Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt $1\frac{1}{2}$ vom 29. Oktober 2009

Aufgabe 1 (Die unendliche Diedergruppe**).** Die *unendliche Diedergruppe* ist die Isometriegruppe von $\mathbb{Z}$ (mit der durch die Inklusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ von der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ induzierten Metrik). Wir bezeichnen die unendliche Diedergruppe mit D_∞.

1. Finden Sie eine schöne Darstellung von D_∞ durch Erzeuger und Relationen (z.B. in Analogie an die endlichen Diedergruppen).
2. Wie kann man D_∞ als freies Produkt zweier kleiner Gruppen darstellen?
3. Berechnen Sie die (Ko)Homologie von D_∞ mit konstanten Koeffizienten über die topologische Definition von Gruppen(ko)homologie.
4. Folgern Sie, dass es kein endlich-dimensionales Modell des klassifizierenden Raumes von D_∞ gibt.

   [Es gibt allerdings ein endlich-dimensionales Modell des klassifizierenden Raumes von eigentlichen Operationen von D_∞.]
5. Zeigen Sie, dass D_∞ eine Erweiterung von $\mathbb{Z}/2$ durch $\mathbb{Z}$ ist; was ist die induzierte Operation von $\mathbb{Z}/2$ auf $\mathbb{Z}$? Ist die entsprechende Kohomologieklasse trivial?

   Insbesondere ist D_∞ virtuell $\mathbb{Z}$; vergleichen Sie $H_*(D_\infty;\mathbb{Q})$ und $H_*(\mathbb{Z};\mathbb{Q})$.
6. Berechnen Sie $H_1(\mathbb{Z}/2;\mathbb{Z})$ für alle $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-Modulstrukturen auf $\mathbb{Z}$ über die kombinatorische Beschreibung.
7. Berechnen Sie Gruppen(ko)homologie von der Kleinschen Vierergruppe D_2 mit konstanten Koeffizienten über die topologische Definition und vergleichen Sie das Ergebnis mit der Gruppenkohomologie von $\mathbb{Z}/2$ bzw. von D_∞.

Besprechung am 29. Oktober 2009