Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 3 vom 4. November 2009

Aufgabe 1 (Projektive Moduln über Gruppenringen)**.**

1. Für welche Gruppen G ist der triviale $\mathbb{Z}G$-Modul $\mathbb{Z}$ projektiv?
2. Für welche Gruppen G ist der triviale $\mathbb{Q}G$-Modul $\mathbb{Q}$ projektiv?

Aufgabe 2 (Kohomologische Dimension)**.** Ist G eine Gruppe, so heißt

$$\operatorname{cd} G := \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid \mathbb{Z} \text{ besitzt eine projektive } \mathbb{Z}G\text{-Auflösung der Länge } n\}$$

die *kohomologische Dimension* von Γ; analog heißt

$$\operatorname{gdim} G := \inf\{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid \text{es gibt ein Modell von } BG \text{ der Dimension } n\}$$

die *geometrische Dimension* von Γ.

1. Zeigen Sie, dass die kohomologische Dimension einer Gruppe höchstens so groß ist wie die geometrische Dimension.
2. Welche Gruppen haben kohomologische Dimension 0 ?
3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie die kohomologische und die geometrische Dimension von $\mathbb{Z}^n$.

Aufgabe 3 (Exaktheitseigenschaften von Hom)**.** Sei R ein Ring.

1. Zeigen Sie, dass eine Sequenz $B' \xrightarrow{f'} B \xrightarrow{f''} B'' \longrightarrow 0$ von R-Rechtsmoduln genau dann exakt ist, wenn die entsprechenden Sequenzen

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(B'', A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(f'', \operatorname{id}_A)} \operatorname{Hom}_R(B, A) \xrightarrow{\operatorname{Hom}_R(f', \operatorname{id}_A)} \operatorname{Hom}_R(B', A)$$

   für alle R-Linksmoduln A exakt sind.

2. Geben Sie ein Beispiel für einen $\mathbb{Z}$-Modul A und eine kurze exakte Sequenz von $\mathbb{Z}$-Moduln an, die zeigt, dass der Funktor $\operatorname{Hom}_{\mathbb{Z}}(\,\cdot\,, A)$ nicht exakt ist.

Aufgabe 4 (Adjungiertheit und Exaktheit)**.** Seien R und S Ringe.

1. Zeigen Sie: Besitzt ein additiver Funktor $F\colon \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Mod-}S$ einen rechtsadjungierten Funktor, so ist F rechtsexakt.

   Hinweis. Ein additiver Funktor $G\colon S\text{-Mod} \longrightarrow R\text{-Mod}$ ist ein *rechtsadjungierter Funktor von* F, falls es einen natürlichen Isomorphismus

$$\operatorname{Hom}_S\bigl(F(\,\cdot\,), \cdot\,\bigr) \cong \operatorname{Hom}_R\bigl(\,\cdot\,, G(\,\cdot\,)\bigr)$$

   von abelschen Gruppen gibt.

2. Zeigen Sie, dass der Tensorproduktfunktor $\cdot \otimes_R A\colon \text{Mod-}R \longrightarrow \text{Ab}$ für jeden R-Linksmodul A rechtsexakt ist.

Abgabe am 12. November 2009, Besprechung am 19. November 2009