fortsetzung des mittleren vertikalen Homomorphismus zu einer Kettenabbildung [11, Theorem 2.4.6]. □

B.8. Konstruktion abgeleiteter Funktoren

Wir konstruieren nun abgeleitete Funktoren nach dem am Ende von Abschnitt B.6 beschriebenen Prinzip und betrachten erste Beispiele.

Setup B.86. Im folgenden seien R und S Ringe mit Eins.

Satz B.87 (Existenz abgeleiteter Funktoren)**.** *Sei* $F\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ *ein rechtsexakter Funktor. Dann besitzt* F *einen links-abgeleiteten Funktor* L^F*. Genauer gilt: Ist* $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ *und ist* $P \,\square\, \varepsilon$ *eine projektive* R*-Auflösung von* A*, so gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$*, dass*

$$L_n^F(A) \cong_R H_n\big(F(P)\big).$$

(Man beachte dabei, dass Homologie und F *nur auf den Komplex* P*, nicht auf* $P \,\square\, \varepsilon$ *angewendet wird.)*

Bemerkung B.88 (weitere Varianten abgeleiteter Funktoren)**.** Analog erhält man abgeleitete Funktoren

- für links-exakte Funktoren durch injektive Auflösungen
- für rechts-exakte kontravariante Funktoren durch injektive Auflösungen
- für links-exakte kontravariante Funktoren durch projektive Auflösungen.

Die Systematik dahinter ergibt sich wieder durch Betrachtung der Situation in allgemeinen abelschen Kategorien; die duale Kategorie einer abelschen Kategorie ist abelsch und Dualisieren vertauscht Projektivität und Injektivität.

Bevor wir Satz B.87 beweisen, geben wir wichtige Beispiele abgeleiteter Funktoren:

Definition B.89 (Tor)**.** Sei $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_n^R(A, \,\cdot\,) &:= L_n^{A\otimes_R \cdot} : {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}\,. \\ &\cong H_n(A \otimes_R \text{projektive } R\text{-Auflösung des Arguments}).\end{aligned}$$

Der Name „Tor“ leitet sich aus dem Zusammenhang der Tor-Funktoren mit Torsionsmoduln ab (Beispiel B.91).

Bemerkung B.90 (Varianten von Tor)**.**

- Die Konstruktion der Tor-Funktoren zeigt, dass die Tor-Funktoren auch in der ersten Variablen funktoriell sind.
- Ist $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, so können wir $\mathrm{Tor}_n^{\mathbb{Z}}(A, \,\cdot\,)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als Funktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ auffassen (da die R-Modulstruktur auf A die Konstruktion überlebt).

Beispiel B.91 (Berechnung von Tor)**.** Sei $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$ und sei $B \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$.

1. Ist A flach über R (z.B. projektiv), so ist $A \otimes_R \cdot$ exakt, und damit
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \quad \mathrm{Tor}_n^R(A,B) \cong 0.$$
2. Ist B projektiv über R, so ist
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \quad \mathrm{Tor}_n^R(A,B) \cong 0,$$
da $\ldots \longrightarrow B \xrightarrow{\mathrm{id}_B} B \longrightarrow 0$ eine projektive R-Auflösung von B ist.
3. Ist R ein Hauptidealring, so gilt
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \quad \mathrm{Tor}_n^R(A,B) \cong 0,$$
denn Untermoduln freier R-Moduln sind frei, und somit liefert die kanonische Projektion $\varepsilon\colon \bigoplus_B R \longrightarrow B$ eine kurze projektive R-Auflösung
$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \ker(\varepsilon) \longrightarrow \bigoplus_B R \xrightarrow{\varepsilon} B \longrightarrow 0$$
von B.
4. Da Tensorprodukte und Homologie mit direkten Summen verträglich sind und direkte Summen von projektiven Auflösungen projektive Auflösungen liefern, folgt: Für alle Mengen I und alle Familien $(A_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}(\mathsf{Mod}_R)$, $(B_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ sind die kanonischen R-Homomorphismen
$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(A_i,B) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\Big)$$
$$\bigoplus_{i\in I} \mathrm{Tor}_n^R(A,B_i) \longrightarrow \mathrm{Tor}_n^R\Big(A, \bigoplus_{i\in I} B_i\Big)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ Isomorphismen von R-Moduln.
5. Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ ist
$$\begin{aligned}\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) &\cong \{x \in \mathbb{Z}/n \mid m \cdot x = 0\}\\ &\cong \mathbb{Z}/(n,m)\end{aligned}$$
wie die projektive $\mathbb{Z}$-Auflösung $\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{m\,\cdot} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{Projektion}} \mathbb{Z}/m \longrightarrow 0$ von $\mathbb{Z}/m$ zeigt.

Insbesondere gibt es über Körpern keine nicht-trivialen Tor-Terme und Tor-Terme von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen lassen sich mit den obigen Techniken berechnen.

Definition B.92 (Ext)**.** Sei $B \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Für $n \in \mathbb{N}$ definiert man dann den kontravarianten Funktor
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}_R^n(\,\cdot\,, B) &:= R^n_{\mathrm{Hom}_R(\,\cdot\,,B)}\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}\,.\\ &\cong H^n\big(\mathrm{Hom}_R(\text{projektive } R\text{-Aufösung des Arguments}, B)\big).\end{aligned}$$

Der Name „Ext“ leitet sich aus dem Zusammenhang der Ext-Funktoren mit Erweiterungsproblemen ab.

Bemerkung B.93 (Varianten von Ext)**.**
- Die Konstruktion der Ext-Funktoren zeigt, dass die Ext-Funktoren auch in der zweiten Variablen (kovariant) funktoriell sind.
- Ist $B \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, so können wir $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,, B)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als kontravarianten Funktor ${}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_R\mathsf{Mod}$ auffassen (da die R-Modulstruktur auf B die Konstruktion überlebt).

Analog zu den Berechnungen von Tor erhalten wir:

Beispiel B.94 (Berechnung von Ext)**.** Seien $A, B \in {}_R\mathsf{Mod}$.

1. Ist A projektiv oder B injektiv über R, so gilt
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 1}} \quad \mathrm{Ext}^n_R(A, B) \cong 0.$$
2. Ist R ein Hauptidealring, so gilt
$$\forall_{n\in\mathbb{N}_{\geq 2}} \quad \mathrm{Ext}^n_R(A, B) \cong 0.$$
3. Ist I eine Menge und ist $(A_i)_{i\in I} \subset \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$, so ist der kanonische R-Homomorphismus
$$\mathrm{Ext}^n_R\Big(\bigoplus_{i\in I} A_i, B\Big) \longrightarrow \prod_{i\in I} \mathrm{Ext}^n_R(A_i, B)$$
für alle $n \in \mathbb{N}$ ein Isomorphismus von R-Moduln.
4. Für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ ist
$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{Z}/m) &\cong (\mathbb{Z}/m) \,/\, n\cdot(\mathbb{Z}/m)\\ &\cong \mathbb{Z}/(n, m).\end{aligned}$$

Insbesondere gibt es über Körpern keine nicht-trivialen Ext-Terme und Ext-Terme von endlich erzeugten Moduln über Hauptidealringen lassen sich im wesentlichen mit den obigen Techniken berechnen.

Die Funktoren Tor und Ext spielen bei den universellen Koeffiziententheoremen (Kapitel 3) eine zentrale Rolle.

Als Spezialfall erhält man aus Tor und Ext außerdem algebraische (bzw. axiomatische) Beschreibungen von Gruppen(ko)homologie:

Beispiel B.95 (Gruppen(ko)homologie)**.** Sei G eine Gruppe und sei $n \in \mathbb{N}$.
- Dann ist die *n-te Gruppenhomologie von G* definiert als
$$H_n(G;\,\cdot\,) := \mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}G}_n(\,\cdot\,, \mathbb{Z})\colon \mathsf{Mod}_{\mathbb{Z}G} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}\,.$$
- Analog ist die *n-te Gruppenkohomologie von G* der kontravariante Funktor
$$H^n(G;\,\cdot\,) := \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}G}(\mathbb{Z},\,\cdot\,)\colon {}_{\mathbb{Z}G}\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}\,.$$

Dabei ist $\mathbb{Z}G$ der *ganzzahlige Gruppenring von* G, d.h. $\mathbb{Z}G$ ist die abelsche Gruppe $\bigoplus_G \mathbb{Z}$ zusammen mit der Multiplikation

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}G \times \mathbb{Z}G &\longrightarrow \mathbb{Z}G \\ \Big(\sum_{g\in G} a_g \cdot g, \sum_{g\in G} b_g \cdot g\Big) &\longmapsto \sum_{g\in G}\Big(\sum_{h\in G} a_h \cdot b_{h^{-1}\cdot g}\Big)\cdot g. \end{aligned}$$

(Die Multiplikation auf $\mathbb{Z}G$ setzt also die Multiplikation auf G fort.) Ist G nicht abelsch, so ist $\mathbb{Z}G$ *nicht* kommutativ; jedoch liefert die Inversenbildung auf G eine Involution auf $\mathbb{Z}G$. Wir betrachten in der obigen Definition $\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}G$-Modul bezüglich der trivialen G-Operation auf $\mathbb{Z}$.

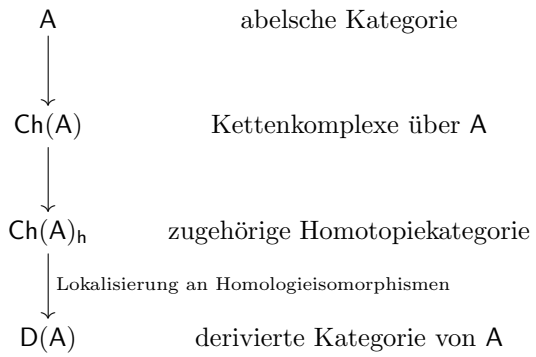
Man kann zeigen, dass diese Konstruktionen von Gruppen(ko)homologie auch in G funktoriell sind.

Der Schlüssel zu den reichhaltigen Querverbindungen, die Gruppen(ko)homologie zwischen Gruppentheorie und Topologie erzeugt, ist die Tatsache, dass gewisse topologische Situationen (z.B. Eilenberg-MacLane-Räume vom Typ $K(\,\cdot\,,1)$) interessante projektive Auflösungen von $\mathbb{Z}$ über Gruppenringen liefern. Daraus ergeben sich Anwendungen in der Gruppentheorie (z.B. Endlichkeitsbedingungen) und auch in der Topologie (z.B. welche endlichen Gruppen operieren frei auf Sphären?).

Bemerkung B.96 (abgeleitete Funktoren sind überall)**.** Abgeleitete Funktoren treten an vielen Stellen in der modernen theoretischen Mathematik auf. Zum Beispiel können auch

- Garbenkohomologie
- étale Kohomologie
- höhere direkte Bilder von Garbenmorphismen
- $\lim^1$-Terme
- ...

als abgeleitete Funktoren auf geeigneten abelschen Kategorien aufgefasst werden. Der richtige konzeptionelle Rahmen für abgeleitete Funktoren sind sogenannte *derivierte Kategorien*, die man nach dem folgenden Schema aus abelschen Kategorien erhält:



Wir beweisen nun Satz B.87:

Beweisskizze (von Satz B.87).

- *Konstruktion der Funktoren $(L_n^F)_{n\in\mathbb{Z}}$:* Zu jedem Objekt $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$ wählen wir eine projektive R-Auflösung $P^A \square \varepsilon_A$ von A. Wir definieren dann für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$L_n^F\colon \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod}) \longrightarrow \mathrm{Ob}({}_S\mathsf{Mod})$$
$$A \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n < 0 \\ H_n\big(F(P^A)\big) & \text{falls } n \geq 0. \end{cases}$$

  Ist $f\colon A \longrightarrow B$ ein R-Homomorphismus, so gibt es nach dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra (Satz B.83) eine (bis auf Kettenhomotopie eindeutigen) Fortsetzung $\widetilde{f} \square f\colon P^A \square \varepsilon_A \longrightarrow P^B \square \varepsilon_B$. Wir definieren dann für alle $n \in \mathbb{Z}$:

$$L_n^F(f) := \begin{cases} 0 & \text{falls } n < 0 \\ H_n\big(F(f)\big) & \text{falls } n \geq 0. \end{cases}$$

  Mit dem Fundamentalsatz der homologischen Algebra bzw. Korollar B.84 folgt außerdem:
  - Bis auf kanonische Isomorphie hängen die Moduln $L_n^F(A)$ nicht von der gewählten projektiven Auflösung ab.
  - Die Homomorphisen $L_n^F(f)$ hängen nicht von der gewählten Fortsetzung von f ab.
  - Für alle $n \in \mathbb{Z}$ ist $L_n^F\colon {}_R\mathsf{Mod} \longrightarrow {}_S\mathsf{Mod}$ tatsächlich ein Funktor.
- *Es gilt $L_0^F \cong F$, denn:* Sei $f\colon A \longrightarrow B$ ein R-Homomorphismus und sei $\widetilde{f} \square f\colon P^A \square \varepsilon_A \longrightarrow P^B \square \varepsilon_B$ eine entsprechende Fortsetzung. Aus dem kommutativen Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc} P_1^A & \xrightarrow{\partial_1} & P_0^A & \xrightarrow{\varepsilon_A} & A & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_1} & & \downarrow{\scriptstyle \widetilde{f}_0} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ P_1^B & \xrightarrow[\partial_1]{} & P_0^B & \xrightarrow[\varepsilon_B]{} & B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

  mit exakten Zeilen erhalten wir wegen der Rechts-Exaktheit von F somit das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} L_0^F(A) & = & H_0(F(P^A)) & = & F(P_0^A)/F(\operatorname{im}\partial_1^A) & = & F(P_0^A)/F(\ker\varepsilon_A) & \xrightarrow[\cong]{\text{via } F(\varepsilon_A)} & F(A) \\ \downarrow{\scriptstyle L_0^F(f)} & & \downarrow{\scriptstyle H_0(F(\widetilde{f}))} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ L_0^F(B) & = & H_0(F(P^B)) & = & F(P_0^B)/F(\operatorname{im}\partial_1^B) & = & F(P_0^B)/F(\ker\varepsilon_B) & \xrightarrow[\text{via } F(\varepsilon_B)]{\cong} & F(B) \end{array}$$

  Insbesondere ist $L_0^F \cong F$.
- *Erweiterung von $(L_n^F)_{n\in\mathbb{Z}}$ zu einem homologischen ∂-Funktor:* Die Verbindungshomomorphismen für $(L_n^F)_{n\in\mathbb{Z}}$ kann man mithilfe des (zweiten Teils des) Hufeisenlemmas (Proposition B.85), des Fundamentalsatzes der homologischen Algebra (Satz B.83), sowie der algebraischen langen exakten Homologiesequenz (Satz B.23) konstruieren.

– *Der homologische ∂-Funktor L^F ist universell, denn:* Sei T ein homologischer ∂-Funktor auf ${}_R\mathsf{Mod}$ mit Werten in ${}_S\mathsf{Mod}$ und sei $\tau_0 \colon T_0 \Longrightarrow L_0^F$ eine natürliche Transformation. Dann gibt es genau eine natürliche Transformation homologischer ∂-Funktoren zwischen T und L^F, die τ_0 fortsetzt, denn: Wir konstruieren induktiv durch „dimension shifting“ eine (eindeutige) Folge $(\tau_n \colon T_n \Longrightarrow L_n^F)_{n\in\mathbb{Z}}$ natürlicher Transformationen, die mit den Verbindungshomomorphismen verträglich sind: Für $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ sei $\tau_n := 0$. Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $\tau_0, \ldots, \tau_n$ bereits konstruiert, so gibt es genau eine natürliche Transformation $\tau_{n+1} \colon T_{n+1} \Longrightarrow L_{n+1}^F$, die mit den Verbindungshomomorphismen verträglich ist, denn: Sei $A \in \mathrm{Ob}({}_R\mathsf{Mod})$. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\ i\ } P \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

in ${}_R\mathsf{Mod}$, wobei P ein projektiver R-Modul ist. Da T und L^F homologische ∂-Funktoren sind und da τ_n eine natürliche Transformation ist, erhalten wir das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & T_{n+1}(A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & T_n(A') & \xrightarrow{T_n(i)} & T_n(P) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \tau_{n+1}(A)} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_n(A')} & & \downarrow{\scriptstyle \tau_n(P)} \\
0 = L_{n+1}^F(P) & \longrightarrow & L_{n+1}^F(A) & \xrightarrow[\partial_{n+1}]{} & L_n^F(A') & \xrightarrow[L_n^F(i)]{} & L_n^F(P)
\end{array}$$

mit exakten Zeilen; da P projektiv ist, gilt dabei $L_{n+1}^F(P) \cong 0$ (denn P besitzt eine projektive Auflösung der Länge 0), und somit ist $\partial_{n+1} \colon L_{n+1}^F(A) \longrightarrow L_n^F(A')$ injektiv. Eine einfache Diagrammjagd zeigt, dass im $\tau_n(A') \circ \partial_{n+1} \subset \operatorname{im} \partial_{n+1}$ gilt. Also gibt es genau einen Homomorphismus $\tau_{n+1}(A) \colon T_{n+1}(A) \longrightarrow L_{n+1}^F(A)$, der in das obige Diagramm passt.
Man rechnet nun nach, dass $\tau_{n+1} \colon T_{n+1} \Longrightarrow L_{n+1}^F$ eine natürliche Transformation ist und dass τ_{n+1} mit allen Verbindungshomomorphismen zu kurzen exakten Sequenzen verträglich ist. □