Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 12 vom 20. Januar 2010

Aufgabe 1 (Beschränkte Kohomologie im Grad 0**).**

1. Zeigen Sie, dass $H^0_{\mathrm{b}}(\,\cdot\,;\,\cdot\,)\colon \mathrm{GrpBan}^- \longrightarrow \mathrm{Vec}^{\|\cdot\|}$ mit dem Invarianten-Funktor übereinstimmt.
2. Was passiert bei ℓ^1-Homologie im Grad 0 ?

Aufgabe 2 (Beschränkte Kohomologie im Grad 1**).**

1. Sei G eine diskrete Gruppe. Zeigen Sie mit Hilfe der Beschreibung von beschränkter Kohomologie über die Bar-Konstruktion, dass $H^1_{\mathrm{b}}(G;\mathbb{R}) = 0$.
2. Was passiert bei $H^{\ell^1}_1(\,\cdot\,;\mathbb{R})$?

Aufgabe 3 (Quasi-Morphismen**).** Sei G eine diskrete Gruppe. Ein Quasi-Morphismus $f\colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *homogen*, falls

$$f(g^n) = n \cdot f(g)$$

für alle $g \in G$ und alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt.

1. Ist jeder Quasi-Morphismus (bis auf einen additiven gleichmäßig beschränkten Fehler) homogen?
2. Gibt es nicht-triviale Quasi-Morphismen auf abelschen Gruppen?

Aufgabe 4 (Simpliziales Volumen von Flächen**).**

1. Sei $d \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Fundamentalgruppe, dass jede orientierte geschlossene zusammenhängende Fläche vom Geschlecht mindestens 1 eine d-fache Überlagerung durch eine zusammenhängende Fläche besitzt.
2. Stellen Sie eine doppelte Überlagerung einer orientierten geschlossenen zusammenhängenden Fläche vom Geschlecht 2 durch eine zusammenhängende Fläche graphisch dar.

   Hinweis. Zeichnen Sie zunächst eine doppelte Überlagerung von $S^1 \vee S^1$ durch $S^1 \vee S^1 \vee S^1$.
3. Sei F eine orientierte geschlossene zusammenhängende Fläche vom Geschlecht $g \in \mathbb{N}_{>0}$. Zeigen Sie, dass $\|F\| \leq 4 \cdot g - 4$.

   Hinweis. Tatsächlich gilt sogar $\|F\| = 4 \cdot g - 4$; dies erfordert Hilfsmittel aus der Riemannschen Geometrie.

Besprechung am 28. Januar 2010