Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 13 vom 27. Januar 2010

Aufgabe 1 (Vererbungseigenschaften amenabler Gruppen**).** Im folgenden seien alle Gruppen diskret.

1. Zeigen Sie, dass Untergruppen amenabler Gruppen amenabel sind.
2. Zeigen Sie, dass Quotienten amenabler Gruppen amenabel sind.
3. Zeigen Sie, dass die Erweiterung einer amenablen Gruppe durch eine amenable Gruppe amenabel ist.

Aufgabe 2 (Amenable Gruppen und Følner-Sequenzen**).**

1. Zeigen Sie, dass eine diskrete abzählbare Gruppe genau dann amenabel ist, wenn sie eine Følner-Sequenz besitzt.

   Hinweis. Verwenden Sie Ultrafilter auf $\mathbb{N}$ (die keine Haupt-Ultrafilter sind), um aus einer Følner-Sequenz ein invariantes Mittel zu konstruieren,

   Für die (schwierigere) umgekehrte Richtung sollten Sie die Dualität zwischen B und ℓ^1 genauer betrachten.
2. Zeigen Sie mit Hilfe der Charakterisierung durch Følner-Sequenzen, dass die freie Gruppe in zwei Erzeugern nicht amenabel ist.

Aufgabe 3 (Relativ injektive/projektive Moduln**).**

1. Sei G eine diskrete Gruppe. Zeigen Sie, dass der triviale Banach-G-Modul $\mathbb{R}$ genau dann relativ injektiv ist, wenn G amenabel ist.
2. Für welche diskreten Gruppen G ist der triviale Banach-G-Modul $\mathbb{R}$ relativ projektiv?

Aufgabe 4 (Fundamentalsatz der relativen homologischen Algebra, Banach-Version**).** Sei G eine diskrete Gruppe und sei $f\colon U \longrightarrow V$ ein Morphismus von Banach-G-Moduln; sei außerdem $(C^*, \vartheta\colon U \hookrightarrow C^0)$ eine starke (kohomologische) G-Auflösung von U und sei $(I^*, \eta\colon V \hookrightarrow I^0)$ ein augmentierter Banach-G-Kokettenkomplex, der aus relativ injektiven Banach-G-Moduln besteht. Zeigen Sie:

1. Der Morphismus f lässt sich zu einem Morphismus $f \,\square\, f^*\colon \vartheta \,\square\, C^* \longrightarrow \eta \,\square\, I^*$ von Banach-G-Kokettenkomplexen erweitern.
2. Die Fortsetzung $f^*\colon C^* \longrightarrow I^*$ ist bis auf (in jedem Grad beschränkte) G-Homotopie eindeutig.

Besprechung am Ersatztermin für den 04. Februar 2010