# Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 7 vom 2. Dezember 2009

---

**Aufgabe 1 (**Transfer und Ketten von Untergruppen**).** Sei $G$ eine Gruppe und seien $H \subset G$ bzw. $K \subset G$ Untergruppen von endlichem Index mit $K \subset H$. Zeigen Sie (in Homologie oder Kohomologie), dass

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_K^H \circ \operatorname{res}_H^G &= \operatorname{res}_K^G, \\ \operatorname{cor}_H^G \circ \operatorname{cor}_K^H &= \operatorname{cor}_K^G \end{aligned}$$

für (Ko)Homologie mit beliebigen $\mathbb{Z}G$-Koeffizienten gilt.

**Aufgabe 2 (**(Ko)Homologie von $S_3$**).** Berechnen Sie mit Hilfe der Primärzerlegung die (Ko)Homologie der symmetrischen Gruppe $S_3$ mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten (mit trivialer $S_3$-Operation).

**Aufgabe 3 (**Klassischer Transfer**).**

1. Zeigen Sie (z.B. mit Hilfe der topologischen Beschreibung des Transfers), dass der homologische Transfer mit $\mathbb{Z}$-Koeffizienten mit dem klassischen gruppentheoretischen Transfer übereinstimmt. Der gruppentheoretische Transfer zu einer Untergruppe $H \subset G$ von endlichem Index ist durch

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{ab}} &\longrightarrow H_{\mathrm{ab}} \\ [g] &\longmapsto \left[\prod_{k=1}^{[G:H]} g_k \cdot g \cdot R(g_k \cdot g)^{-1}\right] \end{aligned}$$

   gegeben; dabei ist $\{g_1, \dots, g_{[G:H]}\} \subset G$ ein Repräsentantensystem von $H \backslash G$ und $R\colon G \longrightarrow \{g_1, \dots, g_{[G:H]}\}$ ist die Abbildung, die jedem Gruppenelement $g \in G$ den Repräsentanten der Nebenklasse $H \cdot g$ zuordnet.

2. Sei $p \in \mathbb{N}_{>2}$ prim. Zeigen Sie, dass der Transfer zur (multiplikativen) Untergruppe $\{-1, 1\}$ in $\mathbb{Z}/p^\times$ mit dem Legendresymbol über $p$ übereinstimmt.

   *Hinweis.* Verwenden Sie das Gauß-Lemma für quadratische Reste.

**Aufgabe 4 (**Transfer ist unsichtbar in GrpMod bzw. GrpMod$^-$**).** Zeigen Sie, dass die Transferabbildungen in Gruppen(ko)homologie im allgemeinen nicht von Morphismen in GrpMod bzw. GrpMod$^-$ induziert sind.

---

Abgabe am 10. Dezember 2009, Besprechung am 17. Dezember 2009