Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 4 vom 11. November 2009

Aufgabe 1 (Tor, Beispiele**).**

1. Bestimmen Sie die Gruppen $\operatorname{Tor}_*^{\mathbb{Q}[X]}(\mathbb{Q}[X]/X^{2009}, \mathbb{Q}[X]/X^{2010})$, indem Sie eine geeignete projektive Auflösung wählen.
2. Gilt für alle $\mathbb{Z}[X]$-Moduln A und B, dass $\operatorname{Tor}_2^{\mathbb{Z}[X]}(A, B) = 0$ ist?

Aufgabe 2 (Partielle projektive Auflösungen**).** Sei G eine diskrete Gruppe, sei $n \in \mathbb{N}$ und sei

$$P_n \xrightarrow{\partial_n} P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

eine partielle projektive $\mathbb{Z}G$-Auflösung des trivialen $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$ der Länge n (d.h. die $\mathbb{Z}G$-Moduln $P_0, \dots, P_n$ sind projektiv und die obige Sequenz ist exakt, aber der $\mathbb{Z}G$-Homomorphismus ∂_n ist nicht unbedingt injektiv).

1. Zeigen Sie, dass man die obige partielle projektive Auflösung zu einer projektiven $\mathbb{Z}G$-Auflösung von $\mathbb{Z}$ erweitern kann.
2. Zeigen Sie, dass es eine exakte Sequenz der folgenden Form gibt:

$$0 \longrightarrow H_{n+1}(G;\mathbb{Z}) \longrightarrow \bigl(H_n(P_*)\bigr)_G \longrightarrow H_n\bigl((P_*)_G\bigr) \longrightarrow H_n(G;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

Aufgabe 3 (Hurewicz-Homomorphismus und Gruppenhomologie**).**

1. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ und sei X ein $(n-1)$-zusammenhängender (punktierter) CW-Komplex mit Fundamentalgruppe G. Zeigen Sie, dass es eine exakte Sequenz

$$\pi_n(X) \xrightarrow{h_n^X} H_n(X;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_n(G;\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$$

   gibt, wobei $h_n^X \colon \pi_n(X) \longrightarrow H_n(X;\mathbb{Z})$ der Hurewicz-Homomorphismus im Grad n ist.

   Hinweis. Verwenden Sie Aufgabe 2.

2. Folgern Sie, dass der Hurewicz-Homomorphismus $\pi_2(X) \longrightarrow H_2(X;\mathbb{Z})$ für jeden zusammenhängenden (punktierten) CW-Komplex X mit freier Fundamentalgruppe surjektiv ist.

Aufgabe 4 (Grp bzw. GrpMod und prä-additive Kategorien**).** Eine Kategorie C heißt *prä-additiv*, falls die Mengen $\operatorname{Mor}_C(X, Y)$ für alle Objekte X und Y von C mit der Struktur abelscher Gruppen versehen sind, so dass Komposition von Morphismen bilinear ist.

1. Gibt es eine prä-additive Struktur auf der Kategorie Grp der Gruppen?
2. Gibt es eine prä-additive Struktur auf der Kategorie GrpMod?

Abgabe am 19. November 2009, Besprechung am 26. November 2009