# Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 8 vom 9. Dezember 2009

---

**Aufgabe 1 (**Kohomologiering von $S_3$**).** Bestimmen Sie den Kohomologiering der symmetrischen Gruppe $S_3$.

**Aufgabe 2 (**Kohomologiering von $D_\infty$**).** Bestimmen Sie den Kohomologiering der unendlichen Diedergruppe $D_\infty \cong \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$.

**Aufgabe 3 (**Vergleich mit dem topologischen Cup-Produkt**).** Sei $G$ eine Gruppe und sei $X_G$ ein Modell von $BG$. Zeigen Sie, dass der kanonische Isomorphismus $H^*(G;\mathbb{Z}) \cong H^*(BG;\mathbb{Z})$ mit dem Cup-Produkt in Gruppenkohomologie und dem Cup-Produkt auf singulärer (oder zellulärer) Kohomologie verträglich ist.

**Aufgabe 4 (**Algebraische Eigenschaften des Cup-Produkts**).** Zeigen Sie, dass das Cup-Produkt in Gruppenkohomologie die folgenden Eigenschaften besitzt: Sei $G$ eine Gruppe.

1. *Einselement.* Zeigen Sie, dass die Klasse $1 \in \mathbb{Z} \cong H^0(G;\mathbb{Z})$ ein neutrales Element des Cup-Produkts ist, d.h., dass für alle $\mathbb{Z}G$-Moduln $A$ und alle Kohomologieklassen $\alpha \in H^*(G;A)$ die Gleichheit
$$1 \cup \alpha = \alpha = \alpha \cup 1$$
besteht (wobei wir die kanonischen Identifikationen $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} A \cong A \cong A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}$ verwenden).

2. *Graduierte Kommutativität.* Seien $A$ und $A'$ zwei $\mathbb{Z}G$-Moduln. Zeigen Sie, dass dann
$$\alpha' \cup \alpha = (-1)^{|\alpha|\cdot|\alpha'|} \cdot H^*(\mathrm{id}_G;t)(\alpha \cup \alpha')$$
für alle Kohomologieklassen $\alpha \in H^*(G;A)$ und alle $\alpha' \in H^*(G;A')$ gilt, wobei $t\colon A \otimes_{\mathbb{Z}} A' \longrightarrow A' \otimes_{\mathbb{Z}} A$ der $\mathbb{Z}G$-Homomorphismus ist, der die beiden Faktoren vertauscht.

---

Abgabe am 17. Dezember 2009, Besprechung am 7. Januar 2010