Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 1 vom 21. Oktober 2009

Aufgabe 1 (Gruppenringe und Unterringe von $\mathbb{C}$**).**

1. Sei $\zeta_5 \in \mathbb{C}$ eine primitive fünfte Einheitswurzel. Sind die Ringe $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/5]$ und $\mathbb{Z}[\zeta_5] \subset \mathbb{C}$ isomorph?

2. Gibt es nicht-triviale Gruppen, deren ganzzahliger Gruppenring zu einem Unterring von $\mathbb{C}$ isomorph ist?

Aufgabe 2 (Ein funktorielles Modell des klassifizierenden Raumes**).** Sei G eine torsionsfreie Gruppe und sei Δ^G das von G aufgespannte (unendlichdimensionale) Simplex (mit der schwachen Topologie). Die Linkstranslationsoperation von G auf G induziert eine stetige G-Operation auf Δ^G. Zeigen Sie, dass der Quotient $G \setminus \Delta^G$ ein Modell für BG ist.

Aufgabe 3 (Homologie der projektiven Ebene mit getwisteten Koeffizienten**).**

1. Sei $\mathbb{Z}_w$ der $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}/2]$-Modul, dessen unterliegender $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}$ ist und auf dem der Erzeuger von $\mathbb{Z}/2$ durch Multiplikation mit -1 operiert. Berechnen Sie $H_*(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}_w)$ und $H^*(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}_w)$. Vergleichen Sie dies mit der (Ko)Homologie von $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten.

2. Wie lautet allgemeine Poincaré-Dualität (mit getwisteten Koeffizienten) für geschlossene, zusammenhängende (nicht notwendig orientierbare) Mannigfaltigkeiten?

Aufgabe 4 ((Ko)Homologie von $\mathbb{Z}/2$**).**

1. Bestimmen Sie Gruppenhomologie und Gruppenkohomologie von $\mathbb{Z}/2$ mit beliebigen Koeffizienten.

2. Verallgemeinern Sie Ihr Ergebnis für $H_*(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Q})$ und $H^*(\mathbb{Z}/2; \mathbb{Q})$ auf beliebige endliche Gruppen!

Abgabe am 29. Oktober 2009, Besprechung am 5. November 2009