Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 9 vom 16. Dezember 2009

Aufgabe 1 (Gruppen mit periodischer Kohomologie**).**

1. Drücken Sie die Gruppen(ko)homologie von endlichen Gruppen mit periodischer Kohomologie der Periode 4 möglichst einfach aus.
2. Berechnen Sie die Gruppen(ko)homologie der verallgemeinerten Quaternionengruppen.
3. Folgern Sie: Ist G eine endliche Gruppe mit periodischer Kohomologie und ist $k \in \mathbb{Z}$ ungerade, so ist $\widehat{H}^k(G;\mathbb{Z}) = 0$.

Aufgabe 2 (Endliche Gruppen, die frei auf Sphären operieren**).** Sei G eine endliche Gruppe, die frei auf einer Sphäre operiert. Zeigen Sie, ohne den Dualitätssatz für Tate-Kohomologie zu verwenden, dass G periodische Kohomologie besitzt.
Hinweis. Eine Anleitung finden Sie in K.S. Browns Buch *Cohomology of Groups* (Exercise V.3.3).

Aufgabe 3 (Diverse projektive Auflösungen**).** Sei G eine endliche Gruppe.

1. Zeigen Sie: Ist $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\eta} P_0 \to P_1 \to \cdots$ ein exakter $\mathbb{Z}G$-Kettenkomplex mit projektiven Kettenmoduln $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $\eta \,\square\, P_*$ eine starke relativ injektive $\mathbb{Z}G$-Auflösung von $\mathbb{Z}$.
2. Zeigen Sie: Ist P ein endlich erzeugter projektiver $\mathbb{Z}G$-Modul, so ist auch $\mathfrak{m}\mathrm{oH}_G(P,\mathbb{Z}G)$ ein endlich erzeugter projektiver $\mathbb{Z}G$-Modul und für alle $\mathbb{Z}G$-Moduln A gibt es einen natürlichen Isomorphismus (abelscher Gruppen)
$$\mathrm{Hom}_G\bigl(\mathfrak{m}\mathrm{oH}_G(P,\mathbb{Z}G), A\bigr) \cong P \otimes_G A.$$
(Dies wurde beim Vergleich von Tate-Kohomologie in negativen Graden mit gewöhnlicher Gruppenhomologie verwendet.)
Hinweis. Zu einem $\mathbb{Z}G$-Modul P sei $\mathfrak{m}\mathrm{oH}_G(P,\mathbb{Z}G)$ der $\mathbb{Z}G$-Modul, dessen unterliegende abelsche Gruppe $\mathrm{Hom}_G(P,\mathbb{Z}G)$ ist und auf dem G durch
$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{m}\mathrm{oH}_G(P,\mathbb{Z}G) &\longrightarrow \mathfrak{m}\mathrm{oH}_G(P,\mathbb{Z}G) \\ (g,f) &\longmapsto \bigl(x \mapsto f(x)\cdot g^{-1}\bigr) \end{aligned}$$
operiert.

Aufgabe 4 (Periodische Kohomologie mit großer Periode**).** Gibt es endliche Gruppen mit periodischer Kohomologie mit beliebig großer Periode?

Besprechung am 7./14. Januar 2010

Frohe Weihnachten und ein Gutes Neues Jahr!