Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 2 vom 28. Oktober 2009

Aufgabe 1 (Bar-Auflösung**).** Sei G eine diskrete Gruppe.

1. Zeigen Sie, dass $C_*(G)$ zusammen mit der in der Vorlesung definierten Abbildung $\partial\colon C_*(G) \longrightarrow C_{*-1}(G)$ tatsächlich ein $\mathbb{Z}G$-Kettenkomplex ist.
2. Zeigen Sie, dass der Komplex $C_*(G) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ kontraktibel ist, indem Sie eine explizite $\mathbb{Z}$-Kettenkontraktion angeben; hierbei ist $\varepsilon\colon C_0(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ der $\mathbb{Z}$-Homomorphismus, der alle Gruppenelemente von G auf 1 abbildet.

Aufgabe 2 (Erweiterungen von $\mathbb{Z}/3$ durch $\mathbb{Z}$**).**

1. Zeigen Sie, dass $H^2(\mathbb{Z}/3;\mathbb{Z})$ mindestens drei Elemente enthält, indem Sie drei nicht-äquivalente Erweiterungen von $\mathbb{Z}/3$ durch $\mathbb{Z}$ angeben (hierbei trägt $\mathbb{Z}$ die einzig mögliche $\mathbb{Z}/3$-Operation, die triviale).
2. Folgern Sie, dass es keine $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/3]$-Kettenkontraktion von $C_*(\mathbb{Z}/3) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z}$ gibt.

Aufgabe 3 (Klassifikation von Erweiterungen**).** Sei Q eine diskrete Gruppe und sei A ein $\mathbb{Z}Q$-Modul. Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung konstruierten Abbildungen

$$\begin{aligned} H^2(Q;A) &\longleftrightarrow E(Q,A) \\ [f] &\longmapsto [0 \to A \to G_f \to Q \to 0] \\ \eta_E &\longleftarrow\!\shortmid E \end{aligned}$$

tatsächlich zueinander invers sind.

Aufgabe 4 (Natürlichkeit der Klassifikation von Erweiterungen**).** Zeigen Sie, dass die Klassifikation der Erweiterungen mit abelschem Kern im folgenden Sinne natürlich ist: Sei $(\varphi,\Phi)\colon (Q,A) \longrightarrow (Q',A')$ ein Morphismus in der Kategorie GrpMod, und seien $E \in E(Q,A)$ bzw. $E' \in E(Q',A')$ repräsentiert durch die Erweiterungen $0 \to A \to G \to Q \to 1$ bzw. $0 \to A' \to G' \to Q' \to 1$. Zeigen Sie, dass es genau dann einen Gruppenhomomorphismus $\widetilde{\varphi}\colon G \longrightarrow G'$ gibt, der das Diagramm

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"'] & G \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & Q \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & 1 \\ 0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & G' \arrow[r] & Q' \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

kommutativ macht, wenn (in $H^2(Q;\varphi^*A')$)

$$H^2(\mathrm{id}_Q;\Phi)(\eta_E) = H^2(\varphi;\mathrm{id}_{A'})(\eta'_E).$$

Abgabe am 5. November 2009, Besprechung am 12. November 2009