Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 5 vom 18. November 2009

Aufgabe 1 (Geometrische Dimension und Torsion**).**

1. Sei G eine diskrete Gruppe, die nicht torsionsfrei ist. Zeigen Sie, dass
$$\operatorname{gdim} G = \infty = \operatorname{cd} G.$$
(D.h. es gibt kein endlich-dimensionales Modell für BG und es gibt keine projektive $\mathbb{Z}G$-Auflösung endlicher Länge des trivialen $\mathbb{Z}G$-Moduls $\mathbb{Z}$).

2. Gibt es auch torsionsfreie Gruppen mit unendlicher geometrischer/kohomologischer Dimension?

Aufgabe 2 ($\mathbb{Z}/p$-Operationen auf $\mathbb{Z}/p^n$**).** Sei $p \in \mathbb{N}$ prim, sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$ und sei $a \in \mathbb{Z}$ mit $a^p \equiv 1 \bmod p^n$. Zeigen Sie:

1. Ist $p \neq 2$, so folgt $a \equiv 1 \bmod p^{n-1}$.

2. Ist $p = 2$, so folgt $a \equiv \pm 1 \bmod 2^{n-1}$.

Aufgabe 3 (Verallgemeinerte Quaternionengruppen**).** Zu $m \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ sei Q_m die *m-te verallgemeinerte Quaternionengruppe*, d.h. Q_m ist die Untergruppe der Quaternionen $\mathbb{H}$, die von den Elementen $e^{\pi i/m}$ und j erzeugt wird. Bestimmen Sie $H_{2009}(Q_m;\mathbb{Z})$, wobei Q_m trivial auf $\mathbb{Z}$ operiert.

Aufgabe 4 (Homologie von $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$**).**

1. Seien m, $n \in \mathbb{Z}$ und sei $\varphi\colon \mathbb{Z}/m \longrightarrow \mathbb{Z}/n$ ein Gruppenhomomorphismus. Bestimmen Sie den induzierten Homomorphismus
$$H_*(\varphi;\mathrm{id}_{\mathbb{Z}})\colon H_*(\mathbb{Z}/m;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathbb{Z}/n;\mathbb{Z})$$
(wobei die Gruppen jeweils trivial auf den Koeffizienten $\mathbb{Z}$ operieren).

2. Berechnen Sie $H_*(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z});\mathbb{Z})$, wobei $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ trivial auf $\mathbb{Z}$ operiert.

   Hinweis. Verwenden Sie, dass $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ zu $\mathbb{Z}/4 *_{\mathbb{Z}/2} \mathbb{Z}/6$ isomorph ist, wobei die Homomorphismen $\mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/4$ und $\mathbb{Z}/2 \longrightarrow \mathbb{Z}/6$ durch Multiplikation mit 2 bzw. 3 gegeben sind.

Abgabe am 26. November 2009, Besprechung am 3. Dezember 2009