Übungen zur Topologie III

Dr. C. Löh — Blatt 11 vom 13. Januar 2010

Aufgabe 1 (Homologie normierter Kettenkomplexe**).** Geben Sie ein Beispiel für einen normierten Kettenkomplex C_* und ein $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass die k-te reduzierte Homologie von C_* verschwindet, aber die k-te reduzierte Kohomologie des dualen Komplexes $C^{\#*}$ *nicht* verschwindet. Insbesondere kann man die induzierte Halbnorm in der Kohomologie des dualen Komplexes im allgemeinen nicht durch die Halbnorm in der Homologie ausdrücken.

Aufgabe 2 (Simpliziales Volumen und Abbildungsgrade**).**

1. Sei $f\colon M \longrightarrow N$ eine stetige Abbildung zwischen orientierten geschlossenen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten derselben Dimension mit nichtverschwindendem Grad $\deg f$. Zeigen Sie, dass
$$\|N\| \leq \frac{1}{|\deg f|} \cdot \|M\|.$$
Bestimmen Sie damit das simpliziale Volumen von Sphären und Tori.

2. Sei $f\colon M \longrightarrow N$ eine d-blättrige Überlagerung von orientierten geschlossenen zusammenhängenden Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass
$$\|M\| = d \cdot \|N\|.$$

Aufgabe 3 (Simpliziales Volumen und Produkte**).** Seien M und N zwei orientierte geschlossene zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Zeigen Sie, dass
$$\|M\| \cdot \|N\| \leq \|M \times N\| \leq \binom{\dim M + \dim N}{\dim M} \cdot \|M\| \cdot \|N\|.$$

Hinweis. Betrachten Sie für die rechte Ungleichung das homologische Kreuzprodukt und für die linke Ungleichung das kohomologische Kreuzprodukt.

Aufgabe 4 (Die ℓ^p-Normen auf dem singulären Kettenkomplex**).** Sei X ein topologischer Raum. Für $p \in [1, \infty]$ ist die *ℓ^p-Norm* $\|\cdot\|_p$ auf dem singulären Kettenkomplex $C_*(X;\mathbb{R})$ die p-Norm bezüglich der Basis, die durch die singulären Simplizes gegeben ist; d.h. für alle Ketten $c = \sum_{j=1}^{k} a_j \cdot \sigma_j \in C_*(X;\mathbb{R})$ in reduzierter Form sei
$$\|c\|_p := \left(\sum_{j=1}^{k} |a_j|^p\right)^{1/p}.$$

Im folgenden sei $p \in (1, \infty]$ und X sei ein wegzusammenhängender Raum mit mindestens zwei Punkten.

1. Zeigen Sie, dass $C_*(X;\mathbb{R})$ bezüglich der ℓ^p-Norm *kein* normierter Kettenkomplex ist.

2. Die Norm $\|\cdot\|_p$ induziert eine Halbnorm auf der Homologie $H_*(X;\mathbb{R})$. Was kann man über diese Halbnorm sagen?

Besprechung am 21. Januar 2010