Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 10 vom 6. Januar 2010

Die *dreidimensionale diskrete Heisenberggruppe* ist die Gruppe

$$H := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \; x,\ y,\ z \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathrm{SL}(3, \mathbb{Z}).$$

Aufgabe 1 (Algebraische Eigenschaften der Heisenberggruppe**).**

1. Zeigen Sie, dass die Heisenberggruppe H in eine zentrale Erweiterung der Form $1 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow 1$ passt.

2. Berechnen Sie die Abelianisierung H_{ab} der Heisenberggruppe H.

Aufgabe 2 (Homologie der Heisenberggruppe**).** Berechnen Sie die Homologie $H_*(H; \mathbb{Z})$ der Heisenberggruppe mit trivialen Koeffizienten über die Hochschild-Serre-Spektralsequenz.

Aufgabe 3 (Kohomologische Dimension der Heisenberggruppe**).**

1. Zeigen Sie: Ist G eine Gruppe, so kann man die kohomologische Dimension (s. Blatt 3) auch wie folgt beschreiben:

$$\operatorname{cd} G = \inf\bigl\{ n \in \mathbb{N} \bigm| \text{für alle } j \in \mathbb{N}_{>n} \text{ gilt } H^j(G; \cdot\,) = 0 \bigr\}.$$

2. Zeigen Sie mit Hilfe der Hochschild-Serre-Spektralsequenz: Für jede Gruppenerweiterung $1 \longrightarrow N \longrightarrow G \longrightarrow Q \longrightarrow 1$ gilt

$$\operatorname{cd} G \leq \operatorname{cd} Q + \operatorname{cd} N.$$

3. Schließen Sie daraus, dass die Heisenberggruppe kohomologische Dimension 3 besitzt.

Aufgabe 4 (Ein Modell des klassifizierenden Raumes der Heisenberggruppe**).**

1. Zeigen Sie, dass es eine orientierte geschlossene zusammenhängende dreidimensionale Mannigfaltigkeit gibt, die ein Modell des klassifizierenden Raums der Heisenberggruppe H ist.

2. Berechnen Sie mit Hilfe dieses Modells und Poincaré-Dualität die Homologie von H mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.

Besprechung am 14./21. Januar 2010